

## РЕЦЕНЗІЯ

доктора фізико-математичних наук, професора

**Нитребича Зіновія Миколайовича**

на кваліфікаційну роботу

**Слоньовського Ярослава Олеговича**

на тему

### **«КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ»,**

подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії

за спеціальністю 111 *Математика*,

галузь знань 11 *Математика та статистика*.

У результаті вивчення рукопису дисертаційної роботи **Слоньовського Ярослава Олеговича** та ознайомлення з опублікованими роботами здобувача за темою дисертації, треба відзначити наступне.

**1. Актуальність теми дисертації та її зв'язок з планами роботи кафедри.** Одним з найважливіших завдань у теорії диференціальних рівнянь є дослідження крайових задач для рівнянь із частинними похідними та їх систем. На сьогоднішній день досить добре вивчені класичні крайові задачі для лінійних і деяких класів квазілінійних рівнянь із частинними похідними та їхні безпосередні узагальнення. Водночас задачі з багатоточковими та нелокальними умовами за часовою змінною (які належать до класу неklasичних задач) для еволюційних рівнянь є мало вивченими. Їх подальші дослідження вимагають розробки нових підходів і методів.

Для окремих класів рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь коректність багатоточкових і нелокальних задач в обмежених і необмежених областях вивчалась у роботах Ю. М. Березанського, В. М. Борок, Ю. М. Валіцького, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, О. О. Дезіна, Ю. А. Дубінського, П. І. Каленюка, І. Я. Кміть, О. В. Мартинюк, М. І. Матійчука, А. М. Нахушева, З. М. Нитребича, І. Д. Пукальського, О. Л. Скубачевського, В. К. Романка, Л. В. Фардіголи, М. Й. Юрчука та інших авторів, де, переважно, виділені випадки коректно поставлених задач.

Проте багатоточкові та нелокальні задачі для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях є, взагалі, некоректними, а питання щодо їх розв'язності у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників. Для вирішення проблеми малих знаменників природним виявився метричний підхід, за допомогою якого у працях Б. Й. Пташника, В. С. Ільківа та їх учнів досліджено коректну розв'язність задач з багатоточковими та нелокальними умовами за часовою змінною для окремих класів рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь.

Водночас слабо вивченими є локальні багатоточкові, двоточкові нелокальні задачі та задачі Ніколетті для еволюційних рівнянь із виродженням за часовою змінною. При дослідженні таких задач виникають нові труднощі, які зумовлені, зокрема, складною нелінійною структурою малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків задач, а

також відсутністю підходів для встановлення ефективних оцінок знизу малих знаменників. Розробці таких питань присвячене дане дисертаційне дослідження, тому вважаю його актуальним.

Дослідження дисертації виконані в межах науково-дослідних робіт кафедри вищої математики «Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, теорії функцій та функціонального аналізу, математичне моделювання процесів різної структури» (2016-2020 рр., номер державної реєстрації 0116U004101) та «Теоретичні та прикладні аспекти теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій, функціонального аналізу та математичного моделювання» (2021-2026 рр., номер державної реєстрації 0121U114596).

**2. Аналіз змісту дисертаційної роботи.** Дисертаційну роботу викладено на 140 сторінках, обсяг основного тексту становить 113 сторінок, у ній містяться також 8 рисунків. За структурою робота містить вступ, п'ять розділів, загальні висновки, список використаної літератури, що містить 138 найменувань.

**Перший розділ** присвячений огляду праць, пов'язаних із тематикою дисертації. У ньому продемонстровано різноманітність досліджень крайових задач, підкреслено актуальність роботи, вказано задачі та проблеми, які потребували глибшого вивчення.

**Другий розділ** містить спільне формулювання задач дисертації, загальну методику їх досліджень, також низку допоміжних тверджень із теорії чисел про наближення дійсних чисел раціональними дробами, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, дискретної математики.

**У третьому розділі** досліджено локальні двоточкові та багатоточкові задачі з простими вузлами інтерполяції за часовою змінною  $t$  для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера другого та високого порядків. Застосовано метричний підхід для ґрунтовного аналізу оцінок знизу визначників цих задач. У випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції отримано точніші (порівняно з випадком довільного розташування вузлів) результати стосовно розв'язності багатоточкових задач. Описано класи рівнянь типу Ейлера, для яких встановлено оцінки знизу характеристичних визначників дво- і багатоточкових задач у випадку довільних різних значень вузлів інтерполяції.

**У четвертому розділі** встановлено умови однозначної розв'язності задачі Ніколетті для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера у просторах гладких функцій, періодичних за просторовими координатами. За допомогою метричного підходу доведено оцінки знизу малих знаменників, з яких впливає збіжність рядів Фур'є для розв'язків у відповідних функційних просторах, а отже, й коректність задачі Ніколетті для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із її параметрів. Для випадку, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію, отримано точніші (порівняно із загальним випадком розташування вузлів) оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті.

**П'ятий розділ** присвячено дослідженню задач з двоточковими нелокальними умовами за виділеною змінною  $t$  та умовами періодичності за іншими координатами для рівняння з частинними похідними типу Ейлера зі змінними за  $t$  коефіцієнтами. У розділі знайдено умови коректної розв'язності нелокальних задач, встановлено метричні оцінки знизу малих знаменників. Для встановлення результатів цього розділу важливими стали зображення

розв'язків нелокальних задач за допомогою матриць спеціальної факторизованої структури, що дозволило отримати точні оцінки розв'язків.

Висновки до дисертації підкреслюють наукову новизну та цінність проведених досліджень. Список використаних джерел є достатньо повним і містить праці, що є близькими до тематики дисертації.

**3. Оцінка наукового рівня дисертації та публікацій здобувача.** Дисертаційні дослідження виконані на високому науковому рівні. Для їх проведення автор застосував методи різних галузей математики – диференціальних рівнянь, математичного та функціонального аналізу, алгебри, метричної теорії чисел, дискретної математики. Це свідчить про його високу кваліфікацію і глибоке володіння опрацьованою тематикою. Виконуючи дисертаційні дослідження, автор подолав значні труднощі як теоретичного, так і аналітичного характеру, пов'язаних з

- конструктивною побудовою розв'язків задач у вигляді рядів Фур'є;
- обґрунтуванням їх збіжності у відповідних функційних просторах;
- розробкою нових ефективних підходів оцінювання знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків.

Результати роботи достатньо повно опубліковані у 13 наукових працях, а саме, у 5 статтях, з яких одна – у науковому іноземному журналі, індексованому міжнародною наукометричною базою Scopus, чотири – у фахових наукових виданнях України з математики (одна – категорії А, три – категорії Б) та 8 матеріалах та тезах доповідей на конференціях. У цих працях повністю відображені отримані результати досліджень.

**4. Наукова обґрунтованість отриманих результатів, наукових положень, висновків, рекомендацій.** У дисертації для побудови розв'язків нелокальних і багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними використано метод рядів Фур'є. Функції-коефіцієнти рядів Фур'є є розв'язками нелокальних і багатоточкових задач для звичайних диференціальних рівнянь із цілочисловими параметрами. Для таких задач встановлено умови їх однозначної розв'язності; за допомогою методів математичного аналізу, диференціальних рівнянь, алгебри, дискретної математики обґрунтовано оцінки для розв'язків цих задач та їхніх похідних. Для оцінювання знизу малих знаменників нелокальних і багатоточкових задач використано метричний підхід, результати метричної теорії чисел і встановлені у розділі 2 нові допоміжні твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій.

Отримані у дисертації результати і висновки акуратно сформульовані. Вони є новими, достовірними, строго доведеними; вони розширюють і доповнюють відомі результати інших авторів стосовно дослідження нелокальних і багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними, де виникала проблема малих знаменників.

**5. Рівень поставленого наукового завдання та опанування здобувачем методологією наукової діяльності.** Наукове завдання, поставлене перед здобувачем, полягало у побудові розв'язків, оцінки малих знаменників та встановленні умов коректної розв'язності локальних

двоточкових та багатоточкових задач, задач Ніколетті та нелокальних двоточкових задач другого і високого порядків. Вважаю, що це завдання повністю виконано і було досягнуто поставлену мету. Зокрема, у ході розв'язання поставленої наукової задачі здобувачем отримані такі *нові* основні наукові результати:

- побудовано зображення у вигляді рядів для розв'язків локальних двоточкових і багатоточкових задач, задач Ніколетті, нелокальних двоточкових задач для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера другого та високого порядків;
- встановлено умови існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків досліджених задач у просторах періодичних за просторовими змінними функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають степеневу або експоненційну поведінку;
- досліджено часткові випадки задач, коли дійсні частини коренів характеристичних рівнянь мають спеціальну поведінку або вузли інтерполяції є логарифмічно рівновіддаленими;
- проведено метричний аналіз оцінок знизу малих знаменників задач, з яких впливають умови їх коректності для всіх векторів (компонентами яких є параметри задачі: коефіцієнти рівнянь, крайових умов, значення вузлів інтерполяції), крім, можливо, множини нульової або малої міри Лебега.

Крім того, доповнено та вдосконалено методику оцінювання знизу малих знаменників, яка базується на нових твердженнях про оцінки мір підрівневих множин гладких функцій.

**6. Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертації, в основному, мають теоретичну цінність. Проведені дослідження стали джерелом нових задач у метричній теорії чисел. У майбутньому результати дисертації можна використати:

- для встановлення коректності нелокальних і багатоточкових задач для систем рівнянь із частинними похідними з виродженими коефіцієнтами;
- для аналізу природних процесів, які описуються рівняннями зі степеневим виродженням коефіцієнтів;
- для формування курсів з рівнянь математичної фізики, чисельних методів як компонент освітньо-наукових програм аспірантів.

Одержані в дисертації формули для розв'язків можна застосувати при обґрунтуванні диференціально-символьного методу дослідження нелокальних і багатоточкових задач для рівнянь типу Ейлера у необмежених областях.

### 7. Зауваження до дисертації:

1. В анотації на с. 2 замість фрази «встановлено умови коректності багатоточкових задач для рівняння Ейлера» слід вжити фразу «встановлено умови коректності багатоточкових задач для рівняння *із частинними похідними типу Ейлера*».

2. На с. 41 зауваження до Теорема 2.6 варто було б виділити та пронумерувати, як це зроблено, зокрема, далі для подібного зауваження на с. 46.

3. У загальній схемі дослідження задач дисертації на с. 34 у формулах 2.1 та 2.3 введені позначення  $t_0^*$ ,  $t_1^*$  та  $t_1, \dots, t_n$  відповідно. На с. 53 для двоточнової задачі використовуються

позначення  $t^-, t^+$  та  $t_0, t_1$ ; на с. 64 для багатоточкової задачі  $t_1^*, t_2^*$ , на с. 82 для задачі Ніколетті другого порядку  $t_0, t_1$ , що не відповідає введеним у загальній схемі позначенням.

4. Скалярний добуток векторів записується по-різному: у позначеннях на с. 12 є  $\langle k, x \rangle$ , а на с. 54 у формулі 3.5 зустрічається інше позначення у вигляді  $kx$ .

5. На с. 46 у Зауваженні 2.1 відсутнє посилання на рис. 2.5 та 2.6, які містяться на с. 47.

6. На с. 72 вказано «див. теорему 2 нижче», що є неточним посиланням.

7. У підрозділі 3.2 зустрічаються різні позначення для визначника  $\Delta$ , одне з яких включає число  $n$  – кількість вузлів інтерполяції, а інше його не містить, доцільніше було б обрати єдине позначення.

8. На с. 72 встановлюються метричні оцінки в кубі  $[1, T]^n$ , а задача поставлена у кубі  $(0, T)^n$ . Не вказано, як здійснюється перехід.

9. У формулі 3.24 в позначенні  $Q_p^T$  переплутані місцями  $T$  та  $p$ .

10. У формулюванні Теорему 3.6 на с. 73 після слова «векторів» пропущено позначення  $k \in \mathbb{Z}^p$ .

11. У формулах 3.1, 4.1, 5.1, та і у відповідних рівняннях Ейлера 3.4, 4.5, 5.4, вказані диференціальні оператори, що відмінні від операторів у загальній схемі дослідження 2.1 та 2.8 відповідно. Перехід від одних операторів до інших можна здійснити згідно Леми 2.8 (та Леми 2.7 в зворотному напрямку), що варто було вказати у роботі.

12. У формулюваннях теорем 5.1 та 5.2 у дужках вжито фразу «крім скінченної кількості векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$ », проте у дужках повинна бути лише фраза «крім скінченної кількості», а інша частина фрази «векторів  $k \in \mathbb{Z}^p$ » має бути поза дужками.

13. Розділи 4 і 5 не містять вступу перед своїми підрозділами, тоді як у 2 та 3 розділах вступи присутні.

14. Літературні джерела [94] і [131] є однаковими.

Зазначені зауваження не є принциповими та не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

**8. Загальні висновки.** Вказані зауваження не змінюють позитивної оцінки наукових результатів, отриманих автором. У цілому дисертаційна робота **Слоньовського Ярослава** є завершеним науковим дослідженням, в якому розв'язана актуальна наукова задача про встановлення умов коректності крайових задач (локальних багатоточкових, нелокальних двоточкових задач) для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера у циліндричних областях. Дослідження збіжності рядів Фур'є, якими зображено розв'язки задач, потребувало розв'язання проблеми малих знаменників. Для цього було використано метричний підхід, а також розроблено нові методики, які базуються на допоміжних твердженнях про оцінки мір виняткових множин гладких функцій. За допомогою метричного підходу встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників задач, що виникли при зображенні розв'язків за допомогою рядів Фур'є, з яких випливає однозначна розв'язність задач для всіх параметрів (коефіцієнтів рівнянь, крайових умов, значень вузлів інтерполяції), крім множини, з нульовою або малою лебегівською мірою.

На підставі ретельного аналізу представленої дисертаційної роботи можна зробити висновок, що робота відповідає вимогам до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії, встановлених наказом МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та постановою Кабінету Міністрів України від 12 січня 2022 р. № 44 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» з останніми змінами, внесеними постановою № 507 Кабінету Міністрів України від 03.05.2024 р.

Кваліфікаційна робота **Ярослава СЛОНЬОВСЬКОГО** на тему «**Крайові задачі для еволюційних рівнянь із виродженням за часовою змінною**» є *завершеною науковою роботою*, а її автор – **Ярослав СЛОНЬОВСЬКИЙ** – заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 *Математика*, галузь знань 11 *Математика та статистика*.

**Рецензент:**

доктор фіз.-мат. наук, професор,  
професор кафедри вищої математики  
Інституту прикладної математики  
та фундаментальний наук  
Національного університету  
«Львівська політехніка»



**Зіновій НИТРЕБИЧ**

Підпис д.ф.-м.н., професора Нитребича З. М. засвідчую

**Вчений секретар**

Національного університету  
«Львівська політехніка»  
канд. техн. наук, доцент



**Роман БРИЛИНСЬКИЙ**

1 « квітня » 2025р.