

РЕЦЕНЗІЯ

доктора фізико-математичних наук, доцента

МЕДИНСЬКОГО Ігоря Павловича

на кваліфікаційну роботу

СЛОНЬОВСЬКОГО Ярослава Олеговича

на тему: **«КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ»**, подану на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 *Математика*, галузь знань 11 *Математика та статистика*.

У результаті вивчення рукопису дисертаційної роботи **Слоньовського Ярослава**, яка складається з анотації, вступу, п'яти розділів, висновків та бібліографії використаних джерел, а також ознайомлення із опублікованими роботами здобувача за темою дисертаційного дослідження, слід відзначити наступне.

Актуальність теми дослідження та її зв'язок з планами роботи кафедри. Задачі, досліджені у дисертаційній роботі, а саме локальні багатоточкові задачі з простими вузлами інтерполяції, задачі Ніколетті та нелокальні двоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера із виродженням за виділеною змінною, є умовно коректними, оскільки розв'язність таких задач пов'язана з проблемою малих знаменників, що виникають у формулах для коефіцієнтів рядів Фур'є, якими зображуються розв'язки цих задач, що може спричинити розбіжність рядів у відповідних функційних просторах. Ці задачі та умови їх коректності мають значний інтерес для побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними і для її застосувань, бо зазначені задачі виникають при дослідженні низки прикладних проблем.

На цей час добре дослідженими є нелокальні та багатоточкові задачі для окремих класів лінійних і слабконелінійних рівнянь із частинними похідними, які не містять вироджених коефіцієнтів, встановлено умови їх коректності у відповідних функційних просторах і за допомогою метричного підходу показано, що ці умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із параметрів задач. Однак випадок багатоточкових і нелокальних задач для рівнянь типу Ейлера, що містять виродження коефіцієнтів, залишався недостатньо вивченим. Цьому випадку присвячене дане дисертаційне дослідження. Тому тематику дисертації вважаю актуальною.

Тема дисертації відповідає науковому напрямку кафедри вищої математики, зокрема вивчення крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Дисертаційні дослідження виконані в межах науково-дослідних робіт кафедри вищої математики «Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, теорії функцій та функціонального аналізу, математичне моделювання процесів різної структури» (2016-

2020 р., номер державної реєстрації 0116U004101) та «Теоретичні та прикладні аспекти теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій, функціонального аналізу та математичного моделювання» (2021-2026 р., номер державної реєстрації 0121U114596).

Оцінка наукового рівня дисертації та публікацій здобувача. *Метою роботи є побудова формул для розв'язків локальних двоточкових і багатоточкових задач, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π -періодичності за рештою змінних для диференціальних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера у вигляді рядів Фур'є, встановлення умов збіжності цих рядів у відповідних функційних просторах, з'ясування структури малих знаменників, що виникають при побудові розв'язків, застосування метричного підходу для встановлення оцінок знизу малих знаменників.*

Для досягнення поставленої мети здобувач розв'язав такі задачі:

провів

- оцінки знизу малих знаменників, що виникають у нелокальних двоточкових, локальних двоточкових і багатоточкових задачах, задачі Ніколетті високого порядку;

отримав

- зображення розв'язків досліджуваних задач на підставі методу рядів Фур'є;
- умови однозначної розв'язності двоточкових і багатоточкових задач з простими вузлами, задач з умовами Ніколетті та нелокальними двоточковими умовами для диференціальних рівнянь типу Ейлера другого та високого порядків;

обґрунтував

- актуальність проблеми малих знаменників, навів приклади задач, за яких вона виникає та спричиняє розбіжність рядів для розв'язків задач;

проаналізував

- властивості малих знаменників, що виникають при зображенні розв'язків крайових задач дисертації у вигляді рядів Фур'є;

розробив і застосував

- допоміжні методики встановлення оцінок знизу малих знаменників, які базуються на встановлених нових твердженнях метричного характеру про оцінки мір виняткових множин гладких функцій.

Об'єктом дослідження є локальні двоточкові та багатоточкові задачі, задача Ніколетті та нелокальна двоточкова задача для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера другого та високого порядків.

Предметом дослідження є побудова та вивчення властивостей розв'язків досліджуваних задач, оцінки знизу малих знаменників, що пов'язані з цими задачами, та встановлення умов коректності задач у відповідних функційних просторах.

Висновки до дисертації підкреслюють наукову новизну та цінність проведених досліджень. Список використаних джерел свідчить про те, що під час роботи було проаналізовано сучасні результати досліджень нелокальних і багатоточкових задач для диференціальних рівнянь, а також досліджень у метричній теорії чисел.

За темою роботи опубліковано 13 наукових праць, з них: 5 статей, з яких 1 в іноземному виданні, індексованому в наукометричній базі *Scopus*, 4 у фахових наукових виданнях України (1 – категорії А, 3 – категорії Б); 8 матеріалів тез доповідей на конференціях, у яких повністю відображені основні наукові результати.

Наукова обґрунтованість отриманих результатів, наукових положень, висновків, рекомендацій. Основним методом для побудови розв'язків задач, розглянутих у дисертаційній роботі, вибрано метод рядів Фур'є, що дозволяє зводити задачі для рівнянь із частинними похідними до сім'ї крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь із цілочисловими параметрами. Важливу роль відіграє встановлення оцінок для фундаментальних систем розв'язків, а також визначників, елементи яких виражаються через ці системи, при цьому використовуються результати лінійної алгебри, зокрема, факторизації відповідних матриць та визначників. Для оцінок малих знаменників застосовано метричний підхід, ідеї Б. Й. Пташника та його учнів, а також розроблено нову методику, яка базується на встановленні нових метричних твердженнях про оцінки мір виняткових множин гладких функцій.

Відзначимо, що проведені у дисертації дослідження нелокальних і багато точкових задач узгоджуються і доповнюють результати досліджень інших авторів, де виникала проблема малих знаменників.

Аналіз змісту дисертаційної роботи. Дисертаційна робота виконана на 140 сторінках, обсяг основного тексту становить 113 сторінок, містить 8 рисунків. Робота має класичну структуру, а саме вступ, п'ять розділів, загальні висновки та список використаної літератури, що містить 138 найменувань.

У **першому розділі** наведено огляд праць інших авторів, результатів досліджень багатоточкових і нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними, їх систем.

Другий розділ є допоміжним, у ньому наведено спрощену схему досліджень крайових задач з багатоточковими та нелокальними умовами і умовами Ніколетті для рівнянь із частинними похідними. Описані функційні простори, у яких встановлені умови коректності поставлених задач для диференціального рівняння типу Ейлера. Наведено деякі результати теорії чисел, теорії функцій та теорії звичайних диференціальних рівнянь. Отримані та доведені допоміжні леми, що використовуються для оцінок знайдених розв'язків та компонентів знаменників рядів, що їх зображують.

Третій розділ є першим розділом основних результатів, у ньому досліджено умови розв'язності двоточкових та багатоточкових задач для диференціального

рівняння із частинними похідними типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами. Встановлено метричні оцінки для визначників задач з простими вузлами інтерполяції для рівнянь другого та високого порядків. Розглянуто часткові випадки логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції. Важливим результатом цього розділу є те, що здобувач отримав опис рівнянь (у термінах поведінки коренів характеристичного рівняння), для яких виконуються рівномірні оцінки знизу для послідовності відповідних визначників дво- і багатоточкових задач.

Четвертий розділ має структуру досліджень, схожу до третього, у ньому встановлено умови розв'язності задачі з умовами Ніколетті для рівнянь типу Ейлера другого та високого порядків. З'ясовано структуру малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків, наведено приклади задач, при яких проблема малих знаменників є істотною. Для доведення оцінок знизу послідовності відповідних характеристичних визначників задачі Ніколетті для звичайного лінійного диференціального рівняння з виродженими змінними коефіцієнтами використано метричний підхід та встановлені здобувачем нові метричні твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій. Розглянуто частковий випадок задачі Ніколетті, коли вузли інтерполяції задаються геометричною прогресією.

П'ятий розділ присвячено дослідженню задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за іншими координатами та умов їх коректності. Встановлено умови збіжності рядів, що зображують розв'язки цих задач у відповідних функційних просторах, доведено метричні оцінки знизу малих знаменників нелокальної двоточної задачі високого порядку. Зауважимо, що раніше метричні оцінки малих знаменників нелокальних задач були отримані лише для рівняння зі сталими коефіцієнтами, у даній дисертаційній роботі коефіцієнти є степеневими функціями змінної t .

Рівень поставленого наукового завдання та опанування здобувачем методологією наукової діяльності. Наукове завдання, поставлене перед здобувачем, полягало у побудові розв'язків локальних двоточкових і багатоточкових задач, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π -періодичності за рештою змінних для диференціальних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера, встановленні оцінок розв'язків у певних функційних просторах, встановленні структурних властивостей та оцінок малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків задач. Вважаю, що це завдання повністю виконано і було досягнуто поставлену мету. Зокрема, у ході розв'язання поставленої наукової задачі здобувачем отримані такі основні наукові результати:

вперше

- побудовано формули для розв'язків локальних двоточкових і багатоточкових задач, нелокальних двоточкових задач та задач з умовами Ніколетті для рівнянь

типу Ейлера у функційних просторах, коефіцієнти ряду Фур'є яких мають степеневу чи експоненційну поведінку;

- одержано умови існування єдиного розв'язку досліджених задач для рівнянь типу Ейлера другого та високого порядків;
- розглянуто часткові випадки багатоточкових задач та задачі Ніколетті у випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції;
- одержано приклади умов задач Ніколетті, за яких виникає проблема малих знаменників, що спричиняє розбіжність ряду зображення розв'язку;
- доведено, що умови коректності виконуються для всіх векторів, компонентами яких є параметри задачі (коефіцієнти рівнянь, значення вузлів інтерполяції та коефіцієнти крайових умов), крім, можливо, множини нульової або малої міри Лебега;

удосконалено

- методика оцінювання знизу малих знаменників, що виникають у задачах дисертаційного дослідження;

отримав подальший розвиток

- метричний підхід дослідження крайових задач для рівнянь із виродженими коефіцієнтами за виділеною змінною.

Висновок про відповідність дисертації встановленим вимогам. Структура дисертації, мова та стиль викладення відповідають вимогам щодо оформлення дисертацій доктора філософії. Застосована в роботі наукова термінологія є загально визнаною, стиль викладення результатів теоретичних і практичних досліджень, наукових положень, висновків і рекомендацій забезпечують доступність їх сприйняття та використання. Дисертація є завершеною науковою працею, а її оформлення відповідає встановленим вимогам МОН України, зокрема наказу МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та містить усі необхідні структурні елементи.

За актуальністю тематики, обсягом проведених досліджень, науковою новизною отриманих результатів та їх практичним значенням дисертаційна робота **Слоньовського Ярослава** відповідає вимогам та паспорту спеціальності *III Математика*.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер, їх можна застосовувати у подальших дослідженнях задач з крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними та систем рівнянь, а також при дослідженні конкретних прикладних задач, що моделюються дослідженими задачами.

Зауваження до дисертації:

1. у дисертації не проведено порівняння результатів, отриманих для випадків рівнянь другого та високого порядків;
2. у пункті, в якому означено функційні простори, простір \mathcal{T} названий простором тригонометричних поліномів скінченного степеня (див. с. 32), хоча степінь n може бути як завгодно великим;
3. на с. 40 у першому реченні останнього абзацу замість рівності $\varepsilon = 1/2$ слід записати $\varepsilon \geq 1/2$;
4. у формулі (2.26) із формулювання леми 2.8 використовується позначення чисел Стірлінга замість власних позначень t_k^n цієї леми;
5. після формули (3.2) є одрук позначень, замість d слід набрати ∂ ;
6. у першому реченні на с. 56 слово «з» є зайвим;
7. після формули (3.12) вжито фразу «Перейдемо до оцінок розв'язку», хоча спочатку у дисертації оцінюються знаменники, а вже потім сам розв'язок;
8. у підрозділі 3.2 для визначника Δ вжито подвійне позначення, одне з них містить індекс розмірності, а інше його не має, варто було б уніфікувати ці позначення;
9. у формулюванні теореми 3.6 на с. 73 після слова «векторів» пропущено позначення $k \in \mathbb{Z}^p$;
10. у назві Випадку 2 на с. 85, с. 87, с. 88 нерівності для вузлів інтерполяції можна вважати строгими;
11. У формулюваннях теорем 5.1 та 5.2 у дужках вжито фразу «крім скінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ », проте у дужках повинна бути лише фраза «крім скінченної кількості», а інша частина фрази «векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ » має бути поза дужками.

Зазначені зауваження не є принциповими та не впливають на загальну позитивну оцінку роботи.

Загальні висновки. Вказані зауваження не знижують позитивної оцінки дисертації в цілому, а також розроблених автором основних наукових висновків та отриманих результатів проведених досліджень. Дисертаційна робота **Слоньовського Ярослава** є завершеним науковим дослідженням, в якому розв'язана актуальна наукова задача дослідження умов коректності крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера, які є, взагалі, некоректними за Адамаром, що вимагає дослідження проблеми малих знаменників. Доповнено методи метричного підходу, за допомогою якого встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників задач, що виникли при побудові розв'язків, з яких впливає однозначна розв'язність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівнянь та параметри крайових умов.

На підставі детального аналізу представленої дисертаційної роботи, зокрема її актуальності, глибини опрацювання поставленої проблеми встановлення умов коректності крайових задач для еволюційних рівнянь із виродженням за часовою змінною типу Ейлера, обґрунтованості основних положень і висновків, наявності наукової та теоретичної цінності, можна зробити висновок, що робота відповідає вимогам, які сформовані до дисертацій на здобуття наукового ступеня доктора філософії та встановлені наказом МОН України № 40 від 12.01.2017 р. «Про затвердження вимог до оформлення дисертації» та постановою КМ від 12 січня 2022 р. № 44 «Порядку присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії» з останніми змінами, внесеними постановою КМ № 507 від 03.05.2024 р.

Кваліфікаційна робота **Ярослава СЛОНЬОВСЬКОГО** за темою «**Крайові задачі для еволюційних рівнянь із виродженням за часовою змінною**» є завершеною науковою роботою, а її автор **Ярослав СЛОНЬОВСЬКИЙ**, заслуговує присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 *Математика*, галузь знань 11 *Математика та статистика*.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, доцент,
професор кафедри прикладної математики
Інституту прикладної математики
та фундаментальних наук
Національного університету
«Львівська політехніка»



Ігор МЕДИНСЬКИЙ

Підпис д.ф.-м.н. Мединського І. П. «засвідчую»

Вчений секретар

Національного університету
«Львівська політехніка»



Роман БРИЛИНСЬКИЙ

31 «березня» 2025р.