НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Сложьовський Ярослав Олегович

УДК 517.95

ДИСЕРТАЦІЯ

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ

111 — Математика
11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Я. О. Слоньовський

Науковий керівник: Ільків Володимир Степанович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Львів — 2025

АНОТАЦІЯ

Слоньовський Я. О. Крайові задачі для еволюційних рівнянь із виродженням за часовою змінною. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 — «Математика», галузь знань 11 — «Математика та статистика». — Національний університет «Львівська політехніка», Львів, 2025.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню розв'язності некласичних задач з локальними багатоточковими умовами, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за рештою змінних для диференціального рівняння із частинними похідними типу Ейлера. Інтерес дослідників до таких задач зумовлений як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що локальні багатоточкові та нелокальні задачі виникають при математичному описі низки процесів. У загальному випадку такі задачі є умовно коректними, а дослідження їх розв'язності пов'язане із проблемою малих знаменників. Суть проблеми малих знаменників полягає у тому, що коефіцієнти рядів Фур'є, якими зображуються розв'язки задач, містять знаменники, які можуть ставати як завгодно близькими до нуля для нескінченної кількості індексів підсумовування, це може спричинити розбіжність рядів у відповідних функційних просторах.

У розділі 1 наведено огляд праць, які є близькими до тематики даної дисертації. У розділі 2 описано загальну методику дослідження задач, наведено деякі допоміжні твердження з аналізу і теорії чисел.

У розділі 3 встановлено умови однозначної розв'язності дво- і багатоточкових задач з простими вузоами інтерполяції для рівняння Ейлера другого і високого порядків. Встановлено умови існування єдиного розв'язку (зображеного рядом Фур'є) двоточкових і багатоточкових задач, якщо їх

вхідні дані є достатньо гладкими, а послідовності відповідних характеристичних визначників допускають певні оцінки знизу. За допомогою метричного підходу показано, що такі оцінки знизу виконуються для всіх векторів, компонентами яких є параметри задачі (коефіцієнти рівнянь, значення вузлів інтерполяції), крім, можливо, множини векторів нульової або малої міри Лебега. Розглянуто частковий випадок багатоточкової задачі, коли її вузли є логарифмічно рівновіддаленими.

Розділ 4 дисертації присвячено дослідженню задачі Ніколетті для рівняння з частинними похідними типу Ейлера. Встановлено умови коректної розв'язності задачі у просторах функцій зі степеневою та експоненційною поведінкою коефіцієнтів Фур'є. Уперше для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників задачі Ніколетті. Побудовано приклади задач, які ілюструють наведені результати.

У розділі 5 розглянуто нелокальну двоточкову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними типу Ейлера другого та високого порядків. Отримано умови існування єдиного розв'язку задачі, застосовано метричний підхід для доведення оцінок знизу малих знаменників задачі. Показано, що такі оцінки виконуються для всіх векторів, складених із параметрів задачі, крім множини векторів нульової або малої міри Лебега. Виконання цих оцінок проаналізовано для різних випадків розташування дійсних частин коренів характеристичного рівняння, а також різних випадків розташування вузлів інтерполяції t_0, t_1.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у наступних дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за рештою змінних для систем рівнянь із частинними похідними типу Ейлера, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

Ключові слова: лінійні рівняння з частинними похідними, рівняння типу Ейлера, крайові задачі, умовно коректні задачі, двоточкові умови, багатоточкові умови, умови типу Ніколетті, нелокальні двоточкові умови, ряди Фур'є, проблема малих знаменників, метричний підхід, міра Лебега, дискримінант полінома, крива Веронезе.

Список публікацій за темою дисертації:

1. Ільків, В.С., & Слоньовський, Я.О. (2021). Двоточкова задача для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку типу Ейлера. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.*, 91, 87-98. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.087-098

2. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2022). Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера. *Математичні методи та фізико-механічні поля*, 65(1-2), 65-79.

3. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2022). Метричні оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Прикладні проблеми механіки і математики*, 20, 31-38.

4. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2023). Метричні оцінки визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, 36, 96-100. https://doi.org/10.15407/fmmit2023.36.096

5. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2024). Metric estimates of the characteristic determinant of multipoint problem for an Euler-type equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(5), 678-698. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07209-7

6. Слоньовський, Я.О., & Ільків, В.С. (2021). The two-point problem for Euler type partial differential equation. *III Міжнародна науково-практична Інтернет-конференція «Математика та інформатика у вищій школі:*

виклики сучасності», матеріали конференції, 58–62.

7. Слоньовський, Я.О., & Ільків, В.С. (2021). Двоточкова задача для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку типу Ейлера. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Slonovskyi.pdf

8. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2022). Багатоточкова задача для диференціального рівняння Ейлера високого порядку. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Slonovskyi.pdf

9. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2022). Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера. *Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», тези доповідей*, 34-35.

10. Ільків, В.С., Нитребич, З., Слоньовський, Я О., & Симотюк, М.М. (2022). Multipoint problem for higher-order Euler partial differential equations. *Міжнародна конференція «Equadiff 15», Book of abstracts*, 228.

11. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2023). Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики - 2023», збірник наукових праць*, 373-374.

12. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2023). Задача Ніколетті для безтипного рівняння із частинними похідними. *Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, матеріали міжнародної наукової конференції*, 212.

13. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2024). Нелокальна задача для рівняння Ейлера високого порядку. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Slonovskyi.pdf

ABSTRACT

Slonovskyi Y. O. Boundary value problems for evolution equations with degeneration over a time variable. — On the rights of manuscript.

The thesis for obtaining the Philosophy Doctor (Ph.D.) degree in specialty 111 — «Mathematics», field of study 11 — «Mathematics and Statistics». — Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2025.

The dissertation is devoted to the study of the solvability of non-classical problems with local multipoint conditions, problems with Nicoletti conditions and problems with nonlocal two-point conditions on the selected variable and 2π-periodicity conditions on the remaining variables for a partial differential equation of the Euler type. The interest of researchers in such problems is due both to the need to build a general theory of boundary value problems for partial differential equations and to the fact that local multipoint and nonlocal problems arise in the mathematical description of a number of processes. In the general case, such problems are conditionally well-posed, and the study of their solvability is related to the problem of small denominators. The essence of the small denominator problem is that the coefficients of the Fourier series, which represent the solutions of the problems, contain denominators that can become arbitrarily close to zero for an infinite number of summation indices, which can cause the divergence of the series in the corresponding functional spaces.

Section 1 provides a review of works that are close to the topic of this dissertation. Section 2 describes the general methodology for studying the problems, and provides some auxiliary statements from analysis and number theory.

Section 3 establishes the conditions for the unique solvability of two- and multipoint problems with simple interpolation nodes for the second- and higher-order Euler equations. Conditions for the existence of a unique solution (represented by a Fourier series) of two-point and multipoint problems are established if their input data is sufficiently smooth and the sequences of the corresponding

characteristic determinants admit certain lower estimates. Using the metric approach, it is shown that such lower bounds are satisfied for all vectors whose components are parameters of the problem (equation coefficients, interpolation node values), except, maybe, for the set of vectors of zero or small Lebesgue measure. A special case of a multipoint problem is considered, when its nodes are logarithmically equidistant.

Section 4 of the dissertation is devoted to the study of the Nicoletti problem for partial differential equations of the Euler type. Conditions for the correct solvability of the problem in the spaces of functions with power and exponential behavior of Fourier coefficients are established. For the first time, metric theorems on lower bounds of small denominators of the Nicoletti problem are proved for equations with coefficients that depands on variable t. Examples of problems are constructed that illustrate the results presented.

In Section 5, a nonlocal two-point problem for a differential equation with partial derivatives of the Euler type of the second and higher orders is considered. The conditions for the existence of a unique solution to the problem are obtained, and a metric approach is applied to prove estimates from below for small denominators of the problem. It is shown that such estimates are satisfied for all vectors composed of the parameters of the problem, except for the set of vectors of zero or small Lebesgue measure. The fulfillment of these estimates is analyzed for different cases of the location of the real parts of the roots of the characteristic equation, as well as different cases of the location of the interpolation nodes t_0, t_1.

The results of the dissertation are theoretical in nature. They can be used in further studies of problems with local multipoint conditions, problems with Nicoletti conditions, and problems with nonlocal two-point conditions on a selected variable and 2π-periodicity conditions on the remaining variables for systems of partial differential equations of the Euler type, as well as in the study of specific practical problems that are modeled by the problems under consideration.

Key words: linear partial differential equations, Euler type equations, boundary value problems, conditionally well-posed problems, two-point conditions, multipoint conditions, Nicoletti conditions, nonlocal two-point conditions, Fourier series, problem of small denominator, metric approach, Lebesgue measure, discriminant of a polynomial, Veronese curve.

List of publications on the topic of the thesis:

1. Ilkiv, V.S., & Slonovskyi, Y.O. (2021). The two-point problem for Euler type partial differential equation of the second order. *Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math.*, 91, 87-98. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.087-098

2. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2022). Metric estimates of the characteristic determinant of the multipoint problem for the Euler-type equation. *Mathematical methods and physicomechanical fields*, 65(1-2), 65-79.

3. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2022). Metric estimates of the characteristic determinant of the Nicoletti problem for an Euler-type equation. *Applied problems of mechanics and mathematics*, 20, 31-38.

4. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2023). Metric estimates of the determinant of the Nicoletti problem for an Euler-type equation. *Physico-mathematical modeling and information technologies*, 36, 96-100. https://doi.org/10.15407/fmmit2023.36.096

5. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2024). Metric estimates of the characteristic determinant of multipoint problem for an Euler-type equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(5), 678-698. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07209-7

6. Slonovskyi, Y.O., & Ilkiv, V.S. (2021). The two-point problem for Euler type partial differential equation. *III International Scientific and Practical Internet Conference «Mathematics and Informatics in Higher Education: Challenges of Modernity», Book of materials*, 58–62.

7. Slonovskyi, Y.O., & Ilkiv, V.S. (2021). The two-point problem for Euler type partial differential equation. *The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2021»*.
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Slonovskyi.pdf

8. Slonovskyi, Y.O., Ilkiv, V.S., & Symotiuk, M.M. (2022). Multipoint problem for higher-order Euler partial differential equations. *The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2022»*.
http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Slonovskyi.pdf

9. Slonovskyi, Y.O., Ilkiv, V.S., & Symotiuk, M.M. (2022). Metric estimates of the characteristic determinant of the multipoint problem for the Euler-type equation. *International conference «Theory of Approximation of Functions and its Applications», Book of abstracts*, 34-35.

10. Ilkiv, V.S., Nytrebych, Z., Slonovskyi, Y.O., & Symotiuk, M.M. (2022). Multipoint problem for higher-order Euler partial differential equations *International conference «Equadiff 15», Book of abstracts*, 228.

11. Slonovskyi, Y.O., Ilkiv, V.S., & Symotiuk, M.M. (2023). Estimates of the characteristic determinant of the Nicoletti problem for an Euler-type equation. *International scientific conference «Modern problems of mechanics and mathematics - 2023», Collection of scientific works*, 373-374.

12. Slonovskyi, Y.O., Ilkiv, V.S., & Symotiuk, M.M. (2023). Nikoletti problem for a typeless partial differential equation. *International scientific conference «Mathematics and Information Technologies» dedicated to the 55th anniversary of the Faculty of Mathematics and Informatics, Materials of the international scientific conference*, 212.

13. Slonovskyi, Y.O., Ilkiv, V.S., & Symotiuk, M.M. (2024). A nonlocal problem for the high–order Euler equation. *The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2024»*. http://www.iapmm. lviv.ua/chyt2024/abstracts/Slonovskyi.pdf

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

$\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел,

$\mathbb{Z}$ — множина цілих чисел,

$\mathbb{R}$ — множина дійсних чисел,

$\mathbb{R}_+$ — множина невід'ємних дійсних чисел,

$\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел,

$\mathbb{R}^p$ ($\mathbb{C}^p$) — p-вимірний дійсний (комплексний) простір,

$\mathbb{Z}^p$ ($\mathbb{Z}^p_+$) — множина точок з $\mathbb{R}^p$, які мають цілі (невід'ємні цілі) координати,

Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $p \in \mathbb{N}$, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $[0, 2\pi]^p \subset \mathbb{R}^p$,

$Q^T_p = (0, T) \times \Omega_p$, $T > 0$,

$\Pi^n = \{\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : t_1 < \ldots < t_n\}$,

i — уявна одиниця, $i^2 = -1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$,

$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$,

$\widetilde{k} = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}$,

$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$,

$(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in Q^T_p$,

$|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|$,

$(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p$,

$\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x = \partial/\partial x \equiv (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p)$,

$\partial^s_x = (\partial/\partial x_1)^{s_1} \ldots (\partial/\partial x_p)^{s_p}$, $s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}^p_+$,

$\delta_{j,q}$ — символ Кронекера: $\delta_{j,q} = \begin{cases} 1, & j = q, \\ 0, & j \neq q \end{cases}$,

C^m_n, $1 \leqslant m \leqslant n$, — кількість комбінацій з n елементів по m,

Π_n — група перестановок множини $\{1, \ldots, n\}$,

Π'_n — множина, утворена з множини Π_n вилученням тотожної перестановки

$(1, \ldots, n)$,

$\rho(\pi)$ — степінь (кількість інверсій) перестановки $\pi \in \Pi_n$,

$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A \subset \mathbb{R}^n$,

$\operatorname{mes}_{\mathbb{C}^n} B$ — міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ вимірної множини $B \subset \mathbb{C}^n$,

$\square$ – кінець доведення теореми (леми).

У дисертаційній роботі нумерація сталих C_j ведеться окремо у межах кожного підрозділу.

ВСТУП

Актуальність теми. Задачі зі локальними та нелокальними багатоточковими умовами є важливим напрямком розвитку сучасної теорії крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними. Такі задачі виникають при математичному описі багатьох процесів, зокрема, при моделюванні руху рідин та їх фільтрації у різних середовищах, моделюванні біологічних систем та популяцій, у клітинній біології та біомеханіці, в оптимальному керуванні тощо. У працях Ю. М. Березанського, В. М. Борок, Ю. М. Валіцького, В. І. Горбачук, М. Л. Горбачука, В. В. Городецького, О. О. Дезіна, Ю. А. Дубінського, П. І. Каленюка, І. Я. Кміть, О. В. Мартинюк, А. М. Нахушева, М. І. Матійчука, З. М. Нитребича, І. Д. Пукальського, В. К. Романка, Е. М. Сайдаматова, Л. В. Фардіголи, М. Й. Юрчука та інших авторів досліджені переважно випадки коректно поставлених задач для окремих класів рівнянь із частинними похідними.

Однак багатоточкові та нелокальні задачі для загальних рівнянь із частинними похідними в обмежених областях є, взагалі, некоректними за Адамаром, а питання про їх розв'язність пов'язане з проблемою малих знаменників. У працях Б. Й. Пташника, В. С. Ільківа та їхніх учнів І. О. Бобика, П. Б. Василишина, О. Д. Власія, І. І. Волянської, Т. П. Гоя, Н. М. Задорожної, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, В. М. Поліщук, С. М. Репетило, І. Я. Савки, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, Н. І. Страп, І. Р. Тимківа, В. В. Фіголя, П. І. Штабалюка за допомогою метричного підходу досліджено задачі з багатоточковими та нелокальними умовами для лінійних і слабконелінійних гіперболічних і безтипних рівнянь із частинними похідними, а також для деяких диференціально-операторних рівнянь. Було встановлено метричні оцінки знизу малих знаменників задач, які виникли при побудові розв'язків задач, з яких випливає однозначна розв'язність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів рівнянь та параметрів умов.

Поряд із цим, недостатньо вивченими залишались локальні багатоточкові задачі з простими вузлами інтерполяції, задачі з умовами Ніколетті, нелокальні двоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера. Ця дисертаційна робота присвячена встановленню умов коректності таких задач.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження виконані в рамках науково-дослідних робіт ВМ3 «Крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, теорії функцій та функціонального аналізу, математичне моделювання процесів різної структури» (2016-2020 р., номер державної реєстрації 0116U004101) та ВМ4 «Теоретичні та прикладні аспекти теорії диференціальних рівнянь, теорії функцій, функціонального аналізу та математичного моделювання» (2021-2026 р., номер державної реєстрації 0121U114596).

Мета і задачі дослідження. Встановити умови коректної розв'язності у різних функційних просторах задач з локальними двоточковими і багатоточковими умовами, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за рештою змінних для диференціальних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера. Отримати конструктивні формули розв'язків задач у вигляді рядів Фур'є за системами ортогональних функцій. З'ясувати структуру малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків задач. Застосувати теорію міри і результати метричної теорії чисел для доведення теорем про оцінки знизу цих знаменників.

Об'єкт дослідження: крайові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

Предмет дослідження: умови коректності крайових задач у відповідних функційних просторах, побудова та вивчення властивостей їх розв'язків, оцінки знизу малих знаменників, пов'язаних із крайовими задачами.

Методи дослідження: методи диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, метричної теорії чисел.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі отримано наступні нові результати:

— встановлено умови існування єдиного розв'язку локальних двоточкових і багатоточкових задач, задач з умовами Ніколетті та нелокальних двоточкових задач для еволюційних рівнянь типу Ейлера у функційних просторах, коефіцієнти Фур'є яких мають степеневу або експоненційну поведінку;

— доведено, що такі умови виконуються для всіх векторів, компонентами яких є параметри задачі (коефіцієнти рівнянь, значення вузлів інтерполяції), крім, можливо, множини векторів нульової (малої) міри Лебега;

— для всіх задач, розглянутих у дисертації, побудовано формули для розв'язків задач у вигляді рядів Фур'є за системами ортогональних функцій.

Практичне значення отриманих результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер і є новим вкладом у загальну теорію крайових задач для рівнянь із частинними похідними. Їх можна застосовувати у подальших теоретичних дослідженнях задач з крайовими умовами для рівнянь із частинними похідними та систем таких рівнянь, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові результати дисертаційної роботи отримані автором самостійно. У спільних роботах [29–32, 114] з науковим керівником В. С. Ільківу належать постановки задач, передбачення, перевірка та аналіз отриманих результатів, а у спільних працях [30–32, 114] з М. М. Симотюком співавтору належать ідеї доведення метричних оцінок знизу малих знаменників задач, а Я. О. Слоньовському — огляд, аналіз наукової літератури і побудованих розв'язків, формулювання і доведення основних теорем.

Апробація роботи. Результати дисертації доповідалися, обговорювалися та були оприлюднені на:

— III Міжнародній науково-практичній Інтернет-конференції «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності» (Вінниця, 2021);
— Конференції молодих учених «Підстригачівські читання» (Львів, 2021, 2022, 2024);
— Міжнародній конференції «Equadiff 15» (м. Брно, Чехія, 2022);
— Міжнародній конференції «Теорія наближення функцій та її застосування» (Луцьк, 2022);
— Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки та математики – 2023» (Львів, 2023);
— Міжнародній науковій конференції «Математика та інформаційні технології», присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики (Чернівці, 2023);
— на наукових семінарах кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка» (2021–2024 рр.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в 4 статтях [29–32] у наукових періодичних фахових виданнях України з математики та 1 стаття [114] у виданні, яке включено до міжнародної наукометричної бази SCOPUS. Результати дисертації пройшли апробацію на міжнародних та національних наукових конференціях (8 тез доповідей та матеріалів наукових конференцій [34, 87–93]).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 140 сторінок, основного тексту – 113 сторінок. Список використаних джерел складає 138 найменувань.

РОЗДІЛ 1
ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Важливим напрямком розвитку загальної теорії крайових задач для диференціальних рівнянь є дослідження задач з локальними та нелокальними багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності зі іншими змінними. Такі задачі є узагальненням такої задачі для звичайних диференціальних рівнянь, яку вивчав Я.Д.Тамаркін [96] у наступному формулюванні: знайти розв'язок рівняння

$$L_n(y) \equiv y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = f(t), \tag{1.1}$$

який справджує багатоточкові умови

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m_{i,k}} a_{i,k,j} y^{(k-1)}(t_{i,k,j}) + \int_a^b a_{i,k}(t) y^{(k-1)}(t) dt \right) = \eta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.2}$$

де функції $p_1(t), \ldots, p_n(t), f(t)$ та $a_{i,k}(t)\,(i,k = 1, \ldots, n)$ є сумовними на $[a, b]$; $t_{i,j,k}\,(i,k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m_{ik})$ — точки з $[a, b]$, $m_{i,k} \in \mathbb{N}$, $a_{i,j,k}, \eta_i \in \mathbb{R}$. Припускається, що умови (1.2) є незалежними. У праці [96] отримано умови розв'язності задачі (1.1), (1.2), показано, що з єдиності розв'язку задачі (1.1), (1.2) випливає існування розв'язку цієї задачі, при цьому для розв'язку задачі виконується інтегральне зображення

$$y(x) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

до якого входить функція Гріна $G(t, \tau)$. У праці [96] описано властивості, які однозначно визначають функцію Гріна, а також побудовані явні формули для неї.

Задача (1.1), (1.2) містить важливі часткові випадки, а саме, задачу Коші, локальну дво- і багатоточкову задачу, задачу Ніколетті (див. [117], [40]), нелокальну двоточкову задачу. Для рівняння (1.1) задача Ніколетті полягає у знаходженні такого його розв'язку, для якого виконуються умови

$$y^{(i-1)}(t_i) = \eta_i, \quad t_1 < \ldots < t_n \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для систем рівнянь першого порядку задача Ніколетті полягає у знаходженні такої вектор-функції $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$, для якої справджуються умови

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, \ldots, y_n), \quad y_i(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.3}$$

І.Т.Кігурадзе [40] дослідив задачу (1.3) у сингулярному випадку, коли функції $f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$, не є сумовними за x.

У роботі Валле Пуссена [135] для рівняння (1.1), в якому коефіцієнти $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ — неперервні функції на $[a, b]$, а $f(t) = 0$, розглянуто задачу з багатоточковими умовами

$$y(t_i) = A_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b. \tag{1.4}$$

Доведено, що існує число $h_0 \in (0, b - a]$ (h_0 залежить від n та максимумів на $[a, b]$ модулів коефіцієнтів $p_1(t), \ldots, p_n(t)$), яке володіє наступною властивістю: для довільних точок $t_1 < \ldots < t_n$ з відрізка $[a, b]$ таких, що $t_n - t_1 < h_0$, існує єдиний розв'язок задачі (1.1), (1.4), якими б не були значення A_i, $i = 1, \ldots, n$.

Задачі з багатоточковими умовами для звичайних диференціальних рівнянь досліджено у працях А. Ю. Лучки [46], [47], М. А. Наймарка [52], Д. Пойя [121], Ю. В. Покорного [57], [58], А. М. Самойленка, М. Й. Ронто [79], В. Я. Скоробогатька [85], [86], Ф. Хартмана [113] та інших авторів (див. також бібліографію в [8], [69], [70]), де знайдено умови існування розв'язків задач, вивчено їх властивості, описано методи наближеного розв'язування цих задач.

Аналог задачі (1.2), (1.2) для диференціальних рівнянь із частинними похідними був поставлений професором В. Я. Скоробогатьком у такій формі: знайти в шарі $\mathcal{B}^p = \{(t,x) : 0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x_i < \infty, i = 1,\ldots,p\}$ розв'язок t-гіперболічного рівняння порядку n

$$Q\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = f(t,x), \tag{1.5}$$

для якого виконуються умови

$$u(t_j,x) = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad 0 \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T. \tag{1.6}$$

Задача (1.5), (1.6) має таку фізичну інтерпретацію: якщо рівняння (1.5) описує певний фізичний процес, то задача (1.5), (1.6) полягає у відшуканні цього процесу, коли відомі його стани при n спостереженнях. У випадку однієї просторової змінної задача (1.5), (1.6) має наочну геометричну інтерпретацію: знайти інтегральну поверхню рівняння (1.5), що проходить через n заданих ліній $u = \varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$, які лежать відповідно, у площинах $t = t_j$, $j = 1,\ldots,n$.

Перші дослідження задачі (1.5), (1.6), які провів Б. Й. Пташник, показали [66], [68], [65] (див. також [69], [8]), що ця задача є, взагалі, класично некоректною (навіть при додаткових умовах за змінними $x_1,\ldots,x_p$), а її розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників. Суть проблеми малих знаменників полягає у тому, що розв'язки задач, які зображуються рядами, містять нескінченну кількість членів, знаменники яких можуть ставати як завгодно близькими до нуля, що спричиняє розбіжність цих рядів. З проблемою малих знаменників вчені зустрілися ще у XVII столітті [22, 23] при дослідженні диференціальних рівнянь, що описують рух планетних і супутникових систем в гравітаційних полях.

Для розв'язання проблеми малих знаменників ефективним виявився метричний підхід, використаний у 1939 році Д. Боржином і Р. Даффіном [109] при дослідженні задачі Діріхле для рівнянь коливання струни, а у 1942 році — К. Зігелем [129] при дослідженні задачі про стійкість особливої точки типу центр. У 1953–1954 рр. А. Н. Колмогоров [43] запропонував метричну концепцію і застосував її до задачі про рух на торі і в теорії динамічних систем. ідея метричного підходу полягає у наступному:

1) використовувся той факт, що малі знаменники (які у вказаних задачах мали вигляд лінійних форм $(\omega, k) = \omega_1 k_1 + \ldots + \omega_p k_p$, $\omega \in \mathbb{R}^p$, $k \in \mathbb{Z}^p$) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів ω задовольняють оцінки

$$|(\omega, k)| \geqslant C\|k\|^{-\delta}, \quad C > 0,\, \delta > 0; \tag{1.7}$$

2) аналіз збіжності нескінченних рядів з малими знаменниками проводився не всіх векторів ω, а лише для тих, що задовольняють оцінки (1.7).

У роботах Б. Й. Пташника, П. Б. Василишина, І. І. Волянської, В. С. Ільківа, І. С. Клюс, Л. І. Комарницької, І. Я. Савки, Б. О. Салиги, Л. П. Силюги, М. М. Симотюка, Н. І. Страп, І. Р. Тимківа, В. В. Фіголя, П. І. Штабалюка на основі метричного підходу досліджено задачі з локальними та нелокальними багатоточковими умовами за виділено змінною t та певними умовами (умови періодичності, умови типу умов Діріхле) за просторовими змінними для лінійних гіперболічних, параболічних і безтипних рівнянь та систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, для окремих класів рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, а також для деяких диференціально-операторних рівнянь. За допомогою методк Фур'є побудовано розв'язки розглядуваних задач та встановлено умови їх однозначної розв'язності в різних функційних просторах. На основі результатів та методів метричної теорії чисел, розроблених В. І. Спринджуком, і його учнями [7, 94, 95], отриманих в сумісних роботах В. І. Берніка та Б. Й. Пташника [6], доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язків задач. Із цих теорем випливає однозначна роз'язність розглядуваних задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компоненти яких виражаються через параметри областей і коефіцієнти рівнянь та крайових умов.

Єдиність розв'язку нелокальної багатоточкової крайової задачі у нескінченому шарі для лінійної системи рівнянь з частиними похідними зі сталими коефіцієнтами вивчалася у роботах І. І. Антипко і М. А. Перельман [3, 4], де розглянуто наступну задачу:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^p,\, t \in [T_0, T], \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{l} a_{i,k+(q-1)n} u_k(T_q, x) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.9}$$

де

$$u(t,x) = \{u_1(t,x), \dots, u_n(t,x)\},\, T_0 \leqslant T_1 < T_2 < \dots < T_l \leqslant T,\, l \geqslant 1,$$

$P(\partial/\partial x)$ — матриця, елементами якої є поліноми від $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p$ зі сталими (комплексними) коефіцієнами. Ранг матриці $A = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n;\\ j=1,\dots,nl}}$ дорівнює n. Знайдено умови на поведінку розв'язку $u(t,x)$, за яких при $\|x\| \to \infty$ задача (1.8), (1.9) має лише тривіальний розв'язок.

Подібні питання у випадку багатоточкової задачі для системи (1.8) з локальними крайовими умовами

$$u_{i_k}(T_1, x) = 0, k = 1, \dots, n_1,\, n_1 \geqslant 1; u_{j_k}(T_2, x) = 0, k = 1, \dots, n_2, n_2 \geqslant 1; \dots;$$

$$u_{l_k}(T_l, x) = 0,\, k = 1, \dots, n_l,\, n_l \geqslant 1;\, l \geqslant 1, n_1 + \dots + n_l = n,$$

досліджено в роботі В. М. Борок і М. А. Перельман [12].

У праці [13] у смузі $\Pi_T = \mathbb{R} \times [0, T]$ для рівняння вигляду (1.8) і задачі з умовами

$$\sum_{k=0}^{N} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t_k, x) = u_0(x), \quad 0 \leqslant t_0 < t_1 < \dots < t_N \leqslant T, \tag{1.10}$$

де де $P(\sigma)$, $Q(\sigma)$ — довільні комплексні поліноми, встановлено умови регулярності (коли з єдиності розв'язку задачі в класі обмежених (гладких) функцій випливає її коректна розв'язність в цьому класі) даної задачі.

Ці результати було узагальнено у [20] на випадок багатоточкової задачі (1.10) для навантаженого рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) + \sum_{k=0}^{n} Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t_k,x) +$$

$$+\sum_{l=0}^{n} R_l\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t_l,x) + \sum_{m=0}^{n} S_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t_m,x).$$

Показано, що коректність досліджуваної задачі залежить від арифметичної природи точок $t_1, \ldots, t_n$ і не залежить (на відміну задачі Коші) від алгебраїчних властивостей полінома P.

У роботах П.І.Каленюка, З.М.Нитребича, Я.О.Баранецького, Я.М.Плешівського, І.С.Клюс [38], [35], [37], [39], [41] за допомогою диференціально-символьного методу досліджено задачі з багатоточковими умовами у безмежному шарі для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними. Встановлено класи існування та класи єдиності розв'язків розглядуваних задач. У цих класах для розв'язків задач побудовані явні формули у вигляді результату дії певних функціоналів на мероморфні функції, побудовані за виглядом оператора рівняння та крайових умов.

У роботах З.М.Нитребича [53, 55] проведено і обгрунтовано процедуру граничного переходу від розв'язку багатоточкової задачі для рівняння з частинними похідними до розв'язку задачі Коші для цього ж рівняння.

У роботах П.Бассаніні [106], П.Пуччі [127], Л.Чезарі [110] для систем квазілінійних гіперболічних рівнянь

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x,y,z)\frac{\partial z_i}{\partial y_k} = f_i(x,y,z), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.11}$$

і

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}(x,y,z)\left(\frac{\partial z_j}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} \rho_{ik}(x,y,z)\frac{\partial z_j}{\partial y_k}\right) = f_i(x,y,z), \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.12}$$

де $z \equiv z(x,y) = (z_1(x,y),\ldots,z_m(x,y))$, $x \in [0,a]$, $y \in \mathbb{R}^r$, досліджено задачі з багатоточковими умовами

$$z_i(a_i,y) = \psi_i(y), \quad i = 1,\ldots,m, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant a,$$

або

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij}(y) z_j(a_i,y) = \psi_i(y), \quad i = 1,\ldots,m, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant a.$$

За певних умов на функції ρ_{ik}, A_{ij}, c_{ij}, f_i, ψ_i за допомогою теореми Банаха про нерухому точку доведено існування, єдиність і неперервну залежність від функцій ψ_i, $i = 1,\ldots,m$, розв'язків розглядуваних задач у класі функцій, що задовольняють умову Ліпшиця за змінною y.

У роботі [127] для систем рівнянь (1.11), (1.12) досліджена задача з більш загальними умовами

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{N} b_{ijs}(y) z_j(a_s,y) = \psi_i(y), \quad i = 1,\ldots,m, \quad N > 1, \tag{1.13}$$

а в [106] наведено наближений метод розв'язування задачі (1.11), (1.13).

Для диференціально-операторних рівнянь задачі зі багатоточковими умовами вивчалися в роботах С.А.Абдо, М.Й.Юрчука [1, 2], Ю.М.Валіцького [19], [17]– [15], [132], О.О.Дезіна [24, 25], В.К.Романка [75]– [73]. У роботі [19] в банаховому просторі досліджено коректність 4-точкової задачі:

$$\frac{d^4u(t)}{dt^4} = Au(t),$$

$$u(t_i) = \varphi_i, \quad i = 1,\ldots,4, \quad t_1 < t_2 < t_3 < t_4,$$

де A — лінійний замкнений оператор. Встановлено умови розв'язності задачі, які виражаються в термінах властивостей спектра оператора $A^{1/4}$.

У працях [17]– [14], [132] у гільбертовому просторі H вивчалась задача

$$\frac{d^nU}{dt^n} + A_1\frac{d^{n-1}U}{dt^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}\frac{dU}{dt} + A_nU = 0,$$

$$U(t_i) = \Phi_i, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} = T,$$

A_i, $i=1,\dots,n$ — лінійні (взагалі, необмежені) оператори в H, які мають спільне спектральне зображення, Φ_i, $i=1,\dots,n$, — задані елементи простору H, $U(t)$ — шукана функція, яка набуває значень в просторі H. Якщо точки $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ рівновіддалені, а рівняння

$$x^n + \lambda_m^{(1)} x^{n-1} + \ldots + \lambda_m^{(n-1)} x + \lambda_m^{(n)} = 0,$$

де $\lambda_m^{(i)}$, $i=1,\dots,n$, $m=1,2,\dots$ — власні значення операторів A_i відповідно, має лише дійсні корені $x_1,\dots,x_n$, в роботі [16] одержані оцінки умовної коректності задачі. У [14] це обмеження було послаблене нерівністю $|(x_k - x_l)t_1 - 2\pi p i| \geqslant \delta$, яка повинна справджуватись для будь-якого цілого p. У роботі [15] отримано узагальнення цих результатів на випадок багатоточкових умов з кратними вузлами

$$U(t_1) = \Phi_0^{(1)}, \dots, U^{(k_1)}(t_1) = \Phi_{k_1}^{(1)}, \dots, U(t_l) = \Phi_0^{(l)}, \dots, U^{(k_l)}(t_l) = \Phi_{k_l}^{(l)},$$

де $t_1 < \ldots < t_l$, $k_1 + 1 + k_2 + 1 + \ldots + k_l + 1 = n$.

О.О.Дезін [25] вказав на доцільність використання нелокальних багатоточкових умов для опису розв'язних розширень диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. У роботі [24] розглянуто операторне рівняння другого порядку

$$Lu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial}{\partial t} - A\right) u(t) = f(t), \quad t \in (0,b),$$

де A, B — комутуючі з $\frac{\partial}{\partial t}$ оператори, породжені диференціальними операціями за змінною x зі сталими коефіцієнтами на n-вимірному торі. Вивчено залежність характеру розв'язності рівняння від поведінки символів операцій і вигляду крайових умов.

А. Х. Мамян [49] встановив, що існують такі диференціальні рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної задачі; водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

У роботах В.К.Романка [75]– [73] встановлено, що для опису правильних операторів, породжених у відповідному функційному гільбертовому просторі операцією $\left(\frac{\partial^m}{\partial t^m} - A\right)$, де $m \geqslant 2$, A — диференціальний оператор на n-вимірному торі, можна використовувати локальні двоточкові умови

$$\frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} = 0, \quad j = 1, \ldots, k_0, \qquad \frac{\partial^{q-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=1} = 0, \quad q = 1, \ldots, k_1,$$

та нелокальні двоточкові умови

$$a_j \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} + b_j \frac{\partial^{j-1}u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=1} = 0, \quad j = 1, \ldots, m,$$

де $k_0 + k_1 = m$, a_j, b_j, $j = 1, \ldots, m$, — комплексні параметри.

Для параболічних рівнянь нелокальні багатоточкові задачі вивчалися в роботах В.П.Лавренчука [45], М.І.Матійчука [50].

У роботах Б.Й. Пташника, В.С. Ільківа, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук, Б.О. Салиги [27, 70], Е.М. Сайдаматова [78], С.Р. Умарова [97] одержані умови існування та єдиності розв'язків локальних та нелокальних багатоточкових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем рівнянь. У цих роботах використані результати праці Ю.О.Дубінського [26], в якій розроблено методи дослідження псевдодиференціальних операторів, визначеними в довільній області з $\mathbb{R}^n$.

У роботі [44] Л. І. Корбута та М. І. Матійчука за допомогою перетворення Фур'є в шарі $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ знайдено розв'язок двоточкової нелокальної задачі

$$\partial_t u(t, x) = \triangle_x u(t, x) + f(t, x),$$

$$\mu\, u(t, x)|_{t=0} = u(t, x)|_{t=T} + \varphi(x), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

В. М. Лучко розглянув у шарі $(0, T) \times \mathbb{R}^n$ задачу для параболічного рівняння вищого порядку з нелокальними умовами

$$\partial_t^j u(t, x)|_{t=0} - \mu \partial_t^j u(t, x)|_{t=T} = \varphi_j(x), \qquad j = 1, \ldots, m.$$

За допомогою методу Фур'є доведено існування і встановлено оцінки класичного розв'язку у всьому просторі [48].

Для рівняння з виродженням

$$y^m u_{xx} - u_y y - b^2 y^m u = 0$$

у прямокутнику $\{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < T\}$, де $m > 0$, $b \geqslant 0$, $T > 0$, методом спектрального аналізу доведено [77] теореми єдиності та існування розв'язку задачі з початковими умовами

$$u(x, 0) = \tau(x), \qquad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad x \in [0, 1],$$

і нелокальними умовами

$$u(0, y) = u(1, y), \qquad u_x(0, y) = 0$$

або

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \qquad u(1, y) = 0$$

при $y \in [0, T]$. Розв'язки до задач побудовано у вигляді суми біортогонального ряду.

Для рівняння мішаного типу

$$(1 - \operatorname{sgn} t)u_{tt} + (1 - \operatorname{sgn} t)u_t = 2u_{xx}$$

в області $\{(x, t) \mid 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, де α, β — задані додатні числа, у роботі [76] вивчена задача з умовами

$$u(0, t) = u(1, t) = 0,\ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta, \quad u(x, -\alpha) - u(x, \beta) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Встановлено критерій єдиності розв'язку, який побудований у вигляді суми ряду Фур'є, а також стійкість розв'язку за нелокальною умовою $\varphi(x)$.

У статті [11] В. М. Борок та Л. В. Фардігола досліджено задачу для безтипного диференціального рівняння

$$\partial u(x, y)/\partial y = P(\partial/\partial x)u(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times [0, b],$$

де $P(\sigma) = P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ — довільний поліном з комплексними коефіцієнтами, з нелокальною умовою

$$Au(x,0) - u(x,b) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A \neq 0.$$

Для коректності задачі встановлено необхідний та достатній критерій у вигляді виконання умови $A - e^{bP(i\sigma)} \neq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$.

Задачі з нелокальними багатоточковими умовами

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{|s| \leqslant N} b_{\hat{s}}^{j,m} \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}} \bigg|_{t=t_j} = \varphi_m(x),$$
$$m \in \{1, \dots, n\},\ 0 = t_1 < \dots < t_M = T,$$

в області Q_p^T для безтипних рівнянь і систем таких рівнянь досліджено в [70, §14]. Тут вперше розглянуто випадок (для рівнянь зі сталими коефіцієнтами), коли вектор, складений із коефіцієнтів рівняння, належить до деякого алгебричного многовиду, причому розв'язність задачі доведено для майже всіх многовидів.

У [70] розглянуто нелокальну задачу

$$L\big(\partial_t, \partial_x\big) u \equiv \partial_t^n - \sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x) \partial_t^{n-j} u = 0, \quad u = u(t,x),\ (t,x) \in Q_p^T, \quad (1.14)$$

$$\nu \partial_t^j u\big|_{t=0} - \mu \partial_t^j u\big|_{t=T} = \varphi_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad \varphi_j = \varphi_j(x),\ x \in \Omega_p, \ (1.15)$$

де $n \geqslant 1$, $\nu, \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $A_j(\partial_x) = \sum\limits_{|s| \leqslant j} A_{n-j,s} \partial_x^s$, $A_{n-j,s}$ — комплекснозначні матриці порядку m, $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jm})$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, — задані, а $u = (u_1, \dots, u_m)$ — шукана вектор-функції. Для розв'язання проблеми малих знаменників використано метричний підхід; при цьому вважалось (без обмеження загальності), що вектор (ν, μ) належить одиничній кулі $B^4 \subset \mathbb{R}^4$ із центром у початку координат. Для всіх векторів $(\nu, \mu) \in B^4 \setminus B_\varepsilon$, де $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^4} B_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, встановлено існування єдиного розв'язку.

Наведений огляд вказує на різноманітність напрямків дослідження задач з локальними багатоточковими умовами, умовами Ніколетті та локальними двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними. Незважаючи на це, недостатньо вивченими є локальні багатоточкові задачі та нелокальні двоточкові задачі для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера, результати дисертаційної роботи заповнюють ці прогалини.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У першому розділі дисертації наведено огляд результатів дослідження багатоточкових і нелокальних задач для рівнянь із частинними похідними, систем таких рівнянь та диференціально-операторних рівнянь. Детальніше висвітлено роботи, які є близькими до тематики дисертації. Вказано на ті питання, які потребують глибшого дослідження.

РОЗДІЛ 2
ЗАГАЛЬНА МЕТОДИКА ТА ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

У розділі наведено спрощену схему досліджень крайових задач з багатоточковими та нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними, розглянутих у дисертації, а також описані допоміжні твердження з теорії диференціальних рівнянь, теорії чисел, теорії функцій, використаних при вивченні цих задач.

2.1. Простори функцій та їхні норми

$C^n([a,b];\mathbb{R})$ ($C^n([a,b];\mathbb{C})$) — простір n разів неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($f:[a,b]\to\mathbb{C}$) з нормою

$$\|f;C^n([a,b];\mathbb{R})\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[a,b]}|f^{(j)}(t)| \ \left(\|f;C^n([a,b];\mathbb{C})\| = \sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[a,b]}|f^{(j)}(t)|\right);$$

$\mathcal{T}_n$ — простір тригонометричних поліномів степеня n, $n\in\mathbb{Z}_+$:

$$\mathcal{T}_n = \left\{\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p,\ |k|\leqslant n}\varphi_k\exp(ik,x) : \varphi_k\in\mathbb{C}, |k|\leqslant n\right\};$$

$\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{T}_n$ — простір тригонометричних поліномів скінченного степеня, збіжність у якому визначається таким чином [21]: послідовність

$$\left\{\varphi^m(x) = \sum_k \varphi_k^m\exp(ik,x);\quad m\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{T}$$

збігається до $\varphi(x)=\sum_k\varphi_k\exp(ik,x)\in\mathcal{T}$, якщо:

1) існує $N\in\mathbb{N}$ таке, що $\varphi^m(x)\in\mathcal{T}_N$ для всіх $m\in\mathbb{N}$,

2) для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ $\exists\lim\limits_{m\to\infty}\varphi_k^m=\varphi_k$;

$\mathcal{T}'$ — простір антилінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{T}$ зі слабкою збіжністю, який співпадає з простором формальних тригонометричних рядів [21];

$C^n([0,T];\mathcal{T})$ $(C^n([0,T];\mathcal{T}'))$ — простір функцій $u(t,x)$, n раз неперервно диференційовних за t, і таких, що при кожному фіксованому $t \in [0,T]$ $\partial_t^j u \in \mathcal{T}\ (\mathcal{T}')$, $j = 0,1,\dots,n$;

$H(\tau_k)$ (де $(\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ — послідовність додатних дійсних чисел) — гільбертів простір усіх формальних тригонометричних рядів

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k \exp(ik,x), \quad \varphi_k \in \mathbb{C},$$

для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(x); H(\tau_k)\| = \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |\varphi_k|^2 \tau_k^2\Big)^{1/2},$$

породжена скалярним добутком

$$(\varphi(x),\psi(x))_{H(\tau_k)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_k \overline{\psi}_k \tau_k^2,$$

$C^n([a,b];\ H(\tau_k))$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(ik,x), \quad u_k(t) \in C^n[a,b],$$

зі скінченною нормою

$$\|u; C^n([a,b]; H(\tau_k))\| = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \left\|(t\partial_t)^j u(t,\cdot); H(\tau_k)\right\|;$$

$\Phi_{q,g}$ (де $q \in \mathbb{R}$, $g > 0$) — простір $H(\tau_k)$, якщо $\tau_k = \tilde{k}^q g^{\tilde{k}}$;

$U^n_{q,G}$ (де $n \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{R}$, $G(t) \in C([a,b];\mathbb{R})$ — невід'ємна функція) — банаховий простір функцій

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(ik,x), \quad u_k(t) \in C^n([a,b];\mathbb{C}),$$

зі скінченною нормою

$$\|u\|_{n,q,G} = \sum_{r=0}^{n} \max_{t\in[a,b]} \|t^r \partial_t^r u(t,\cdot)\|_{q-r,G(t)}.$$

2.2. Загальна схема досліджень задач дисертації

Усі задачі, розглянуті в дисертації, можна об'єднати тиаким спільним формулюванням: знайти в області Q_p^T розв'язок $u(t,x)$ рівняння типу Ейлера

$$\big(t\partial_t\big)^n u(t,x)+\sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\big(t\partial_t\big)^{n-j}u(t,x)=0, \qquad (t,x)\in(t_0^*,t_1^*)\times\Omega_{2\pi}^p, \quad (2.1)$$

де

$$A_j(\partial_x)=\sum_{|s|\leqslant j} a_{n-j,s}\partial_x^s=\sum_{|s|\leqslant j} a_{n-j,s}\partial_{x_1}^{s_1}\dots\partial_{x_p}^{s_p}, \quad a_{s_0,s}\in\mathbb{C}, \qquad (2.2)$$

який справджує умови

$$V_j[u(t,x)]=\varphi_j(x), \quad j=1,\dots,n, \quad x\in\Omega_{2\pi}^p, \qquad (2.3)$$

де

$$\varphi_j(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_{jk}\exp(ik,x)\in\mathcal{T}', \quad j=1,\dots,n.$$

Умови (2.3) мають вигляд багатоточкових умов

$$V_j[u(t,x)]=u(t_j,x), \quad j=1,\dots,n,\ t_1<\dots<t_n \quad x\in\Omega_{2\pi}^p, \qquad (2.4)$$

умов Ніколетті

$$V_j[u(t,x)]=(t\partial_t)^{j-1}u(t,x)\big|_{t=t_j}, \quad j=1,\dots,n, \quad x\in\Omega_{2\pi}^p, \qquad (2.5)$$

чи нелокальних двоточкових умов

$$V_j[u(t,x)]=\mu_0\partial_t^{j-1}u(t_0,x)+\mu_1\partial_t^{j-1}u(t_1,x), \quad j=1,\dots,n, \quad x\in\Omega_{2\pi}^p. \qquad (2.6)$$

Означення 2.1 . Розв'язком задачі (2.1), (2.3) з простору $C^n([t_0^*,t_1^*],\mathcal{T}')$ називаємо ряд

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(ik,x) \qquad (2.7)$$

де кожен із коефіцієнтів Фур'є $u_k(t)\in C^n[t_0^*,t_1^*]$ є розв'язком задачі

$$\big(td_t\big)^n u_k(t)+\sum_{j=1}^{n}A_j(ik)\big(td_t\big)^{n-j}u_k(t)=0, \quad t\in(t_0^*,t_1^*), \qquad (2.8)$$

$$V_j[u_k(t)]=\varphi_{jk}, \quad j=1,\dots,n. \qquad (2.9)$$

Нехай функції $y_q(t,k)$, $q=1,\dots,n$, утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (2.8). Позначимо:

$$\Delta_n(k) = \det \|V_j[y_q(t,k)]\|_{j,q=1}^{n}\,, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{2.10}$$

Умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta_n(k) \neq 0 \tag{2.11}$$

є необхідною й достатньою умовою для існування єдиного розв'язку задачі (2.1), (2.3) в просторі $C^n([t_0^*, t_1^*], \mathcal{T}')$. Цей розв'язок зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta_n(k)} \varphi_{jk}\, y_q(t,k) e^{(ik,x)}, \tag{2.12}$$

де $\Delta_{jq}(k)$ — алгебричне доповнення елемента $V_j[y_q(t,k)]$ визначника $\Delta_n(k)$.

Існування розв'язку (2.12) у шкалі просторів $C^n([t_0^*, t_1^*], H(\tau_k))$, де (τ_k) — деяка вагова послідовність, пов'язана із гладкістю правих частин в умовах (2.3) та проблемою малих знаменників, оскільки визначники $\Delta_n(k)$ можуть ставати близькими до нуля для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$.

Для того щоб забезпечити збіжність вказаних рядів у шкалах просторів $C^n([t_0^*, t_1^*], H(\tau_k))$ у теоремах існування на малі знаменники накладено аксіоматичні оцінки знизу, а праві частини в умовах (2.3) вибрано з просторів, гладкість яких узгоджується з цими оцінками.

Важливим завданням дисертації є з'ясування можливості виконання згаданих оцінок знизу для малих знаменників. У результаті використання метричного підходу встановлено, що оцінки знизу для малих знаменників виконуються для майже всіх параметрів задачі — коефіцієнтів рівняння, нелокальних умов і значень вузлів інтерполяції.

Характерним наслідком із доведених метричних теорем про оцінки знизу малих знаменників та теорем існування є результати про однозначну розв'язність (у відповідній шкалі просторів) багатоточкових і нелокальних задач для майже всіх їхніх параметрів.

2.3. Апроксимація дійсних чисел раціональними дробами

Надалі нам знадобляться такі твердження про апроксимацію дійсних чисел раціональними дробами.

Теорема 2.1 (Ліувіль) . *Якщо α — ірраціональне алгебричне число степеня $n \geqslant 2$, то існує стала $c(\alpha) > 0$ така, що для всіх раціональних чисел m/k виконується нерівність*

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| \geqslant \frac{c(\alpha)}{|k|^n}.$$

Теорема 2.2 (Рот) . *Нехай α — дійсне алгебричне число степеня $d \geqslant 2$. Тоді для довільного $\delta > 0$ нерівність*

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| < \frac{1}{|k|^{2+\delta}}$$

має тільки скінченну кількість розв'язків у раціональних числах m/k.

Теорема 2.3 (Хінчин) . *Для довільної додатної функції $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ існує таке ірраціональне число α_0, що нерівність*

$$\left|\alpha_0 - \frac{m}{k}\right| < \varphi(k)$$

виконується для нескінченної кількості чисел $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Теорема 2.4 (Борель) . *Для кожного $\delta > 0$ множина тих дійсних чисел α, для яких нерівність*

$$\left|\alpha - \frac{m}{k}\right| \leqslant \frac{1}{|k|^{2+\delta}}$$

виконується для нескінченної кількості раціональних чисел m/k має лебегову міру нуль.

Теорема 2.5 (Лема Бореля–Кантеллі [95]) . *Нехай $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — послідовність вимірних (за мірою Лебега в $\mathbb{R}^n$) множин з $\mathbb{R}^n$ таких, що*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A_k < \infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин даної послідовності, дорівнює нулю.

Доведення теорем 1-4 та леми Бореля–Кантеллі містяться в [99, с. 48], [7, 100–102].

2.4. Допоміжні твердження та леми

Наведемо результати, які використовуються при дослідженні оцінок знизу малих знаменників.

Лема 2.1 . *На відрізку* $[0, 1/2]$ *виконуються нерівності*

$$\sin x > 1 - e^{-x} > 3x/4.$$

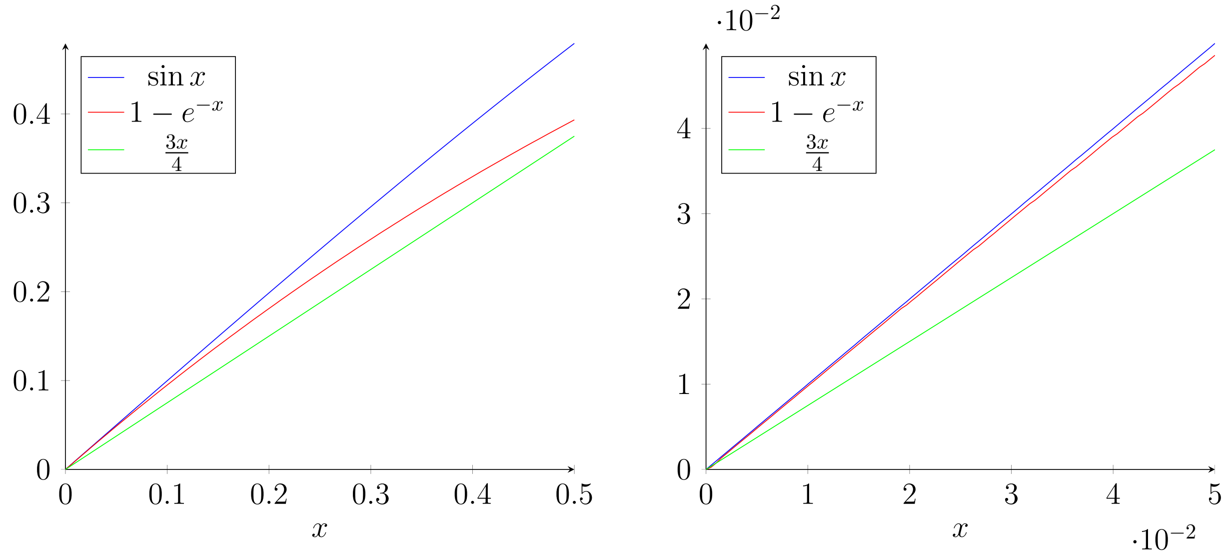

Рис. 2.1: Образи півкруга без прямокутників при відображенні $w = e^z$.

Доведення. Ці нерівності випливають з формули Маклорена:

$$\sin x - (1 - e^{-x}) = \frac{x^2}{2} + \frac{e^{-\theta x} + \sin\theta x}{24}x^4 > \frac{x^2}{3} \geqslant 0,$$

$$1 - e^{-x} - \frac{3}{4}x = \left(x - e^{-\theta x}\frac{x^2}{2}\right) - \frac{3}{4}x > \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2} = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right) \geqslant 0,$$

де $\theta = \theta(x)$ належить інтервалу $(0, 1)$. $\square$

Лема 2.2 . *Нехай* $\varepsilon > 0$ *— додатне дійсне число, а комплексне число* z *є таким, що* $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ *і для всіх* $m \in \mathbb{Z}$ *виконуються нерівності*

$$|z - 2\pi i m| > \sqrt{2} \cdot \varepsilon. \tag{2.13}$$

Тоді для цього числа z *виконуються такі оцінки:*

$$|1 - e^z| \geqslant \begin{cases} \frac{3}{8}, & \text{якщо } \varepsilon \geqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}\varepsilon, & \text{якщо } \varepsilon < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Доведення. Розглянемо випадок $\varepsilon < 1/2$. Введемо прямокутники

$$R_m(\varepsilon) = \{z = x + iy\colon (x, y) \in [-\varepsilon, 0] \times [-\varepsilon + 2\pi m, \varepsilon + 2\pi m]\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

що містять точки $2\pi i m$ на стороні $\{z = x + iy : \ x = 0, \ -\varepsilon + 2\pi m \leqslant y \leqslant \varepsilon + 2\pi m\}$ (див. рисунок 2.2.1). Оскільки для числа $z = u + iv$, $u = \operatorname{Re} z$, $v = \operatorname{Im} z$ виконуються (згідно з умовою леми) оцінки (2.13), то $z \notin \cup_{m \in \mathbb{Z}} R_m$. Справді, якщо припустити протилежне, тобто що існує $m_0 \in \mathbb{Z}$ таке, що $z \in R_{m_0}$, то це означало б, що $-\varepsilon \leqslant u \leqslant 0$ і $-\varepsilon + 2\pi m_0 \leqslant v \leqslant \varepsilon + 2\pi m_0$, тобто

$$\begin{cases} -\varepsilon \leqslant u \leqslant 0, \\ -\varepsilon \leqslant v - 2\, i m_0 \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

а, отже, $u^2 + (v - 2\pi m_0)^2 \leqslant 2\varepsilon^2$, що рівносильно умові $|u + iv - 2\pi i m_0| \leqslant \sqrt{2}\varepsilon$, що рівносильно $|z - 2\pi i m_0| \leqslant \sqrt{2}\varepsilon$, що суперечить умові (2.13).

При відображенні $w = e^z$ прямокутники R_m переходять у множину

$$M_\varepsilon = \{w = \rho e^{i\varphi} : \ e^{-\varepsilon} \leqslant \rho \leqslant 1, \ -\varepsilon \leqslant \varphi \leqslant \varepsilon\}.$$

Множина M_ε – (див. рисунок 2.2.2) це частина кільця між колами $|w| = e^{-\varepsilon}$, $|w| = 1$ і променями $\arg w = \pm\varepsilon$.

Для довільної точки $z \notin \bigcup_m R_m$ півкруга справджується нерівність

$$|1 - e^z| \geqslant 1 - e^{-\varepsilon} > \frac{3}{4}\varepsilon.$$

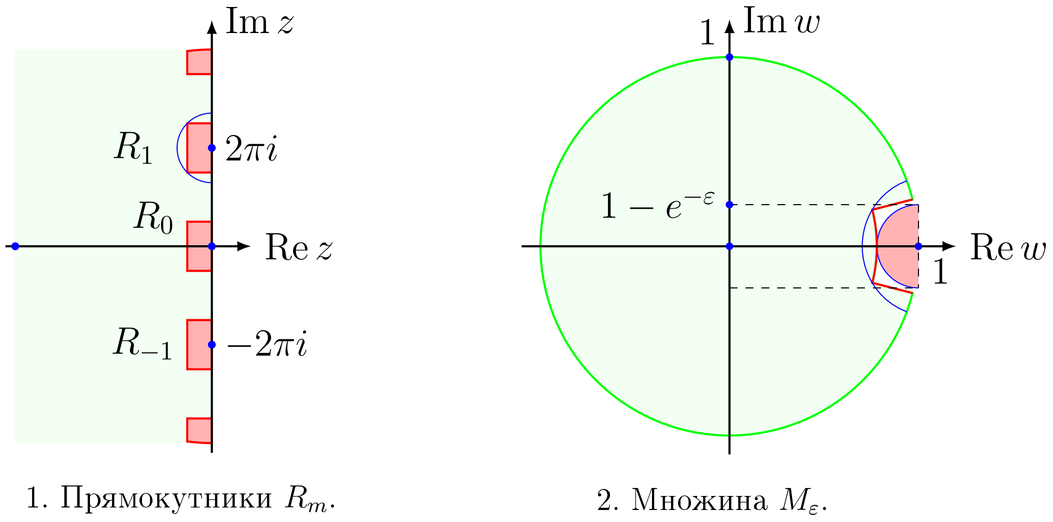

Рис. 2.2: Образи півкруга без прямокутників при відображенні $w = e^z$.

Справді, відстань від одиниці до точок $e^{-\varepsilon} \cdot e^{i\varphi}$ дуги $|\arg z| \leqslant \varepsilon$ на колі $|z| = e^{-\varepsilon}$ не менша ніж $1 - e^{-\varepsilon}$, оскільки

$$|1 - e^{i\varphi - \varepsilon}|^2 = \left(1 - e^{-\varepsilon}\cos\varphi\right)^2 + e^{-2\varepsilon}\sin^2\varphi \geqslant \left(1 - e^{-\varepsilon}\cos\varphi\right)^2 \geqslant \left(1 - e^{-\varepsilon}\right)^2.$$

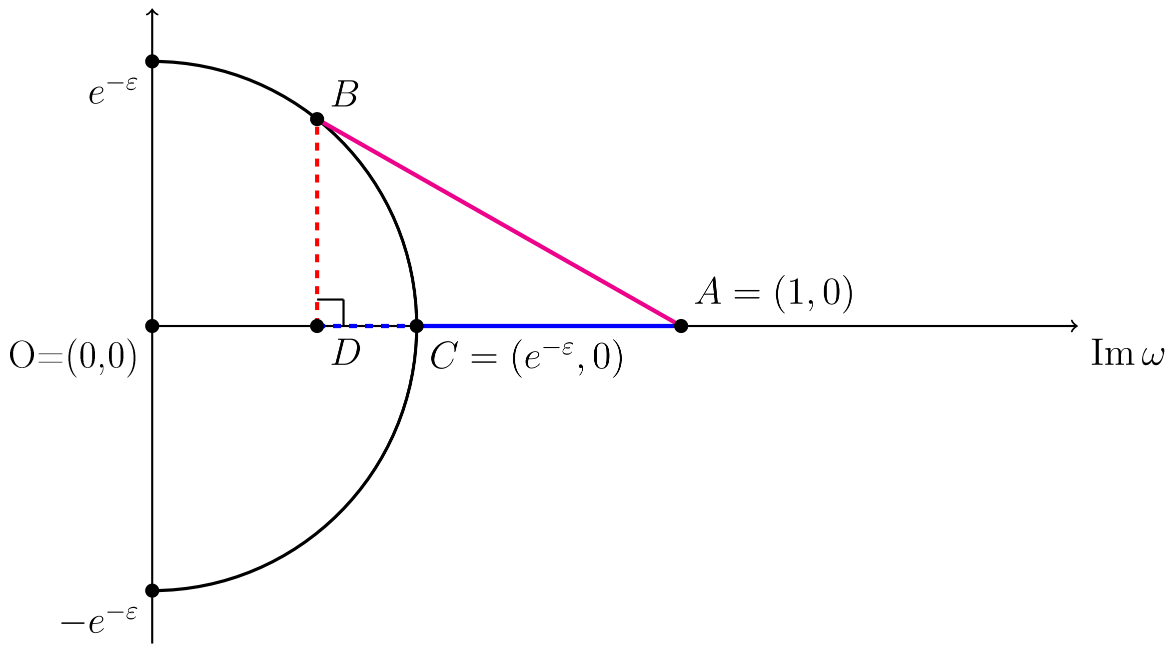

Рис. 2.3: Відстань до точки на дузі кола.

Остання нерівність є відображенням того факту, що $AB \geqslant AC$ (див. рисунок 2.3). Справді, будь-яка точка дуги півкола, спроєктована на вісь

$\operatorname{Im} z$, лежатиме на радіусі OC, утворюючи прямокутний трикутник ABD з катетом AD і гіпотенузою AB, тому $AB \geqslant AC$.

Відстань від одиниці до точок $|z|e^{\pm i\varepsilon}$ відрізка $1 - e^{-\varepsilon} \leqslant |z| \leqslant 1$ обох променів $\arg z = \pm\varepsilon$ не менша, ніж відстань до прямих $y = \pm \operatorname{tg} \varepsilon \cdot x$ відповідно, яка є однаковою і дорівнює $\sin \varepsilon$.

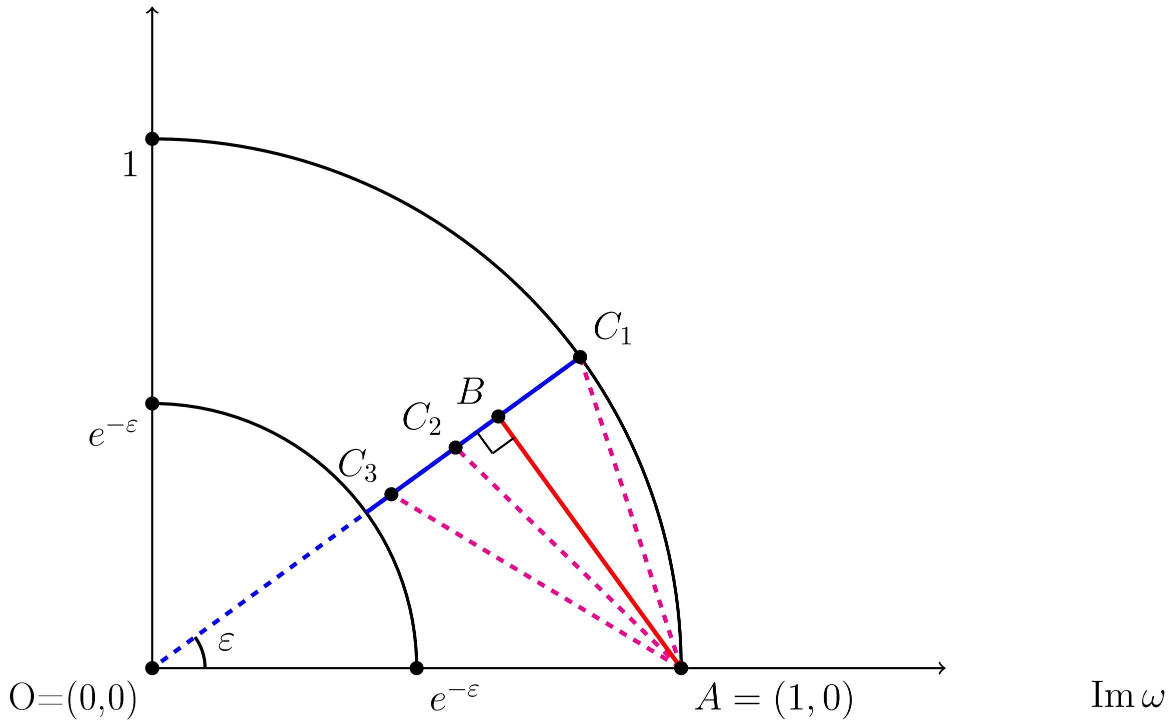

Рис. 2.4: Відстань до променів $\arg \omega = \pm\varepsilon$.

Справді, відстань від точки A до будь-якої точки C_1, C_2, C_3 променя $\arg z = \varepsilon$ не перевищує опущений на промінь перпендикуляр AB. Довжина AB знаходиться як довжина катета навпроти кута ε у прямокутному трикутнику з гіпотенузою OA довжиною 1, тобто дорівнює $\sin \varepsilon$.

Тому $|1 - e^z| \geqslant \min\left(1 - e^{-\varepsilon}, \sin \varepsilon\right)$, оскільки мінімум модуля функції $1-e^z$ на півкрузі з вилученими прямокутниками досягається на розглянутій частині границі кільця.

Згідно з лемою 2.1 отримуємо $|1 - e^z| \geqslant 3/4 \cdot \varepsilon$, якщо $\varepsilon < 1/2$.

Нехай $\varepsilon = 1/2$. Функція $|1 - e^{\operatorname{Re} z}|$ є монотонно спадною, якщо $\operatorname{Re} z$ змінюється від $-\infty$ до 0. Також функція $|1 - e^z| = \sqrt{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}$, де $z = x + iy$, є монотонно спадною для $\forall x$ за y від $2\pi m - \pi$ до $2\pi m$ та монотонно зростаючою за y від $2\pi m$ до $2\pi m + \pi$, де $m \in \mathbb{Z}$.

Отже, для $\forall z_1 = x_1 + iy_1,\ x_1 \in (-\infty, -1/2],\ y_1 \in [2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi],\ m \in \mathbb{Z}$ виконується $|1 - e^{z_1}| \geqslant |1 - e^{z_0}|$, де $z_0 = x_1 + i * 2\pi m$, та $|1 - e^{z_0}| \geqslant |1 - e^{z_{1/2}}| = |1 - e^{1/2}|$, де $z_{1/2} = 1/2 + i * 2\pi m$, оскільки $|1 - e^z|$ 2π-періодична за y. Звідси отримуємо оцінку $|1 - e^z| \geqslant 3/8$, якщо $\varepsilon \geqslant 1/2$.

$\square$

Теорема 2.6 (Валле Пуссен [80, 135]) . *Нехай у рівнянні*

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = 0, \tag{2.14}$$

коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 2$, є неперервними на $[a, b]$ функціями, і нехай $L_j = \max\limits_{t \in [a,b]} |a_j(t)|$, $j = 1, \ldots, n$. Якщо h_0 — додатний корінь рівняння

$$L_n \frac{h^n}{n!} + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + L_1 \frac{h}{1!} - 1 = 0, \tag{2.15}$$

то для довільних n точок $P_1 \equiv (t_1, A_1), \ldots, P_n \equiv (t_n, A_n)$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, таких, що

$$a \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant b, \quad t_n - t_1 = h \leqslant h_0,$$

існує єдиний розв'язок рівняння (2.14), який проходить через ці точки. Зокрема, цей розв'язок є тривіальним ($y(t) \equiv 0$), якщо $A_1 = \ldots = A_n = 0$.

Зауважимо, що за умови $L_1 = \ldots = L_n = 0$ загальний розв'язок рівняння (2.14) є многочленом $(n-1)$-го степеня, коефіцієнти якого однозначно знаходяться з умов $y(t_j) = A_j$, $j = 1, \ldots, n$, внаслідок того, що всі числа $t_1, \ldots, t_n$ є різними.

Якщо ж $\max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} L_j > 0$, то ліва частина рівняння (2.15), яку позначимо через $G(h)$, є зростаючою функцією від h на проміжку $[0; +\infty)$, від'ємною при $h = 0$ і додатною при досить великому додатному h, тому рівняння (2.15) має єдиний додатний нуль h_0. Знайдемо оцінку знизу для числа h_0. Позначимо:

$$h_* = \min_{j:\ L_j \neq 0} \left\{ \left(j! n^{-1} L_j^{-1} \right)^{1/j} \right\} > 0.$$

Тоді для числа h_* виконуються нерівності

$$L_j \frac{h_*^j}{j!} \leqslant \frac{1}{n}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

із яких випливає, що

$$G(h_*) \leqslant n \cdot \frac{1}{n} - 1 = 0 = G(h_0),$$

а отже, $h_* \leqslant h_0$ внаслідок монотонності $G(h)$ на $[0; +\infty)$. Таким чином, для кореня h_0 рівняння (2.15) виконується оцінка $h_0 \geqslant h_*$. Враховуючи цю оцінку, отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.1 .** *Якщо функція $y(t)$ є ненульовим розв'язком рівняння (2.14), коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, якого є дійсними неперервними функціями на $[a, b]$, то кількість нулів функції $y(t)$ на відрізку $[a, b]$ не перевищує $C_1 H$, де*

$$C_1 = (n-1)(1 + (b-a)n),$$

$$H = 1 + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \max_{t \in [a,b]} |a_j(t)|^{1/j}.$$

***Наслідок* 2.2 .** *Нехай $f(t)$ — ненульова функція вигляду*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j t^{\lambda_j}, \quad \lambda_j \neq \lambda_q \ (j \neq q), \tag{2.16}$$

де $\lambda_j, p_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, m$. Тоді для довільного відрізка $[a, b]$, $a > 0$, кількість нулів функції $f(t)$, які потрапляють на $[a, b]$, не перевищує $C_2(1 + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j|)$, де стала C_2 залежить тільки від a, b і m.

Доведення. Функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком такого диференціального рівняння m-го порядку:

$$\prod_{j=1}^{m} \left(t \frac{d}{dt} - \lambda_j \right) Q(t) = 0.$$

За теоремою Вієта модуль коефіцієнта при похідній $Q^{(m-j)}(t)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, у цьому рівнянні не перевищує $C_3 \Lambda^j$, $\Lambda = 1 + \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\lambda_j|$, $C_3 = C_3(a, b, m)$. Тому твердження наслідку 2.2 одразу випливає з наслідку 2.1. $\square$

Для функції $f : I \to \mathbb{R}$, заданої на проміжку $I \subset \mathbb{R}$, через $E(f,\varepsilon,I)$ будемо позначати множину $E(f,\varepsilon,I), = \{t \in I : |f(t)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0.$

Лема 2.3 . *Якщо дійснозначна функція $f(t)$ належить простору $C^n[a,b]$, $a > 1$, і є такою, що для всіх $t \in [a,b]$ виконується нерівність*

$$|(t\,d/dt)^n f(t)| \geqslant \delta, \quad \delta > 0,$$

тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f,\varepsilon,[a,b]) \leqslant C_4(\varepsilon/\delta)^{1/n}, C_4 = C_4(a,b,n) > 0.$$

Доведення леми 2.3 проводиться із використанням міркувань, аналогічних до наведених у [8, 28].

Лема 2.4 . *Нехай функція $f(t)$ має вигляд* (2.16). *Якщо для деяких комплексних чисел a_j, $j = 1,\ldots,n$, виконується умова*

$$\left|(t\,d/dt)^n f(t) + a_1(t\,d/dt)^{n-1} f(t) + \ldots + a_n f(t)\right| \geqslant \delta > 0,$$
$$\forall t \in [a,b] \subset [1,+\infty),$$

то для довільного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f,\varepsilon,[a,b]) \leqslant C_5\Lambda(\varepsilon/\delta)^{1/n}, \qquad \Lambda \equiv 1 + \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\lambda_j|\,,$$

де $\varepsilon_1 = \frac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|^{1/j}$, $C_5 = C_5(a,b,m,n)$.

Якщо функція $f(t)$ є дійсною, тобто $\lambda_j, p_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,m$, то для довільного $\varepsilon \in (0,2\varepsilon_1)$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f,\varepsilon,[a,b]) \leqslant C_6(\varepsilon/\delta)^{1/n},\ C_6 = C_6(a,b,m,n).$$

Доведення. З умови леми випливає, що в кожній точці $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\max_{0\leqslant j\leqslant n} \{A^{n-j}\left|(t\,d/dt)^j \mathrm{Re} f(t)\right|, A^{n-j}\left|(t\,d/dt)^j \mathrm{Im} f(t)\right|\} \geqslant \delta/(2(n+1)). \tag{2.17}$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = A^{n-j}(t\,d/dt)^j \mathrm{Re} f(t), \quad y_{n+1+j}(t) = A^{n-j}(t\,d/dt)^j \mathrm{Im} f(t),$$

$$j = 0, 1, \ldots, n,$$

а також функції

$$z^+_{jq}(t) = y_j(t) + y_q(t), \quad z^-_{jq}(t) = y_j(t) - y_q(t), \quad 0 \leqslant j < q \leqslant 2n+1.$$

Згідно з наслідком 2.2 кожна з функцій $z^+_{jq}(t)$, $z^-_{jq}(t)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) має на $[a, b]$ не більше ніж $C_7\Lambda$ нулів. Через J позначимо розбиття відрізка $[a, b]$ на відрізки J_r, $[a, b] = \bigcup\limits_{r=1}^{M} J_r$, утворене точками a, b та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z^{\pm}_{jq}(t)$, $0 \leqslant j < q \leqslant$ $\leqslant 2n+1$. Очевидно, що кількість M відрізків розбиття не перевищує $C_8\Lambda$, $C_8 = C_8(a, b, m, n)$. Згідно з побудовою розбиття J, на кожному відрізку J_r цього розбиття серед $2n+2$ функцій

$$A^{n-j}\left|(t\,d/dt)^j \mathrm{Re} f(t)\right|, \qquad A^{n-j}\left|(t\,d/dt)^j \mathrm{Im} f(t)\right|$$

деяка функція є максимальною. Тоді з (2.17) випливає, що для довільного r, $1 \leqslant r \leqslant M$, існує $j(r)$, $0 \leqslant j(r) \leqslant n$, таке, що в кожній точці $t \in J_r$ виконується нерівність

$$A^{n-j(r)}\left|(t\,d/dt)^{j(r)} \mathrm{Re} f(t)\right| \geqslant \delta \,/\, (2(n+1))$$

або нерівність

$$A^{n-j(r)}\left|(t\,d/dt)^{j(r)} \mathrm{Im} f(t)\right| \geqslant \delta \,/\, (2(n+1)).$$

Із цих оцінок випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ відрізок J_r не містить точок множини $E(f, \varepsilon, (a, b))$, якщо $j(r) = 0$. Якщо ж $j(r) \neq 0$, то згідно з лемою 2.3

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathrm{Re}\, f, \varepsilon, I_r) \leqslant C_9(\varepsilon \,/\, (\delta A^{n-j(r)}))^{\frac{1}{j(r)}} \leqslant C_9(\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}},\ C_9 = C_9(b, n),$$

або

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(\mathrm{Im}\, f, \varepsilon, I_r) \leqslant C_{10}(\varepsilon/(\delta A^{n-j(r)}))^{\frac{1}{j(r)}} \leqslant C_{10}(\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}},\ C_{10} = C_{10}(b, n).$$

Таким чином, при $\varepsilon < \varepsilon_1$ маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a,b]) = \sum_{r=1}^{M} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, I_r) \leqslant C_{11} \Lambda \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}, \ C_{11} = C_{11}(a,b,m,n).$$

□

Лема 2.5 (Картан, [5]) . *Для полінома $q_m(z)$ з одиничним старшим коефіцієнтом нерівність $|q_m(z)| > \eta^m$ виконується всюди поза множиною, міра якої не перевищує $\pi\eta^2$.*

Лема 2.6 ([71]) . *Якщо дійсні числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, $n \geqslant 2$, є впорядкованими за зростанням:*

$$a_1 < \ldots < a_n, \quad b_1 < \ldots < b_n,$$

то для довільної перестановки $(i_1, \ldots, i_n) \in \Pi_n$, відмінної від тотожної $(1, \ldots, n)$, виконується нерівність

$$a_{i_1} b_1 + \ldots + a_{i_n} b_n < a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за n, $n \geqslant 2$. Встановимо істинність леми для $n = 2$. Нехай $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Тоді добуток $(a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$ є додатним числом. Розкриваючи дужки, отримуємо

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 < 0 \Leftrightarrow a_1 b_2 + a_2 b_1 < a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

тобто базу індукції доведено, оскільки Π_2 містить два елементи. Припустимо, що твердження леми є істинним для заданого натурального $n = m$, $m \geqslant 2$. Доведемо лему для $n = m+1$. Для цього розглянемо числа $a_1, \ldots, a_m, a_{m+1}$, $b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}$ такі, що

$$a_1 < \ldots < a_m < a_{m+1}, \quad b_1 < \ldots < b_m < b_{m+1},$$

і нетотожну перестановку $(i_1, \ldots, i_m, i_{m+1}) \in \Pi_{m+1}$. Можливими є такі два випадки: $i_{m+1} = m+1$, $i_{m+1} < m+1$. У першому випадку, коли $i_{m+1} = m+1$, перестановка $(i_1, \ldots, i_m) \in \Pi_m$ є нетотожною і тоді нерівність

$$a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} > a_{i_1} b_1 + \ldots + a_{i_m} b_m + a_{m+1} b_{m+1} =$$

$$= a_{i_1}b_1 + \ldots + a_{i_m}b_m + a_{i_{m+1}}b_{m+1}$$

виконується за припущенням індукції. У другому випадку, коли $i_{m+1} < m+1$, існує таке $q \in \{1, \ldots, m\}$, що $i_q = m+1$. Оскільки за умовою $a_{i_{m+1}} < a_{i_q} = a_{m+1}$, $b_q < b_{m+1}$, то згідно з базою індукції

$$a_{i_{m+1}}b_{m+1} + a_{i_q}b_q < a_{m+1}b_{m+1} + a_{i_{m+1}}b_q.$$

Таким чином,

$$a_{i_1}b_1 + \ldots + a_{i_m}b_m + a_{i_{m+1}}b_{m+1} < a_{i_{m+1}}b_q + \sum_{j=1, j\neq q}^{m} a_{i_j}b_j + a_{m+1}b_{m+1}. \quad (2.18)$$

Оскільки перестановка $(i_1, \ldots, i_{q-1}, i_{m+1}, i_{q+1}, \ldots, i_m)$ належить до Π_m, то за припущенням індукції

$$a_{i_{m+1}}b_q + \sum_{j=1, j\neq q}^{m} a_{i_j}b_j < a_1b_1 + \ldots + a_mb_m. \quad (2.19)$$

Із оцінок (2.18), (2.19) випливає істинність кроку індукції також і в цьому випадку. □

Зауваження 2.1 . Для $n = 2$ твердження леми 2.6 має простий геометричний зміст. Нехай $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. У декартовій системі координат Oxy відкладемо точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(a_2, a_1)$. Точки A і B лежать вище від прямої $y = x$, а точка C – нижче. Нехай θ_1 – кут між прямими OA і прямою $y = x$, θ_2 – кут між прямою OB і прямою $y = x$, φ – кут між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, ψ – кут між векторами $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB}$. Для запроваджених кутів виконуються нерівності $0 < \theta_1$, $\theta_2 \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi < \pi$, $0 \leqslant \psi < \pi$. Оскільки точка C є симетричною до точки A відносно прямої $y = x$, то $\psi = \varphi + 2\min\{\theta_1, \theta_2\}$, тому кут φ є меншим, ніж кут ψ, а отже, $\cos\psi < \cos\varphi$, оскільки функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0, \pi]$. Беручи до уваги, що $OA = OC$ з отриманої нерівності для косинусів одержимо

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = OC \cdot OB \cdot \cos\psi < OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}.$$

Залишається врахувати, що $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = a_2b_1 + a_1b_2$ і $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1b_1 + a_2b_2$.

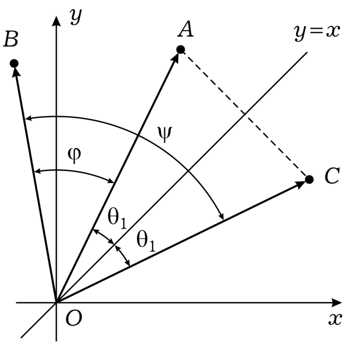

Рис. 2.5: $\psi = \varphi + 2\theta_1$.

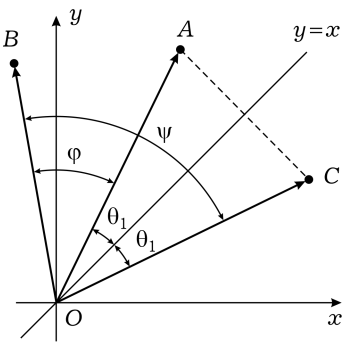

Рис. 2.6: $\psi = \varphi + 2\theta_2$.

Для кожного натурального $n \in \mathbb{N}$ задамо диференціальні вирази

$$l_n = \left(t\frac{d}{dt}\right)^n, \quad r_n = t^n \frac{d^n}{dt^n}.$$

Наступні леми встановлюють той факт, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ диференціальний вираз l_n є лінійною комбінацією n виразів $r_1, \ldots, r_n$, і навпаки, диференціальний вираз r_n є лінійною комбінацією n виразів $l_1, \ldots, l_n$.

Лема 2.7 . *Для виразу l_n, $n \in \mathbb{N}$, можна вказати такий вираз*

$$M_n = m_1^n r_1 + \ldots + m_n^n r_n, \tag{2.20}$$

що $l_n[y] = M_n[y]$ для довільної n раз неперервно диференційовної функції $y(t)$. Коефіцієнти $m_1^n, \ldots, m_n^n$ у формулі (2.20) *виражаються за допомогою рекурентних співвідношень*

$$\begin{cases} m_1^n = m_n^n = 1, \\ m_j^n = j m_j^{n-1} + m_{j-1}^{n-1}, \qquad n > j > 1. \end{cases} \tag{2.21}$$

Доведення. Використаємо індукцію за $n \in \mathbb{N}$. За означенням $l_1 = r_1$, тому $m_1^1 = 1$. Таким чином, для $n = 1$ твердження леми 2.7 встановлено.

Припустимо тепер, що для виразу l_n виконується рівність (2.20) з деякими коефіцієнтами $m_1^n, \ldots, m_n^n$. Тоді

$$l_{n+1} = l_1(l_n) = l_1(M_n) = l_1\left(\sum_{j=1}^n m_j^n r_j\right) = \sum_{j=1}^n m_j^n l_1(r_j). \tag{2.22}$$

Зауважимо, що $l_1(r_j) = jr_j + r_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n$. Дійсно, для n разів неперервно диференційовної функції $y(t)$ маємо

$$l_1(r_j)[y] = t\frac{t}{dt}\left[t^j y^{(j)}\right] = jt^j y^{(j)} + t^{j+1}y^{(j+1)} = (jr_j + r_{j+1})\,[y(t)]. \qquad (2.23)$$

Тоді з формул (2.22), (2.23) отримуємо, що для диференціального виразу l_{n+1} виконується рівність

$$l_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} m_j^n l_1\left(r_j\right) = \sum_{j=1}^{n} m_j^n (jr_j + r_{j+1}) =$$

$$= m_1^n r_1 + \sum_{j=2}^{n}(jm_j^n + m_{j-1}^n)r_j + m_n^n r_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} m_j^{n+1} r_j. \qquad (2.24)$$

Із рівності (2.24) випливають формули

$$\begin{cases} m_1^{n+1} = m_1^n = 1, & m_{n+1}^{n+1} = m_n^n = 1, \\ m_j^{n+1} = jm_j^n + m_{j-1}^n, & n+1 > j > 1. \end{cases}$$

які означають істинність леми 2.7 для l_{n+1}. Тоді на основі принципу індукції лема 2.7 справджується для кожного $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Зауваження 2.2 . Зауважимо, що в науковій літературі числа, які визначаються рекурентними співвідношеннями (2.21), називаються числами Стірлінга другого роду, їх позначають символом $\left\{ n \atop j \right\}$ (див., наприклад, [112]), таким чином,

$$m_j^n = \left\{ n \atop j \right\}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Коефіцієнти m_j^n є елементами трикутної матриці Стірлінга S^s

n	$\left\{{n \atop 1}\right\}$	$\left\{{n \atop 2}\right\}$	$\left\{{n \atop 3}\right\}$	$\left\{{n \atop 4}\right\}$	$\left\{{n \atop 5}\right\}$	$\left\{{n \atop 6}\right\}$
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

,

заповненої на підставі співвідношень (2.21).

Лема 2.8 . *Вираз r_n, $n \in \mathbb{N}$, можна зобразити у вигляді*

$$T_n = t_1^n l_1 + \ldots + t_n^n l_n, \tag{2.25}$$

де коефіцієнти $t_1^n, \ldots, t_n^n$ у формулі (2.25) *визначаються з рекурентних співвідношень*

$$\begin{cases} t_1^n = (-1)^{n+1}(n-1)!, & t_n^n = 1, \\ t_j^n = -(n-1)\left[{n-1 \atop j}\right] + \left[{n-1 \atop j-1}\right], & j > n > 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Доведення. Оскільки $r_1 = l_1$, то $t_1^1 = 1$ і для $n = 1$ лема 2.8 виконується. Припустимо тепер, що вираз r_n співпадає з виразом (2.25) з деякими коефіцієнтами $t_1^n, \ldots, t_n^n$, тобто $r_n = t_1^n l_1 + \ldots + t_n^n l_n$. Подіємо на обидві сторони цієї рівності виразом $l_1 = t\frac{d}{dt}$, у результаті отримаємо

$$l_1\left(r_n\right) = l_1\left(t_1^n l_1 + \ldots + t_n^n l_n\right) = t_1^n l_2 + \ldots + t_n^n l_{n+1}. \tag{2.27}$$

Легко перевірити, що

$$l_1\left(r_n\right) = t\frac{d}{dt}\left(t^n \frac{d^n}{dt^n}\right) = nt^n \frac{d^n}{dt^n} + t^{n+1}\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} = nr_n + r_{n+1}. \tag{2.28}$$

Тоді з рівностей (2.27), (2.28) випливає, що

$$r_{n+1} = -nr_n + t_1^n l_2 + \ldots + t_n^n l_{n+1} = -nt_1^n l_1 + t_n^n l_{n+1} +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}(t_{j-1}^{n}-nt_{j}^{n})l_j=\sum_{j=1}^{n+1}t_j^{n+1}l_j. \tag{2.29}$$

Із отриманої рівності (2.29) отримуємо формули

$$\begin{cases} t_{n+1}^{n+1}=t_n^n=1, \qquad t_1^{n+1}=-nt_1^n=(-1)^n n!, \\ t_j^{n+1}=-nt_j^n+t_{j-1}^n, \qquad n+1>j>1. \end{cases}$$

які означають істинність леми 2.8 для l_{n+1}. Тоді на основі принципу індукції лема 2.8 справджується для кожного $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Зауваження 2.3 . Числа, які визначаються рекурентними співвідношеннями (2.26), називаються знакозмінними числами Стірлінга першого роду, їх позначають символом $\left[{n \atop j}\right]$ (див. [112]), таким чином,

$$t_j^n=(-1)^{n+j}\begin{bmatrix} n\\ j\end{bmatrix}, \quad j=1,\ldots,n.$$

Коефіцієнти t_j^n є елементами трикутної матриці Стірлінга S^c

n	$\left[{n \atop 1}\right]$	$\left[{n \atop 2}\right]$	$\left[{n \atop 3}\right]$	$\left[{n \atop 4}\right]$	$\left[{n \atop 5}\right]$	$\left[{n \atop 6}\right]$
1	1					
2	-1	1				
3	2	-3	1			
4	-6	11	-6	1		
5	24	-50	35	-10	1	
6	-120	274	-225	85	-15	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Зауваження 2.4 . Доведення леми 2.8 можна було встановити за допомогою таких міркувань. Із леми 2.7 випливає, що

$$\begin{pmatrix} l_1\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \left\{{1 \atop 1}\right\} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left\{{n \atop 1}\right\} & \left\{{n \atop 2}\right\} & \cdots & \left\{{n \atop n}\right\}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1\\ \vdots\\ r_n\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Матриця системи (2.30) співпадає з матрицею S^s. Оскільки $\det S^s = 1$, то система (2.30) має єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = (S^s)^{-1} \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}. \tag{2.31}$$

Залишається врахувати, що $(S^s)^{-1} = S^c$.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Даний розділ має допоміжний характер. Наведені функційні простори, у яких вивчаються умови коректності багатоточкових задач, задач Ніколетті та нелокальних задач для диференціального рівняння типу Ейлера. Описано спрощену схему дослідження розглянутих у дисертації задач. Подано деякі відомості з теорії звичайних диференціальних рівнянь, теорії чисел та теорії функцій, які використовуються у наступних розділах дисертації.

РОЗДІЛ 3
ЛОКАЛЬНІ ДВОТОЧКОВІ І БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

У цьому розділі дисертації досліджено задачі з простими вузлами інтерполяції за виділеною змінною t для рівнянь із частинними похідними типу Ейлера. Розглянуто частинні випадки задач, коли рівняння має низький порядок ($n = 2$), а також випадок логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції $t_j = t_1^j$, $j = 1, \ldots, n$.

3.1. Двоточкова задача

В області $(t^-, t^+) \times \Omega_{2\pi}^p$, де $0 < t^- < t^+ < +\infty$, $\Omega_{2\pi}^p$ — p-вимірний тор, $p \in \mathbb{N}$, розглядається задача

$$\left[t^2\partial_t^2 + ta(\partial_x)\partial_t + b(\partial_x)\right]u(t,x) = 0, \tag{3.1}$$

де

$$a(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant 1} a_s\partial_x^s, \qquad b(\partial_x) = \sum_{|s|\leqslant 2} b_s\partial_x^s, \tag{3.2}$$

a_s, b_s — комплексні числа, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_x^s = \partial_{x_1}^{s_1} \cdots \partial_{x_p}^{s_p}$, $d_{x_r} = \partial/\partial x_r$, $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $s = (s_1, \ldots, s_p)$, $|s| = s_1 + \cdots + s_p$.

Розв'язок рівняння (3.1) заданий у два моменти часу t_0, t_1, де $0 < t_0 < t_1 = t_0\tau$, тобто умовами

$$u(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad u(t_1, x) = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega_{2\pi}^p. \tag{3.3}$$

Знайдемо розв'язок задачі (3.1), (3.3) за допомогою відокремлення змінної x, використовуючи ряди Фур'є

$$\varphi_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{0k}e^{ikx}, \qquad \varphi_1(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{1k}e^{ikx}.$$

Згідно з рівнянням (3.1) звичайне диференціальне рівняння з векторним параметром $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$ має вигляд рівняння Ейлера

$$\left[t^2 d_t^2 + ta(ik)d_t + b(ik)\right]u_k(t) = 0, \qquad d_t = d/dt, \tag{3.4}$$

а розв'язок рівняння (3.1) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{ikx}, \qquad kx = k_1x_1 + \dots + k_px_p. \tag{3.5}$$

Побудуємо розв'язок задачі (3.1), (3.3). Нехай $a = a(ik)$, $b = b(ik)$. Корені характеристичного (квадратного) рівняння

$$\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0 \tag{3.6}$$

позначимо через $\lambda_1 = \lambda_1(k)$, $\lambda_2 = \lambda_2(k)$. Ці корені мають такі зображення:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - a \mp \sqrt{D}}{2}, \quad D = (a-1)^2 - 4b, \tag{3.7}$$

де аргумент $\arg\sqrt{D}$ квадратного кореня з дискримінанта D належить до множини $(-\pi/2, \pi/2]$, тому справджується нерівність $\operatorname{Re}\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2$, причому $\operatorname{Re}\lambda_1 < \operatorname{Re}\lambda_2$, якщо $\arg\sqrt{D} \neq \pi/2$.

Якщо дискримінант $D = D(k)$ квадратного рівняння (3.6) не дорівнює нулю, то це рівняння має прості корені. Якщо ж $D = 0$, то воно має кратний корінь $\lambda_1 = \lambda_2 = (1-a)/2$.

Якщо a, b є дійсними, то корені рівняння (3.7) є дійсними у випадку $D \geqslant 0$ (зокрема різні, якщо $D > 0$), і комплексно спряженими у випадку $D < 0$.

Геометрична інтерпретація коренів рівняння (3.6) подана на рисунку 3.1.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p$ на дві диз'юнктні множини $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$:

$$\mathbb{Z}^p = \mathcal{Z}_1 \sqcup \mathcal{Z}_2.$$

Множина $\mathcal{Z}_2$ складається із тих векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких корені рівняння (3.6) є простими, а множина $\mathcal{Z}_1$ — із векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, для яких рівняння

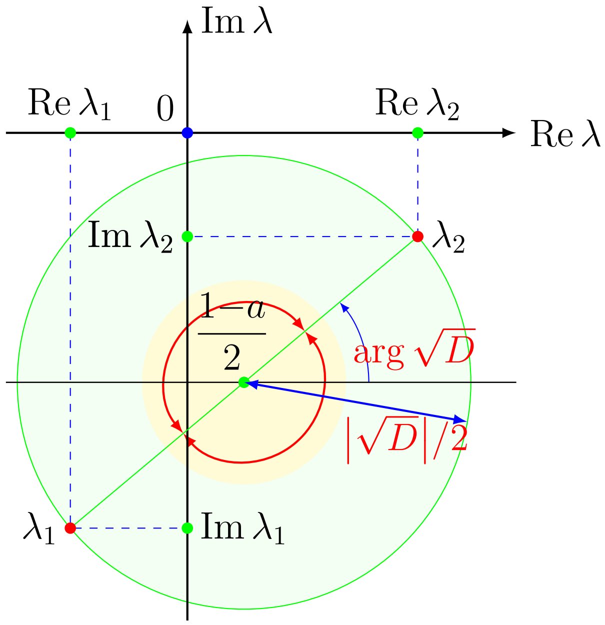

Рис. 3.1: Геометрична інтерпретація коренів.

(3.6) має кратний корінь, тобто

$$k \in \mathcal{Z}_1 \leftrightarrows D(k) = 0.$$

Загальний розв'язок рівняння (3.4) зображується формулами

$$\begin{aligned} u_k(t) &= t^{\lambda_1}(C_{1k} + C_{2k}\ln t) = t^{(1-a)/2}(C_{1k} + C_{2k}\ln t), \qquad k \in \mathcal{Z}_1, \\ u_k(t) &= C_{1k}t^{\lambda_1} + C_{2k}t^{\lambda_2} = t^{(1-a)/2}(C_{1k}t^{-\sqrt{D}/2} + C_{2k}t^{\sqrt{D}/2}), \qquad k \in \mathcal{Z}_2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

де C_{1k} і C_{2k} — комплексні сталі, а

$$t^\lambda = e^{\lambda\ln t} = e^{(\operatorname{Re}\lambda + i\operatorname{Im}\lambda)\ln t} = e^{\operatorname{Re}\lambda\ln t}(\cos\operatorname{Im}\lambda\ln t + i\sin\operatorname{Im}\lambda\ln t).$$

Функція (3.5) є розв'язком задачі (3.1), (3.3) тоді і лише тоді, коли

$$u_k(t_0) = \varphi_{0k}, \qquad u_k(t_1) = \varphi_{1k}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.9}$$

Тому сталі C_{1k}, C_{2k} у формулі (3.8) є розв'язками систем

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathcal{Z}_1,$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathcal{Z}_2,$$

з матриці яких допускають факторизації такого вигляду

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_1}\ln t_0 \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_1}\ln t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \ln t_0 \\ 1 & \ln t_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2-\lambda_1} \end{pmatrix}, \quad t_1 \leqslant 1,$$

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_0 \geqslant 1,$$

і для випадку $t_0 < 1 < t_1$ з матрицею

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

З формули (3.8) відповідно отримуємо

$$u_k(t) = t^{\lambda_1}\frac{\begin{pmatrix} 1 & \ln t \end{pmatrix}}{\ln \tau} \begin{pmatrix} \ln t_1 & -\ln t_0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathcal{Z}_1,$$

де $\ln(t_1/t_0) > 0$, а для $k \in \mathcal{Z}_2$ відповідно маємо

$$\begin{aligned} u_k(t) &= \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2}t_1^{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_1 \leqslant 1, \\ u_k(t) &= \frac{-\begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}} \begin{pmatrix} -1 & t_0^{\lambda_2-\lambda_1} \\ t_1^{\lambda_1-\lambda_2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_0 < 1 < t_1, \qquad (3.10) \\ u_k(t) &= \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1}t_0^{\lambda_2-\lambda_1} & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}}{1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\tau^{\lambda_1-\lambda_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k} \\ t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad t_0 \geqslant 1, \end{aligned}$$

де модулі елементів $\tau^{\lambda_1-\lambda_2}$, $t_0^{\lambda_2-\lambda_1}$, $t_1^{\lambda_1-\lambda_2}$ відповідних квадратних матриць є меншими за одиницю для всіх $k \in \mathcal{Z}_2$ з умовою $\operatorname{Re}\lambda_2 > \operatorname{Re}\lambda_1$.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_1$, то $D < 0$, $\sqrt{-D} > 0$, $\lambda_{1,2} = (1-a)/2 \mp i\sqrt{-D/4}$ і

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2} \\ t_1^{\lambda_1} & t_1^{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{(1-a)/2} & 0 \\ 0 & t_1^{(1-a)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-i\sqrt{-D/4}} & t_0^{i\sqrt{-D/4}} \\ t_1^{-i\sqrt{-D/4}} & t_1^{i\sqrt{-D/4}} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathcal{Z}_2,$$

а формули (3.10) набувають вигляду

$$u_k(t) = \frac{\Big(-\sin\big(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_1}\big) \quad \sin\big(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{t/t_0}\big)\Big)}{t^{(a-1)/2}\,\sin\big(\sqrt{-D}\,\ln\sqrt{\tau}\big)} \begin{pmatrix} t_0^{(a-1)/2}\varphi_{0k} \\ t_1^{(a-1)/2}\varphi_{1k} \end{pmatrix}$$

у припущенні, що $\sqrt{-D(k)}\,\ln\tau \neq 2m\pi$ для усіх натуральних m. У протилежному випадку $\sqrt{-D(k)} = 2m\pi/\ln\tau$, або $t_0^{\lambda_2-\lambda_1} = t_1^{\lambda_2-\lambda_1}$, або $\tau^{\lambda_1} = \tau^{\lambda_2}$ розв'язок задачі (3.4), (3.9) існує лише за умови $\varphi_{1k} = \tau^{\lambda_1}\varphi_{0k}$, а сама задача має одновимірне ядро, зокрема,

$$u_k(t) = \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{0k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_0^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_0^{\lambda_2}}\Big)C_k \equiv \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} + \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\frac{\varphi_{1k}}{2} + \Big(\frac{t^{\lambda_1}}{t_1^{\lambda_1}} - \frac{t^{\lambda_2}}{t_1^{\lambda_2}}\Big)\tau^{\lambda_1}C_k,$$

де C_k — довільне комплексне число.

Умова неоднозначності розв'язку задачі (3.1), (3.3) полягає у виконанні хоча б одної з нескінченної кількості умов

$$b(ik) = \Big(\frac{a(ik)-1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{m\pi}{\ln\tau}\Big)^2, \qquad m \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

причому розмірність її ядра дорівнює кількості розв'язків $k \in \mathbb{Z}^p$ останнього рівняння і може бути нескінченною.

На основі формул (3.10) отримуємо для похідних $u_k^{(l)}$, де $l = 0, 1, 2$, розв'язку $u_k(t)$ задачі (3.4), (3.9) відповідні нерівності

$$\begin{aligned}
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_1}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} &\geqslant \begin{cases} \big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \leqslant t_1, \\ \big|t^{l-\lambda_2}t_1^{\lambda_2-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \geqslant t_1, \end{cases} \\
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_1}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} &\geqslant \begin{cases} \big|t^{l-\lambda_1}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \leqslant 1, \\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \geqslant 1, \end{cases} \\
8\lambda_l^*\frac{\big|t_0^{-\lambda_2}\varphi_{0k}\big|^2 + \big|t_1^{-\lambda_2}\varphi_{1k}\big|^2}{\big|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}\big|^2} &\geqslant \begin{cases} \big|t^{l-\lambda_1}t_0^{\lambda_1-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \leqslant t_0, \\ \big|t^{l-\lambda_2}u_k^{(l)}(t)\big|^2, & t \geqslant t_0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Величини λ_l^*, $l = 0, 1, 2$, визначаються формулами

$$\lambda_0^* = 1, \quad \lambda_1^* = \max_r |\lambda_r|^2, \quad \lambda_2^* = \max_r |(\lambda_r - 1)\lambda_r|^2 = \max_r |a\lambda_r + b|^2. \quad (3.12)$$

Перейдемо до оцінок розв'язку. Нехай компоненти вектора

$$\vec{b} = \big(b(1), \ldots, b(p)\big) = \big(b_{s(1)}, \ldots, b_{s(p)}\big),$$

де $s(j) = \big(\underbrace{0, \ldots, 0, 2}_{j}, 0, \ldots, 0\big)$, у рівнянні (3.1) належать до круга Q^* радіуса b^*, а саме $Q^* = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant b^*\}$. Тоді залежні від k величини

$$\lambda_1(k), \lambda_2(k), D(k), \Delta(k)$$

залежать також і від цього вектора на множині $Q^{*p} = \underbrace{Q^* \times \cdots \times Q^*}_{p}$.

Розглянемо множину розв'язків $u = u(t, x)$ задачі (3.1), (3.3), складену для значень вектора $\vec{b}$ на множині Q^{*p}, з метою встановлення її метричних оцінок.

Оскільки $|a(ik)| \leqslant L_1 \tilde{k}$ і $|b(ik)| \leqslant L_1^2 \tilde{k}^2$, то $|D(k)| \leqslant L_2^2 \tilde{k}^2$ і $|\lambda_j(k)| \leqslant L_3 \tilde{k}$, де додатні числа L_1, L_2, L_3 — не залежать від k та $\vec{b}$, а залежать від b^*. Також вимагатимемо виконання оцінки $L_2 > 1$.

З іншого боку, на основі рівностей

$$D(k) = 4k_j^2 b(j) - D_1(k),$$

де $D_1(k) = 4k_j^2 b(j) - D(k)$ не залежить від $b(j)$ і $k_j^2 = \max(k_1^2, \ldots, k_p^2)$, отримаємо оцінки знизу.

Для довільного фіксованого $\varepsilon \in (0, 1]$ виберемо послідовність невід'ємних чисел ε_k, які задовольняють умову

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2.$$

Для заданого ε і невід'ємної послідовності f_k з умовою $0 < F = \sum\limits_{k \neq 0} f_k^2 < \infty$ послідовність ε_k будується за правилом $\varepsilon_k = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{2F}} f_k$.

Розглянемо вираз $\Delta(k) = 1 - \tau^{\lambda_1 - \lambda_2}$, який треба оцінити знизу. Оскільки $\tau > 1$, а $\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2) \leqslant 0$, то для $\Delta(k) = 1 - e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau}$ маємо оцінку зверху

$$|\Delta(k)| \leqslant 1 + e^{\operatorname{Re}(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} \leqslant 2$$

для усіх $\vec{b} \in Q^{*p}$, зокрема $|\Delta(k)| = 2$, якщо $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} = -1$. Якщо ж $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau} = 1$, то $|\Delta(k)| = 0$.

Використаємо рівність

$$z - 2\pi i m = \frac{D(k)\ln^2\tau + 4\pi^2 m^2}{z + 2\pi i m} = \frac{b(j) - (D_1(k) - 4\pi^2 m^2)/(4k_j^2 \ln^2\tau)}{(z + 2\pi i m)/(4k_j^2 \ln^2\tau)}, \tag{3.13}$$

де $D_1(k)$ не залежить від $b(j)$. Позначимо $\varepsilon_k^* = \dfrac{\varepsilon_k/\sqrt{\tilde{k}}}{\sqrt{m_0 \pi^p b^{*2(p-1)}}}$ та $\varepsilon_k^{**} = \dfrac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^*$, число ε вибираємо таким, щоб $\varepsilon_k^* \leqslant 1/2$. Число $m_0 \in \mathbb{R}$ означимо згодом.

Міра множини

$$Q_{mk}\big(b(1), \ldots, b(j-1), b(j+1), \ldots, b(p)\big), \qquad k \neq 0,$$

елементів $b(j) \in Q^*$, що при фіксованому m задовольняють нерівність

$$\left| b(j) - \frac{D_1(k) - 4\pi^2 m^2}{4k_j^2 \ln^2\tau} \right| \leqslant \sqrt{2}\varepsilon_k^* \tag{3.14}$$

для довільного фіксованого вектора $\big(b(1), \ldots, b(j-1), b(j+1), \ldots, b(p)\big) \in Q^{*p-1}$, не перевищує $2\pi\varepsilon_k^{*2} = \dfrac{2\varepsilon_k^2}{m_0 \pi^{p-1} b^{*2(p-1)} \tilde{k}}$.

Позначимо $z = (\lambda_1 - \lambda_2)\ln\tau$, тоді $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ і

$$|z| = \sqrt{|D(k)|}\ln\tau \leqslant \tilde{k} L_2 \ln\tau, \tag{3.15}$$

тобто z належить півкругу радіуса $\tilde{k} L_2 \ln\tau$.

Круги $V_m = \{z \in \mathbb{C} : \ (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z - 2\pi i m)^2 \leqslant \sqrt{2} \cdot \varepsilon_k^{**}\}$ мають ненульовий перетин з півкругом $|z| \leqslant \tilde{k} L_2 \ln\tau$, $\operatorname{Re} z \leqslant 0$, див. рис. 3.2, якщо $2\pi|m| - \sqrt{2} \cdot \varepsilon_k^{**} < \tilde{k} L_2 \ln\tau$. Оскільки $\varepsilon_k^{**} = \dfrac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^*$, $\varepsilon_k^* \leqslant 1/2$ та

$p, L_2 > 1$, то отримуємо таку оцінку $\varepsilon_k^{**} \leqslant \dfrac{\tilde{k}\ln\tau}{2}$. Звідси отримуємо $2\pi|m| \leqslant (3/4 + L_2)\tilde{k}\ln\tau$, отже кількість таких перетинів не перевищує числа $m_0\tilde{k}$, де $m_0 = \dfrac{\ln\tau}{\pi}\left(L_2 + \dfrac{3}{4}\right) + 1$.

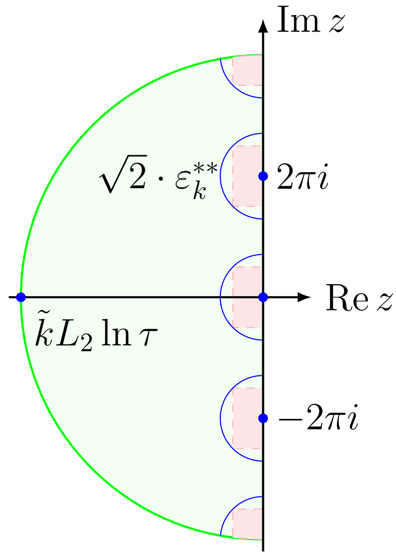

Рис. 3.2: Область визначення z з урахуванням формул (3.15) та (3.16).

З нерівностей (3.13), (3.14) для $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q_k$ випливає формула

$$|z - 2\pi i m| \geqslant 4k_j^2 \ln^2\tau \frac{\sqrt{2}\varepsilon_k^*}{|z| + 2\pi|m|} > \sqrt{2}\frac{\tilde{k}\ln\tau}{pL_2}\varepsilon_k^* = \sqrt{2} \cdot \varepsilon_k^{**}, \tag{3.16}$$

яка справджується для всіх $k \neq 0$.

Оскільки $\varepsilon_k^{**} > 0$ та виконується умова (3.16) ми можемо застосувати лему 2.2, та отримати такі оцінки:

$$|1 - e^z| \geqslant \begin{cases} \frac{3}{8}, & \text{якщо } \varepsilon \geqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\varepsilon_k^{**}, & \text{якщо } \varepsilon < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Міра множин $Q_k = \bigcup_m Q_{mk}$ усіх таких векторів $\vec{b} \in Q^{*p}$, що задовольняють нерівність хоча б для одного m, не більша $2\varepsilon_k^2$. Множина Q_k є вимірною, як об'єднання скінченної (або зліченної) кількості вимірних множин Q_{mk} (див. теорему 7 на с. 259 у [42]).

Позначимо через Q_0 множину векторів (a_0, b_0), які лежать на комплексних параболах

$$b_0 = \left(\frac{a_0 - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{\ln\tau}\right)^2$$

для цілих чисел m; якщо $(a_0, b_0) \notin Q_0$, то $\Delta(0) \neq 0$.

У припущенні $(a_0, b_0) \notin Q_0$ для довільних достатньо малих $\varepsilon > 0$ і послідовності $\varepsilon_k \geqslant 0$, для яких $\sum_{k\neq 0} \varepsilon_k^2 = \varepsilon/2$, на множині $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ знаменники у формулі (3.11) задовольняють нерівність

$$|1-\tau^{\lambda_1-\lambda_2}| \geqslant \min\left(|\Delta(0)|, \frac{3}{8}, \frac{3}{4}L_4\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k\right) \geqslant L_5\tilde{k}^{1/2}\varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \qquad (3.17)$$

де $Q = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} Q_k$, $\operatorname{mes} Q \leqslant \varepsilon$ і $L_4 = \dfrac{\ln\tau}{pL_2 b^{*p-1}\sqrt{m_0\pi^p}} > 0$, $L_5 > 0$.

Нехай корені (3.7) рівняння (3.6) на множині $\tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ задовольняють умови

$$-\lambda_0^-\tilde{k} \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_1-\lambda_2) \leqslant \lambda_0^+\tilde{k}, \qquad -\lambda_j^-\tilde{k} \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j \leqslant \lambda_j^+\tilde{k}, \quad j=1,2, \quad (3.18)$$

для деяких дійсних чисел $\lambda_0^\pm$, $\lambda_1^\pm$, $\lambda_2^\pm$. Тоді $-L_3 \leqslant -\lambda_1^- \leqslant -\lambda_2^- \leqslant \lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant L_3$ і $-2L_2 \leqslant -\lambda_0^- \leqslant \lambda_0^+ \leqslant 0$, тобто ці умови виконуються на усій множині Q^{*p} для чисел $\lambda_1^\pm = \lambda_2^\pm = L_3$ і $\lambda_0^- = 2L_2$, $\lambda_0^+ = 0$.

Нерівності $\lambda_r^* \leqslant L_6^2\tilde{k}^{2r}$, де $r = 0,1,2$, $L_6 > 0$, і формули (3.11), (3.12), (3.17), (3.18) дають змогу у разі $t_1 \leqslant 1$, за умови $(a_0, b_0) \notin Q_0$, встановити для векторів $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ оцінки

$$t^{2r}\left|\tilde{k}^{-r}t^{\lambda_1^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\right|^2 \leqslant \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\left(\left|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\right|^2\right), \qquad t \leqslant t_1, \quad (3.19)$$

$$t^{2r}\left|\tilde{k}^{-r}t^{\lambda_2^-}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\right|^2 \leqslant \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\left(\left|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\right|^2\right), \quad t_1 < t \leqslant 1, \quad (3.20)$$

$$t^{2r}\left|\tilde{k}^{-r}t^{-\lambda_2^+}t_1^{\lambda_0^-\tilde{k}}u_k^{(r)}(t)\right|^2 \leqslant \frac{8L_6^2}{L_5^2\tilde{k}\varepsilon_k^2}\left(\left|t_0^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{-\lambda_1^+\tilde{k}}\varphi_{1k}\right|^2\right), \qquad t > 1. \quad (3.21)$$

Аналогічні оцінки для u_k, де $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, встановлено також в інших двох випадках.

Дослідимо коректність задачі. На основі отриманих нерівностей для функцій u_k і оцінок мір множин векторів $\vec{b}$ доведемо наступні твердження.

Теорема 3.1 . *Якщо* $\varphi_0 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$, $\varphi_1 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$, *причому вибір* g_{0j}, g_{1j} *та* t_0, t_1 *визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1 \leqslant 1$	$t_0 < 1 < t_1$	$t_0 \geqslant 1$
g_{0j}	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{L_3}$
g_{1j}	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{L_3}$	$t_1^{L_3}$

, $p^* > p$ *і* $(a_0, b_0) \notin Q_0$, *то для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує така множина* $Q \subset Q^{*p}$ *з мірою* $\operatorname{mes} Q \leqslant \varepsilon$, *що для довільного* $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (3.1), (3.2) *з простору* U_{2,G_j} *і справджуються оцінки*

$$\|u\|^2_{2,G_j} \leqslant \frac{16L_6^2\zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2}\left(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2, g_{0j}} + \|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2, g_{1j}}\right), \qquad j = 1, 2, 3, \quad (3.22)$$

де $\zeta(p^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \tilde{k}^{-p^*}$, *з функціями*

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_1, \\ t^{L_3} t_1^{2L_2}, & t_1 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_1^{2L_2}, & t \geqslant 1, \end{cases} \qquad G_2(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant 1, \\ t^{-L_3}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

$$G_3(t) = \begin{cases} t^{L_3} t_0^{-2L_2}, & t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_0^{-2L_2}, & 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ t^{-L_3}, & t \geqslant t_0. \end{cases}$$

Доведення. Існування. Приймемо $\varepsilon_k^2 = \dfrac{\varepsilon}{2\zeta(p^*)}\tilde{k}^{-p^*}$, де $p^* > p$ і $\varepsilon > 0$. На основі оцінок (3.19), (3.20), (3.21), в яких $\lambda_1^{\pm} = \lambda_2^{\pm} = L_3$ і $\lambda_0^{-} = 2L_2$, $\lambda_0^{+} = 0$, та означень просторів $\Phi_{q,g}$ і $U_{q,G}$ одержимо оцінку (3.22) для $j = 1$ зі вказаними сталими g_{01} і g_{11} та функцією $G_1(t)$. З аналогічних оцінок одержуються нерівності (3.22) для $j = 2, 3$. Формули (3.22) справджуються для всіх $\vec{b} \in Q^{*p} \setminus Q$ за умови $(a_0, b_0) \notin Q_0$. Отримані нерівності доводять належність розв'язку до просторів U_{2,G_j}, де $j = 1, 2, 3$, у залежності від значень t_0, t_1.

Єдиність. Припустимо, що існують два розв'язки $u_1 = u_1(t, x)$ і $u_2 = u_2(t, x)$ задачі (3.1), (3.2) з простору U_{2,G_j}. Тоді функція $u = u_2 - u_1$ є розв'язком задачі (3.1) з простору U_{2,G_j} з нульовими умовами

$$u(t_0, x) = 0, \quad u(t_1, x) = 0, \qquad x \in \Omega^p_{2\pi}.$$

Кожний із коефіцієнтів Фур'є функції u є розв'язком відповідної задачі (3.4), (3.9) при $\varphi_{0k} = \varphi_{1k} = 0$. Згідно з умовами теореми на коефіцієнти рівняння $(a_0, b_0) \notin Q_0$ і $\vec{b} \in Q^{*p} \backslash Q$ випливає, що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх векторів $k \in \mathbb{Z}^p$. Отже, $u_k(t) \equiv 0$ на $[t^-, t^+]$ для усіх k, тому відповідно $u = 0$, тобто $u_1 = u_2$. Теорему доведено. $\square$

Точніший результат отримується при використанні додаткових умов (3.18) для деякого фіксованого малого числа $\varepsilon > 0$; при цьому $\operatorname{mes} \tilde{Q} \leqslant \pi^p b^{*2p} - \varepsilon$.

Теорема 3.2 . *Якщо $\varphi_0 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$, $\varphi_1 \in \Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$, причому вибір g_{0j}, g_{1j} та t_0, t_1 визначає таблиця*

j	1	2	3
$t_0,\ t_1$	$t_1 \leqslant 1$	$t_0 < 1 < t_1$	$t_0 \geqslant 1$
g_{0j}	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{-\lambda_1^+}$	$t_0^{\lambda_2^-}$
g_{1j}	$t_1^{-\lambda_1^+}$	$t_1^{\lambda_2^-}$	$t_1^{\lambda_2^-}$

, $p^* > p$ та $(a_0, b_0) \notin Q_0$ і виконується умова (3.18), то для довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина $Q \subset Q^{*p}$ з мірою $\operatorname{mes} Q \leqslant \varepsilon$, що для довільного $\vec{b} \in \tilde{Q} \subset Q^{*p} \setminus Q$ існує єдиний розв'язок u задачі (3.1), (3.2) з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки

$$\|u\|^2_{2,G_j} \leqslant \frac{16 L_6^2 \zeta(p^*)}{\varepsilon L_5^2} \big(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2, g_{0j}} + \|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2, g_{1j}} \big), \qquad j = 1, 2, 3, \quad (3.23)$$

де $\zeta(p^*) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}} \tilde{k}^{-p^*}$, з функціями

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & t \leqslant t_1, \\ t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-}, & t_1 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-}, & t \geqslant 1, \end{cases} \qquad G_2(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-}, & t \leqslant 1, \\ t^{-\lambda_2^+}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

$$G_3(t) = \begin{cases} t^{\lambda_1^-} t_0^{-\lambda_0^-}, & t \leqslant 1, \\ t^{-\lambda_1^+} t_0^{-\lambda_0^-}, & 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ t^{-\lambda_2^+}, & t \geqslant t_0. \end{cases}$$

3.2. Багатоточкова задача

У цьому підрозділі дисертації встановимо умови коректності багатоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для рівняння із частинними похідними високого порядку такого вигляду

$$L_n\left(t\partial_t, \partial_x\right) u(t,x) \equiv \left(t\partial_t\right)^n u + \sum_{j=0}^{n-1} \left(t\partial_t\right)^j A_{n-j}(\partial_x) u = 0, \ (t,x) \in Q_T^p, \quad (3.24)$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad t_1^* \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant t_2^*, \quad x \in \Omega_p, \quad (3.25)$$

де $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, а поліноми $A_j(z_1, \ldots, z_p)$, $j = 1, \ldots, n$, є такими, що

$$A_j(\partial_x) = \sum_{|s| \leqslant N_j} a_{j,s} \partial_x^s = \sum_{|s| \leqslant N_j} a_{j,s} \partial_{x_1}^{s_1} \ldots \partial_{x_p}^{s_p}, \quad a_{j,s} \in \mathbb{C},$$

$N_j \geqslant 0$, $N_1 + \ldots + N_n > 0$. Будемо припускати, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ многочлен

$$L_n(\lambda, ik) \equiv \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(ik) \lambda^j \quad (3.26)$$

має прості λ-корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$. Вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ ці корені пронумеровані згідно з нерівностями

$$\operatorname{Re} \lambda_1(k) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re} \lambda_n(k). \quad (3.27)$$

Через γ позначимо додатне число

$$\gamma = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left\{ \frac{N_j}{j} \right\}, \quad (3.28)$$

яке характеризує порядок степеневого зростання коренів многочлена (3.26). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються оцінки [98]

$$|\lambda_j(k)| \leqslant C_1(1 + |k|^\gamma), \quad j = 1, \ldots, n, \quad (3.29)$$

де C_1 — додатна стала, що не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$.

Зауваження 3.1 . Зазначимо, що у формулюванні задачі (3.24), (3.25) диференціальний вираз $L_n(t\partial_t, \partial_x)$ можна зобразити і в іншому вигляді

$$L_n(t\partial_t, \partial_x) \equiv t^n (\partial_t)^n + \sum_{j=0}^{n-1} t^j (\partial_t)^j B_{n-j}(\partial_x) u = 0$$

(див. у цьому зв'язку формулювання леми 2.7 та леми 2.8).

Знайдемо розв'язок задачі (3.24), (3.25), використовуючи метод Фур'є та розвинення правих частин в умовах (3.25) у ряди Фур'є за системою функцій $\{\exp(ik, x) : k \in \mathbb{Z}^p\}$:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(ik, x), \qquad j = 1, \dots, n.$$

Розв'язок рівняння (3.24) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x), \qquad (ik, x) = ik_1 x_1 + \dots + ik_p x_p, \tag{3.30}$$

де кожна функція $u_k(t)$ є розв'язком звичайного диференціального рівняння типу Ейлера порядку n

$$\left(t \frac{d}{dt}\right)^n u_k(t) + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(ik) \left(t \frac{d}{dt}\right)^j u_k(t) = 0 \tag{3.31}$$

і справджує багатоточкові умови

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.32}$$

Множина функцій $\left\{t^{\lambda_1(k)}, \dots, t^{\lambda_n(k)}\right\}$ утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (3.31), тому розв'язок задачі (3.31), (3.32) визначається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{kq} t^{\lambda_q(k)}, \tag{3.33}$$

де сталі C_{kq}, $q = 1, \dots, n$, справджують систему лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_{kq} t_j^{\lambda_q(k)} = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.34}$$

Позначимо через $\Delta(k)$ визначник системи (3.34)

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \dots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_n^{\lambda_1(k)} & \dots & t_n^{\lambda_n(k)} \end{vmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.35}$$

Теорема 3.3 . *Для единості розв'язку задачі* (3.24), (3.25) *у просторі* $C^n([0,T];\mathcal{T}')$ *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{3.36}$$

Зауваження 3.2 . Якщо для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені многочлена (3.26) є дійсними, то умова (3.36) виконується, якщо $t_1, \dots, t_n$ є різними додатними числами.

Зауваження 3.3 . Якщо корені $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ корені утворюють арифметичну прогресію, тобто

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \lambda_2(k) - \lambda_1(k) = \lambda_3(k) - \lambda_2(k) = \ldots = \lambda_n(k) - \lambda_{n-1}(k) \equiv \mu(k) \neq 0,$$

і, крім того,

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \mu(k)(\ln \tau_j - \ln \tau_q) \notin i2\pi\mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant q < j \leqslant n-1$$

тоді умова (3.36) виконується.

Зауваження 3.4 . Якщо вузли інтерполяції логарифмічно рівновіддалені, тобто виконується умова

$$\tau_j = \tau_1^j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

і, крім того,

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad (\lambda_j(k) - \lambda_q(k)) \ln \tau_1 \notin i2\pi\mathbb{Z}, \quad 0 \leqslant q < j \leqslant n-1,$$

тоді умова (3.36) виконується.

Надалі вважатимемо, що умова (3.36) справджується. Застосовуючи правило Крамера для знаходження невідомих C_{kq}, $q = 1, \dots, n$, системи (3.34), на підставі (3.31) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (3.24), (3.25) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k|\geqslant 0} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} t^{\lambda_q(k)} \varphi_{jk} \exp(ik, x). \tag{3.37}$$

Збіжність ряду (3.37) пов'язана із проблемою малих знаменників. Хоча визначники (3.35), які є знаменниками у (3.37), відмінні від нуля за умовою (3.36), проте вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ і спричиняти розбіжність ряду (3.37).

Приклад 3.1 . Формальний розв'язок задачі

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in Q_T^1, \tag{3.38}$$

$$u(1,x) = 0, \quad u(T,x) = \varphi(x), \quad x \in \Omega^1, \tag{3.39}$$

у якій $\ln T \notin \pi\mathbb{Q}$, зображується формулою

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0 \ln t}{\ln T} + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\sin(k\ln t)}{\sin(k\ln T)} \varphi_k \exp(ikx). \tag{3.40}$$

За теоремою Хінчина [с. 48 у [99]] для довільної додатної функції $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ існує таке додатне число $\theta(g)$, що $\theta(g) \notin \pi\mathbb{Q}$ і нерівність

$$|k\theta(g) - m\pi| < g(|k|) \tag{3.41}$$

виконується для нескінченної кількості пар цілих чисел k, m. Оскільки для фіксованого k нерівність (3.41) може виконуватися лише для скінченної кількості цілих чисел m, то з оцінки

$$|\sin(k\theta(g))| = |\sin(k\theta(g) - m\pi)| \leqslant |k\theta(g) - m\pi|,$$

випливає, що нерівність

$$|\sin(k\theta(g))| < g(|k|)$$

виконується для нескінченної множини $M(\theta(g))$ цілих чисел k. Зазначимо, що

$$\sin(k\theta(g)) \neq 0$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, оскільки $\theta(g) \notin \pi\mathbb{Q}$.

Нехай в умовах (3.39) функція $\varphi(x)$ належить до простору $H(\tau_k)$, $(\tau_k) \in W_1$, і має спеціальний вигляд

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \varphi_k \exp(ikx), \quad \varphi_k \equiv \frac{1}{k\tau_k}.$$

Тоді для розв'язку задачі (3.38), (3.39), зображеного рядом (3.40), одержимо

$$\|t\partial_t u(t,x)|_{t=1}; H(\rho_k)\|^2 \geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{|k\varphi_k|^2\rho_k^2}{\sin^2(k\ln T)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2 \sin^2(k\ln T)},$$

де $(\rho_k) \in W_1$. Виберемо тепер число $T > 1$ таким, що $T = \exp(\theta(g))$, де функція $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ визначається рівністю

$$g(|k|) = \min\{\rho_{|k|}/\tau_{|k|}, \rho_{-|k|}/\tau_{-|k|}\}.$$

Тоді з огляду на нескінченність множини $M(\theta(g))$ отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2 \sin^2(k\ln T)} \geqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2 g^2(|k|)} \geqslant \sum_{k\in M(\theta(g))} 1 = +\infty.$$

Отже, яким би гладким не був простір $H(\tau_k)$, для нього знайдуться функція $\varphi \in H(\tau_k)$ і число $T > 1$ в умовах (3.39) такі, що ряд (3.40) не належить до жодного простору $C^2([1,T]; H(\rho_k))$, $(\rho_k) \in W_1$.

Для того, щоб сума ряду (3.40) належала до простору $C^2([1,T]; H(\rho_k))$ при деякій послідовності $(\rho_k) \in W_1$ (за умови, що довільна функція $\varphi(x)$ належить до $H(\tau_k)$ при фіксованій послідовності $(\tau_k) \in W_1$), достатньо, щоб число $\ln T \notin \pi\mathbb{Q}$ задовольняло оцінку

$$|\sin(k\ln T)| \geqslant C_1(1+|k|)^{-\omega} \tag{3.42}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, де $C_2 > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$. Справді, в цьому випадку для довільної послідовності $(\rho_k) \in W_1$ такої, що $\rho_k \leqslant \tau_k(1+|k|)^{-\omega-2}$, для функції $u(t,x)$, зображеної рядом (3.40), виконується нерівність

$$\|u(t,x); C^2([1,T]; H(\rho_k))\| \leqslant C_3 \sqrt{|\varphi_0\rho_0|^2 + \sum_{k\neq 0} |k^2\varphi_k|^2\rho_k^2/\sin^2(k\ln T)} \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi_k\rho_k|^2(1+|k|)^{2\omega+4}} \leqslant C_4\|\varphi(x); H(\tau_k)\|, \tag{3.43}$$

де додатні сталі C_3, C_4 не залежать від $k \in \mathbb{Z}$.

Завершимо приклад обговоренням питання про те, для яких чисел T може виконуватися нерівність (3.42). Нехай m – таке ціле число, що

$$-\frac{\pi}{2} < k\ln T - m\pi \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки для всіх $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ справджується нерівність [3]

$$|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}\,|x|,$$

то

$$|\sin(k\ln T)| = |\sin(k\ln T - m\pi)| \geqslant \frac{2}{\pi}\,|k\ln T - m\pi| = 2|k|\left|\frac{\ln T}{\pi} - \frac{m}{k}\right|,\ k\neq 0.$$

Тому питання про можливість виконання нерівності (3.42) зводиться до питання про можливість виконання нерівності

$$\left|\frac{\ln T}{\pi} - \frac{m}{k}\right| \geqslant \frac{C_4}{|k|^{\omega-1}}, \tag{3.44}$$

тобто до з'ясування того, як число $\ln T/\pi$ наближається раціональними дробами m/k залежно від величини знаменника $|k|$. У випадку, коли $\ln T/\pi$ – дійсне алгебричне число степеня $d \geqslant 2$, з теорем Ліувілля та Рота [69] випливає, що нерівність (3.44) виконується для всіх раціональних чисел m/k, якщо $\omega = \omega(d)$, де $\omega(2) = 3$ і $\omega(d) > 3$ для $d \geqslant 3$. Із теореми Бореля [69] випливає, що для майже всіх дійсних чисел $T > 1$ нерівність (3.44) виконується при $\omega > 3$ для всіх раціональних чисел m/k.

Приклад 3.2 . Легко перевірити, що визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, задачі з умовами (3.39) для рівняння

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (t,x) \in Q_T^1,$$

обчислюється за формулою

$$\Delta_2(k) = T^{|k|} - T^{-|k|}. \tag{3.45}$$

Для кожного $T > 1$ для визначника (3.45) виконується нерівність

$$|\Delta_2(k)| \geqslant T^{|k|}/2, \tag{3.46}$$

якщо $|k| \geqslant \ln 2/\ln(T^2)$.

Позначимо

$$\lambda_{\max}(k) = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\lambda_j(k)|, \lambda_- = \inf_k \frac{\operatorname{Re}\lambda_1(k)}{\tilde{k}},$$
$$\lambda_+ = \sup_k \frac{\operatorname{Re}\lambda_n(k)}{\tilde{k}}, \quad \lambda_* = \sup_k \frac{\operatorname{Re}\lambda_{\max}(k)}{\tilde{k}}. \tag{3.47}$$

Теорема 3.4 . *Нехай* $\min_{k\in\mathbb{Z}^p}|\Delta(k)| > 0$ *і існує така константа* $\xi \in \mathbb{R}$ *що оцінка справджується*

$$|\Delta(k)| \geqslant \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)|\tilde{k}^{-\xi}(\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n)^{-\Lambda_2\tilde{k}}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{3.48}$$

де $\Lambda_2 = -\min(0;\lambda_-)$. *Тоді для довільних елементів* $\varphi_j \in \mathbf{\Phi}_{n+\xi, g^{\Lambda_2}g_j^{\Lambda_1}}$,

$g_j = (\tau_0 \cdots \tau_{n-1}/\tau_{j+1})$, $g = (\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_n)^{\Lambda_2}$, $\Lambda_1 = \max(0;\lambda_+)$, $j = 0,1,\ldots,n-1$,

задача (3.24), (3.25) *коректна у просторі* $\mathbf{U}_{n,g^{\Lambda_2}h^{\Lambda_1}H}$, $h = \max_{0\leqslant j\leqslant n-1} g_j$, *і розв'язок u задовольняє нерівність*

$$\|u\|^2_{\mathbf{U}_{n,g^{\Lambda_2}h^{\Lambda_1}H}} \leqslant Const\sum_{l=0}^{n-1}\|\varphi_l\|^2_{\mathbf{\Phi}_{n+\xi,g^{\Lambda_2}g_j^{\Lambda_1}}},$$

де функція $H\colon [t_1^*, t_2^*] \to \mathbb{R}$ *визначається формулою*

$$H(t) = \begin{cases} (t_0/t)^{\lambda_+}, & if \quad t \in [t_0; t_2^*]; \\ (t_0/t)^{\lambda_-}, & if \quad t \in [t_1^*; t_0]. \end{cases}$$

Представимо умови існування розв'язку задачі у випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів, тому коли виконуються наступні умови

$$\tau_l = \tau_1^l, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Позначимо

$$w_{q\sigma} = \tau_1^{\lambda_q - \lambda_\sigma} = e^{z_{q\sigma}}, \quad z_{q\sigma} = (\lambda_q - \lambda_\sigma) \ln \tau_1,$$

$$\omega_j = \prod_{q=1}^{j-1} |1 - w_{qj}| \prod_{q=j+1}^{n} |1 - w_{jq}|, \quad \omega_{\min} = \min(|\omega_1|, \ldots, |\omega_n|).$$

Введемо додатну функцію $G\colon [t_1^*, t_2^*] \to \mathbb{R}$ відповідно до формули

$$\frac{1}{G(t)} = \begin{cases} G_1^*(t), & t \in [t_1^*, t_0], \\ G_j(t), & t \in (t_{j-1}, t_j], \quad j = 1, \ldots, n-1, \\ G_2^*(t), & t \in (t_{n-1}, t_2^*], \end{cases} \tag{3.49}$$

де

$$\begin{aligned}
G_1^*(t) &= \max\big((t/t_0)^{\lambda_-}, ((t/t_0)/\tau_1^{2n-5})^{\lambda_-}\big), \\
G_1(t) &= \max\big((t/t_0)^{\lambda_+}, G_1^*(t)\big), \\
G_2(t) &= \max\big(((t/t_0)/\tau_1)^{\lambda_+}\tau_1^{\lambda_-}, G_1(t)\big), \\
G_q(t) &= \max_{l=2,\ldots,q-1}\big(((t/t_0)/\tau_l)^{\lambda_+}\tau_l^{\lambda_-}, ((t/t_0)/\tau_{q-1})^{\lambda_+}\tau_l^{\lambda_-}, G_2(t)\big), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad q = 3, \ldots, n-1, \\
G_2^*(t) &= \max\big((t/t_0)^{\lambda_+}, ((t/t_0)/\tau_1)^{\lambda_+}\tau_1^{\lambda_-}, ((t/t_0)/\tau_1^{2n-5})^{\lambda_-}, \\
&\qquad \max_{l=2,\ldots,n-1}\big(((t/t_0)/\tau_l)^{\lambda_+}\tau_l^{\lambda_-}, ((t/t_0)/\tau_1^{2n-5})^{\lambda_+}\tau_l^{\lambda_-}, \\
&\qquad \max_{q=n,\ldots,3(n-2)}\big(((t/t_0)/\tau_1^{q-1})^{\lambda_+}\tau_l^{\lambda_-}, ((t/t_0)/\tau_1^{q})^{\lambda_-}\tau_1^{\lambda_-}\big)\big)\big).
\end{aligned}$$

Теорема 3.5 . *Нехай* $\min_{k\in\mathbb{Z}^p} \omega_{\min} > 0$ *і нехай для дійсної сталої* q_0, *додатної сталої* g_0 *виконуються оцінки*

$$\omega_{\min} \geqslant \tilde{k}^{q_0} g_0^{\tilde{k}}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.50}$$

Тоді, для довільних елементів $\varphi_j \in \mathbf{\Phi}_{n,(t_0/t_l)^{\lambda_-}}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *задача* (3.24), (3.25) *коректна у просторі* $\mathbf{U}_{n,g_0G}$, *і розв'язок u задовольняє нерівність*

$$\|u\|^2_{\mathbf{U}_{n,g_0G}} \leqslant Const \sum_{j=0}^{n-1} \|\varphi_j\|^2_{\mathbf{\Phi}_{n-q_0,(t_0/t_l)^{\lambda_-}}},$$

де функція G визначена формулою (3.49).

За допомогою метричного підходу [7, 69, 70] встановлено, що нерівність

$$|\Delta_n(k)| \geqslant g(k) \tag{3.51}$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [1; T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо

$$g(k) = \prod_{j=1}^{n} t_j^{\mu_j(k)} |V(k)|(1 + |k|)^{-\omega}, \quad \omega > (p-1)n(n-1)/2,$$

де $V(k) = \prod\limits_{n \geqslant j > q \geqslant 1} (\lambda_j(k) - \lambda_q(k))$ – дискримінант полінома (3.26), а γ – число з формули (3.28). Подібна оцінка зберігається (див. теорему 2 нижче) і для випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції $t_1, \ldots, t_n$ в умовах (3.25). Для доведення теорем 3.6, 3.7 використано допоміжні леми 2.4, 2.6 про оцінки мір виняткових множин гладких функцій спеціального вигляду. У теоремі 3.8 встановлено точні оцінки знизу для визначника $\Delta_n(k)$ на основі допоміжної леми 2.6 про оцінки скалярних добутків. Підкреслимо, що для визначника багатоточкової задачі (3.24) для рівняння типу Ейлера метричні оцінки знизу отримано у науковій літературі вперше, ці оцінки не можна отримати із раніше встановлених оцінок у [6,8,60,61,69,70] для рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо метричні оцінки для характеристичного визначника в кубі $[1, T]^n$. Застосуємо лему 2.4 для встановлення оцінок знизу для визначника (3.35).

Теорема 3.6 . *Нехай для кожного корені многочлена* (3.26) *пронумеровані, як у* (3.27)*. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [1, T]^n$ *нерівність* (3.51) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів , якщо* $g(k)$ *визначена формулою*

$$g(k) = |V(k)|\,(1+|k|)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\mathrm{Re}\lambda_j(k)}, \qquad \omega > (p+\gamma)n(n-1)/2,$$

де γ *– число з формули* (3.28).

Доведення. З огляду на лему Бореля–Кантеллі [69, 70], для доведення теореми 1 достатньо встановити при $\omega > (p+\gamma)n(n-1)/2$ збіжність ряду

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{t} \in [1, T]^n : |\Delta_n(k)| < |V(k)|\,(1+|k|)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)} \right\}. \quad (3.52)$$

Із кожного j-го рядка, $1 \leqslant j \leqslant n$, визначника $\Delta_n(k)$ винесемо множник $t_j^{\lambda_j(k)}$, отримаємо рівність

$$\Delta_n(k) = \Gamma_n(k) \prod_{j=1}^{n} t_j^{\lambda_j(k)},\ k \in \mathbb{Z}^p, \quad (3.53)$$

де символом $\Gamma_n(k)$ позначено визначник $\det \left\| t_j^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)} \right\|_{j,q=1}^{n}$ з одиничною головною діагоналлю. Із рівності (3.53) випливає, що ряд (3.52) збігається тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k), \quad (3.54)$$

де

$$B(k) := \{\mathbf{t} \in [1, T]^n : |\Gamma_n(k)| < |V(k)|\,(1+|k|)^{-\omega}\},\ k \in \mathbb{Z}^p.$$

Встановимо збіжність ряду (3.54). Для цього зауважимо, що

$$B(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} B_q(k) \quad (3.55)$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, де символом $B_q(k)$, $q = 2, \ldots, n$, позначено множину

$$\{\mathbf{t} \in [1, T]^n : |\Gamma_q(k; \tau_q)| < \nu_q(k),\ |\Gamma_{q-1}(k; \tau_{q-1})| \geqslant \nu_{q-1}(k)\}.$$

Тут $\Gamma_q(k; \tau_q)$, $q = 1, \ldots, n$, – визначник, який отримується з визначника $\Gamma_n(k)$ викреслюванням останніх $n - q$ рядків та останніх $n - q$ стовпців, $\tau_q = (t_1, \ldots, t_q)$, $q = 1, \ldots, n$, і числа $\nu_q(k)$ визначаються рівностями

$$\nu_1(k) = 1, \nu_q(k) = \frac{\prod_{j=2}^{q} |\Lambda_j(k)|}{(1 + |k|)^{(p+\gamma+\varepsilon)q(q-1)/2}}, q = 2, \ldots, n,$$

де $\varepsilon = \omega / C_n^2 - p - \gamma$, $\Lambda_q(k) = (\lambda_q(k) - \lambda_1(k)) \ldots (\lambda_q(k) - \lambda_{q-1}(k))$, $q = 2, \ldots, n$.

Із включення (3.55) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k) \leqslant \sum_{q=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k). \tag{3.56}$$

Згідно з теоремою Фубіні, для кожного $q = 2, \ldots, n$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k; \mathbf{t}_q)\, dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \tag{3.57}$$

де $\mathbf{t}_q = (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $q = 2, \ldots, n$, а символом $B_q(k; \mathbf{t}_q)$, $q = 2, \ldots, n$, позначено множину $\{t_q \in [1, T] : (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_q, t_{q+1}, \ldots, t_n) \in B_q(k)\}$.

Застосуємо лему 2.6 для оцінки зверху мір множин $B_q(k; \mathbf{t}_q)$, $q = 2, \ldots, n$. Для цього зауважимо, що у функції $\Gamma_q(k; \tau_q)$ як функції від змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$) модулі показників $|\lambda_q(k) - \lambda_j(k)|$ не перевищують $2C_1(1 + |k|^\gamma)$, де C_1 – стала з формули (3.29).

Побудуємо лінійні диференціальні вирази порядку $q - 1$ у вигляді добутку диференціальних виразів першого порядку:

$$R_{q-1}\Big(\quad t_q \frac{d}{dt_q}, k \quad \Big) = \prod_{j=1}^{q-1} \Big(\quad t_q \frac{d}{dt_q} + \lambda_q(k) - \lambda_j(k) \quad \Big), q = 2, \ldots, n.$$

Легко перевірити, що $(\, t\frac{d}{dt} + \lambda\,)\,[t^{-\lambda}] = 0$, тому для кожного $q = 2, \ldots, n$ правильними є рівності

$$R_{q-1}\Big(\quad t_q\frac{d}{dt_q}, k\quad\Big)\Big[\quad t_q^{\lambda_j(k)-\lambda_q(k)}\quad\Big] = 0, j = 1, \ldots, q-1,$$

$$R_{q-1}\Big(\quad t_q\frac{d}{dt_q}, k\quad\Big)[\,1\,] = \Lambda_q(k).$$

Розвиваючи визначники $\Gamma_q(k;\tau_q)$, $q = 2, \ldots, n$, за елементами останнього рядка, отримаємо такі рівності:

$$\Gamma_q(k;\tau_q) = \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+q}t_q^{\lambda_j(k)-\lambda_q(k)}\Gamma_{q,j}(k;\tau_{q-1}), q = 2, \ldots, n, \tag{3.58}$$

де $\Gamma_{q,j}(k;\tau_{q-1})$ – алгебричне доповнення елемента, що розміщений на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Gamma_q(k;\tau_q)$. Із розвинень (3.58) і лінійності диференціальних виразів R_{q-1} випливають такі рівності:

$$R_{q-1}\Big(\quad t_q\frac{\partial}{\partial t_q}, k\quad\Big)\Gamma_q(k;\tau_q) = \Lambda_q(k)\Gamma_{q-1}(k;\tau_{q-1}), q = 2, \ldots, n. \tag{3.59}$$

Якщо $\mathbf{t} \in B_q(k)$, $q = 2, \ldots, n$, то з формул (3.59) та означення множин $B_q(k)$, $q = 2, \ldots, n$, випливає, що

$$\forall t_q \in [1, T]\left|R_{q-1}\,(\, t_q\frac{\partial}{\partial t_q}, k\,)\,\Gamma_q(k;\tau_q)\right| \geqslant \nu_{q-1}(k)\,|\Lambda_q(k)|\,. \tag{3.60}$$

Оскільки $\deg_\mu R_{q-1}(\mu, k) = q-1$, а модуль коефіцієнта при $(\, t_q\frac{\partial}{\partial t_q})^{q-1-j}$, $j = 0, 1, \ldots, q-1$, у диференціальному виразі $R_{q-1}(t_q\partial/\partial t_q, k)$ не перевищує $C_{16}(1+|\,k\,|)^{\gamma j}$, то з оцінок (3.60) і леми 3 отримуємо, що

$$\begin{aligned}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}B_q(k;\mathbf{t}_q) \leqslant C_{17}(1+|k|)^{\gamma}\left(\frac{\nu_q(k)}{\nu_{q-1}(k)\,|\Lambda_q(k)|}\right)^{1/(q-1)} &\leqslant \\ \leqslant C_{18}(1+|\,k\,|)^{-p-\varepsilon}, q = 2, \ldots, n,&\end{aligned} \tag{3.61}$$

де додатна стала C_{18} не залежить від вибору значень $\mathbf{t}_q = (t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) \in [1, T]^{n-1}$. Тоді з формул (3.57), (3.61) отримуємо оцінки

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}B_q(k) \leqslant C_{18}T^{n-1}(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\ q = 2, \ldots, n,\ k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.62}$$

Із нерівностей (3.56) і (3.62) випливає збіжність ряду (3.54). $\square$

Розглянемо метричні оцінки для характеристичного визначника на кривій Веронезе. Встановимо оцінки знизу для визначника $\Delta_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у частковому випадку логарифмічно рівновіддаленних вузлів

$$t_j = t_1^j, j = 1, \ldots, n, t_1 > 1, \tag{3.63}$$

тобто вузли $t_1, \ldots, t_n$ є членами геометричної прогресії зі знаменником $t_1 \in (1, T^{1/n}]$. У цьому випадку визначник (7) залежить від t_1 і обчислюється за формулою

$$\Delta_n(k) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ t_1^{2\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{2\lambda_n(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{n\lambda_n(k)} \end{vmatrix} = t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ t_1^{\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{(n-1)\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{(n-1)\lambda_n(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \prod_{n \geqslant j > q \geqslant 1} \left(t_1^{\lambda_j(k)} - t_1^{\lambda_q(k)} \right), \quad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.64}$$

Тут враховано формулу для визначника Вандермонда [12] чисел $t_1^{\lambda_1(k)}, \ldots, t_1^{\lambda_n(k)}$. Зауважимо, що твердження теореми 3.6 для оцінки знизу визначника (3.35) не можна застосувати для оцінки визначника (3.64), оскільки цей визначник залежить від вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_1^2, \ldots, t_1^n)$, що знаходиться на кривій Веронезе:

$$\{(t_1, t_1^2, \ldots, t_1^n) \in \mathbb{R}^n : t_1 \in (1, T^{1/n}]\},$$

яка має нульову n-вимірну міру Лебега, $n \geqslant 2$. Застосування одновимірної міри Лебега дозволяє встановити майже всюди на кривій Веронезе таку ж оцінку знизу для визначника (3.64), як і в теоремі 3.6 для визначника (3.35). Таким чином, крива Веронезе успадковує оцінку з куба $[1, T]^n$.

Теорема 3.7 . *Нехай справджуються рівності* (3.63) *і для кожного корені многочлена* (3.26) *пронумеровані, як у* (3.27). *Тоді для визначника*

(3.64) *нерівність* (3.51) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ *для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*, якщо* $g(k)$ *визначена формулою*

$$g(k) = |V(k)|\,(1+|k|)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\mathrm{Re}\lambda_j(k)}, \omega > (p+\gamma)n(n-1)/2,$$

де γ *– число з формули* (3.28).

Доведення. Нескладними перетвореннями формули (3.64) одержуємо

$$\Delta_n(k) = t_1^{\lambda_1(k)+2\lambda_2(k)+\ldots+n\lambda_n(k)} \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \left(1 - t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}\right),\ k \in \mathbb{Z}^p. \quad (3.65)$$

Запровадимо функції

$$\psi(k,t_1) = \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \psi_{jq}(k,t_1),\ k\in\mathbb{Z}^p,\ t_1 \in (1, T^{1/n}],$$

$$\psi_{jq}(k,t_1) = 1 - t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)},\ n \geqslant j > q \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}^p,$$

диференціальні вирази

$$R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right) = t_1\frac{d}{dt_1} + \lambda_j(k) - \lambda_q(k),\ n \geqslant j > q \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}^p,$$

та множини

$$E(k) = \{t_1 \in (1, T^{1/n}] : |\psi(k,t_1)| < \eta(k)\},\ k \in \mathbb{Z}^p,$$

$$E_{jq}(k) = \{t_1 \in (1, T^{1/n}] : |\psi_{jq}(k,t_1)| < \eta_{jq}(k)\},\ n \geqslant j > q \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\eta(k) = \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \eta_{jq}(k)$, $\eta_{jq}(k) = |k|^{-(p+\gamma)-\varepsilon}\,|\Lambda_{jq}(k)|$, $\Lambda_{jq}(k) = \lambda_j(k) - \lambda_q(k)$. Легко перевірити, що $(\,t\,\frac{d}{dt} + \lambda\,)\,[1 - t^{-\lambda}] = \lambda$, тому

$$\left| R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)\psi_{jq}(k,t_1)\right| = |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)|\,,\ n \geqslant j > q \geqslant 1,\ k \in \mathbb{Z}^p. \quad (3.66)$$

Із рівностей (3.66) на підставі леми 3 та оцінок

$$|\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \leqslant 2C_1(1 + |k|^{\gamma}),$$

де C_1 – стала з формули (3.29), отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_{jq}(k) \leqslant C_{19}(1+|k|)^{\gamma} \frac{\eta_{jq}(k)}{|\Lambda_{jq}(k)|} \leqslant C_{20}|k|^{-p-\varepsilon}, n \geqslant j > q \geqslant 1, \ k \in \mathbb{Z}^p. \tag{3.67}$$

Оскільки $E(k) \subset \bigcup_{n\geqslant j>q\geqslant 1} E_{jq}(k)$, то

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(k) \leqslant \sum_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E_{jq}(k). \tag{3.68}$$

Тоді з нерівностей (3.67), (3.68) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k\in\mathbb{R}^p} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(k). \tag{3.69}$$

Тому за лемою Бореля–Кантеллі [69, 70] зі збіжності ряду (3.69) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{Z}$) чисел $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ нерівність $|\psi(k,t_1)| \geqslant \eta(k)$, а отже, й нерівність

$$|\Delta_n(k)| \geqslant \eta(k) t_1^{\mathrm{Re}\,(\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n)} = \eta(k) t_1^{\mathrm{Re}\lambda_1} t_2^{\mathrm{Re}\lambda_2} \ldots t_n^{\mathrm{Re}\lambda_n} \tag{3.70}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$. □

Зауваження 3.5 . У формулюваннях теорем 3.6, 3.7 у вирази для оцінюючої функції $g(k)$ входить множником модуль $|V(k)|$ дискримінанта полінома (3.26). Для нього можна встановити степеневі (щодо $|k|$) оцінки знизу для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів полінома

$$A_n(z_1,\ldots,z_p) = \sum_{|s|\leqslant N_n} A_n^s z_1^{s_1} \ldots z_p^{s_p}.$$

Нехай $r_q = (0,\ldots,0,N_n,0,\ldots,0)$, $q=1,\ldots,p$, – мультиіндекс довжини p, на q-му місці якого знаходиться N_n, вектор $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = (A_n^{r_1},\ldots,A_n^{r_p}) \in \mathbb{C}^p$, складений з коефіцієнтів A_n^s, які фігурують при найстарших похідних виразу $A_n(D_x)$, $j=1,\ldots,n$. Відомо [60,70], що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{Z}$) векторів $\mathbf{k}$ нерівність $|V(k)| \geqslant (1+|k|)^{-\delta}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів , якщо $\delta > (n-1)(p/2 - N_n)$.

Розглянемо рівномірні оцінки для характеристичного визначника на симплексі. У випадку, коли дійсні частини коренів многочлена (3.26) мають степеневу поведінку на нескінченності, можна встановити оцінки знизу для характеристичних визначників, які є сильнішими порівняно з оцінками із теорем 3.6, 3.7 і виконуються для всіх векторів із симплекса Π^n. Для цього використаємо таку лему.

Теорема 3.8 . *Нехай для коренів многочлена* (3.26) *виконуються рівності*

$$\mathrm{Re}\lambda_j(k) = \mu_j |k|^\gamma + \mathrm{o}(|k|^\gamma),\ |k| \to \infty, j = 1, \ldots, n, \gamma > 0, \tag{3.71}$$

де $\mu_1 < \ldots < \mu_n$. Тоді для всіх векторів $\mathbf{t} \in \Pi^n$ нерівність (3.51) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $g(k) = \frac{1}{2}\prod\limits_{j=1}^{n} t_j^{\mathrm{Re}\lambda_j(k)}$.*

Доведення. Запишемо розвинення для визначника $\Delta_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у вигляді суми $n!$ доданків:

$$\Delta_n(k) = \sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}\,\omega} t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \tag{3.72}$$

де $\mathrm{inv}\,\omega$ – кількість інверсій у перестановці $\omega = (i_1, \ldots, i_n)$. Оскільки

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| = \exp\left(\mathrm{Re}\lambda_{i_1}(k) \ln t_1 + \ldots + \mathrm{Re}\lambda_{i_n}(k) \ln t_n\right),$$

то з рівностей (3.71) одержимо

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| = \exp\left((\mu_{i_1} \ln t_1 + \ldots + \mu_{i_n} \ln t_n + \beta_\omega(k))|k|^\gamma\right), \tag{3.73}$$

де $\beta_\omega(k), \omega \in S_n,$ – нескінченно малі послідовності при $|k| \to \infty$. Позначимо

$$\delta = \max\{\mu_{i_1} \ln t_1 + \ldots + \mu_{i_n} \ln t_n : \omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_{n,0}\},$$

де $S_{n,0} \backslash \{\omega_0\}$, $\omega_0 = (1, \ldots, n)$. Тоді з рівностей (3.73) отримуємо оцінки

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| \leqslant \exp\left((\delta + \beta_\omega(k))|k|^\gamma\right), \omega = (i_1, \ldots, i_n) \in S_{n,0},$$

$$\left|\frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)}\ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}}\right| \leqslant \frac{\exp\left((\delta+\beta_\omega(k))|k|^\gamma\right)}{\exp\left((\mu_1\ln t_1+\ldots+\mu_n\ln t_n+\beta_{\omega_0}(k))|k|^\gamma\right)},$$
$$\omega\in S_{n,0}. \tag{3.74}$$

За умовою теореми $\mu_1<\ldots<\mu_n$, $\ln t_1<\ldots<\ln t_n$, тому з леми 4 випливає, що $\delta<\mu_1\ln t_1+\ldots+\mu_n\ln t_n$. Звідси, враховуючи, що $\gamma>0$, одержимо

$$\lim_{|k|\to\infty}\left|\frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)}\ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}}\right|=0,\qquad \omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_{n,0}.$$

Таким чином, існує $K>0$, що для всіх таких, що $|k|>K$, виконується оцінка $\left|\frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)}\ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}}\right|\leqslant\frac{1}{2(n!-1)}$, $\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_{n,0}$. Тоді з розвинення (3.72) та нерівності трикутника випливає, що для всіх векторів $\mathbf{t}\in\Pi^n$ виконується оцінка знизу

$$|\Delta_n(k)|=\left|t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}\right|\cdot\left|1+\sum_{\omega=(i_1,\ldots,i_n)\in S_{n,0}}(-1)^{\operatorname{inv}\omega}\frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)}\ldots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}}\right|\geqslant$$

$$\geqslant\left|t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}\right|\cdot\left(1-\frac{n!-1}{2(n!-1)}\right)=\frac{1}{2}t_1^{\operatorname{Re}\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\operatorname{Re}\lambda_n(k)},$$

якщо $|k|>K$. □

Зауваження 3.6 . Із розвинення (3.72) і формул (3.74) випливає, що для всіх векторів $\mathbf{t}\in\Pi^n$ виконується така оцінка зверху:

$$|\Delta_n(k)|\leqslant\left|t_1^{\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\lambda_n(k)}\right|\cdot\left|1+\frac{n!-1}{2(n!-1)}\right|=\frac{3}{2}t_1^{\operatorname{Re}\lambda_1(k)}\ldots t_n^{\operatorname{Re}\lambda_n(k)},\ |k|>K. \tag{3.75}$$

Оцінка (3.75) підтверджує точність оцінки знизу в теоремі 3.8.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника двоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для лінійного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами та досліджено коректність розв'язку.

Використовуючи нерівності $-L_3 \leqslant -\lambda_1^- \leqslant -\lambda_2^- \leqslant \lambda_1^+ \leqslant \lambda_2^+ \leqslant L_3$ і $-2L_2 \leqslant -\lambda_0^- \leqslant \lambda_0^+ \leqslant 0$ можна порівняти простори отримані в теоремі 3.1 та теоремі 3.2. Для $j=1$, тобто $t_0 < t_1 \leqslant 1$, отримуємо

$$\begin{aligned}
&t_0^{-\lambda_1^+} \leqslant t_0^{-L_3}, \quad t_1^{-\lambda_1^+} \leqslant t_1^{-L_3}, \quad t^{\lambda_1^-} \geqslant t^{L_3} \quad \text{для} \quad t \leqslant t_1, \\
&t^{\lambda_2^-} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t_1 \leqslant t \leqslant 1, \quad t^{-\lambda_2^+} t_1^{\lambda_0^-} \geqslant t^{-L_3} t_1^{2L_2} \quad \text{для} \quad t \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Аналогічно отримуються такі ж нерівності для $j = 2, 3$. З отриманих нерівностей можна побачити, що простори $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{0j}}$ та $\Phi_{(p^*+3)/2, g_{1j}}$ при виконанні умови (3.18) є ширшими, а простори розв'язків U_{2,G_j} — вужчими в теоремі 3.2 у порівнянні з просторами теореми 3.1.

У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника багатоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для лінійного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами. Застосовано метричний підхід [61, 80, 81] для встановлення таких оцінок. Розглянуто часткові випадки задачі, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію або корені характеристичного полінома мають певну поведінку на нескінченності. Встановлені умови коректності розв'язку задачі. Результати роботи можна перенести на випадок інтерполяційної двоточкової задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

РОЗДІЛ 4
ЛОКАЛЬНІ ЗАДАЧІ НІКОЛЕТТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

4.1. Рівняння другого порядку

У підрозділі 4.1 дисертації досліджено задачу про знаходження такого розв'язку рівняння типу Ейлера другого порядку, для якого виконуються умови Ніколетті за виділеною змінною t та умови 2π-періодичності за іншими змінними $x_1, \ldots, x_p$.

Розглядаємо задачу Ніколетті:

$$\big[t^2\partial_t^2 + ta(\partial_x)\partial_t + b(\partial_x)\big]u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (t_0^*, t_1^*) \times \Omega_p, \tag{4.1}$$

$$u(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad u_t(t_1,x) = \varphi_1(x), \quad t_0, t_1 \in [t_0^*, t_1^*], \quad x \in \Omega_p, \tag{4.2}$$

де $0 < t_0^* < t_1^*$. В умовах (4.2) вузли t_0, t_1 є різними, можливі такі випадки розташування вузлів: а) $t_0 < t_1$, б) $t_1 < t_0$. Будемо припускати, що рівняння (4.1) є таким, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується умова

$$(a(ik) - 1)^2 - 4b(ik) \neq 0. \tag{4.3}$$

Ряд

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\, e^{(ik,x)}, \tag{4.4}$$

є розв'язком задачі (4.1), (4.2) з простору $C^2([t_0^*, t_1^*]; \mathcal{T}')$ (за умови, що $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{T}'$) тоді і лише тоді, коли кожен його коефіцієнт $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком двоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння Ейлера

$$t^2\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + ta(ik)\frac{du_k(t)}{dt} + b(ik)u_k(t) = 0, \quad t \in (t_0^*, t_1^*), \tag{4.5}$$

$$u_k(t_0) = \varphi_{0k}, \quad u'_k(t_1) = \varphi_{1k}, \tag{4.6}$$

де φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, відповідно. З умови (4.3) випливає, що корені $\lambda_1(k), \lambda_2(k)$ характеристичного рівняння

$$\lambda(\lambda - 1) + a(ik)\lambda + b(ik) = 0$$

є простими.[1] Тому функції $t^{\lambda_1(k)}, t^{\lambda_2(k)}$ утворюють на (t_0^*, t_1^*) фундаментальну систему розв'язків рівняння (4.5). Таким чином, розв'язок задачі (4.5), (4.6) допускає зображення

$$u_k(t) = C_{1k} t^{\lambda_1(k)} + C_{2k} t^{\lambda_2(k)}. \tag{4.7}$$

Сталі C_{1k}, C_{2k} у формулі (4.7) визначаються на підставі умов (4.6) з лінійної системи рівнянь

$$\begin{cases} C_{1k} t_0^{\lambda_1(k)} + C_{2k} t_0^{\lambda_2(k)} = \varphi_{0k}, \\ C_{1k} \lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)-1} + C_{2k} \lambda_2(k) t_1^{\lambda_2(k)-1} = \varphi_{1k}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Очевидно, що задача (4.5), (4.6) має тільки один розв'язок, якщо система (4.8) має тільки один розв'язок, тобто її визначник $\delta(k)$ відмінний від нуля. Якщо $\delta(k) \neq 0$, то система (4.8) має єдиний розв'язок

$$\begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k) t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Підставляючи вирази (4.9) у зображення (4.7), отримуємо

$$u_k(t) = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k) t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Звідси випливає таке твердження.

[1] вважаємо, що ці корені занумеровані так, що $\operatorname{Re} \lambda_1(k) \leqslant \operatorname{Re} \lambda_2(k)$.

Теорема 4.1 . *Нехай виконується умова* (4.3). *Для довільних* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathcal{T}'$ *задача* (4.1), (4.2) *має тільки один розв'язок* $u(t,x) \in C^2([t_0^*, t_1^*], \mathcal{T}')$ *тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \qquad \delta(k) \neq 0. \tag{4.11}$$

Цей розв'язок зображується рівністю

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left[\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k) t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix} \right] e^{(ik,x)}. \tag{4.12}$$

Приклад 4.1 . Для задачі Ніколетті (4.1), (4.2), у якій кількість p просторових змінних дорівнює 1,

$$a(\partial_x) = 1, \quad b(\partial_x) = \partial_x^2 - 1, \quad t_0 = 1, \quad t_1 > 1, \quad t_0^* \leqslant 1, \quad t_1^* \geqslant t_1,$$

визначник $\delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, обчислюється за формулою

$$\delta(k) = \frac{\sqrt{k^2+1}}{t_1} \left(t_1^{\sqrt{k^2+1}} + t_1^{-\sqrt{k^2+1}} \right) \geqslant \frac{\sqrt{k^2+1}}{t_1} t_1^{\sqrt{k^2+1}} \neq 0,$$

тому для цієї задачі умова (4.11) виконується.

Приклад 4.2 . Для задачі Ніколетті (4.1), (4.2), у якій кількість p просторових змінних дорівнює 1,

$$a(\partial_x) = 1, \quad b(\partial_x) = -\partial_x^2, \quad t_0 = 1, \quad t_1 = e^{\pi/2}, \quad t_0^* \leqslant 1, \quad t_1^* \geqslant e^{\pi/2},$$

визначник $\delta(k)$ для непарних k дорівнює нулю. Дійсно,

$$\delta(k) = \frac{ik}{t_1} \left(t_1^{ik} + t_1^{-ik} \right) = ik t_1^{-ik-1} \left(t_1^{2ik} + 1 \right) |_{t_1 = e^{\pi/2}} =$$

$$= ike^{-(ik+1)\pi/2} \left(e^{ik\pi} + 1 \right) = 0.$$

Для цієї задачі умова (4.11) порушується.

Зауваження 4.1 . Якщо $\delta(k^0) = 0$ для деякого $k^0 \in \mathbb{Z}^p$, то задача (4.5), (4.6) для цього ж значення $k^0 \in \mathbb{Z}^p$ має неєдиний розв'язок $u_{k^0}(t)$, якщо

$$\varphi_{1k^0} = (\lambda_1(k_0)t_1^{\lambda_1(k_0)-1}/t_0^{\lambda_1(k_0)})\varphi_{0k^0}.$$

Для цього розв'язку $u_{k^0}(t)$ виконується наступне зображення

$$u_{k^0}(t) = \frac{t^{\lambda_1(k^0)}t_0^{\overline{\lambda}_1(k^0)} + t^{\lambda_2(k^0)}t_0^{\overline{\lambda}_2(k^0)}}{\left|t_0^{\lambda_1(k^0)}\right|^2 + \left|t_0^{\lambda_2(k^0)}\right|^2}\varphi_{0k^0} + \left(t^{\lambda_1(k^0)}t_0^{\lambda_2(k^0)} - t^{\lambda_2(k^0)}t_0^{\lambda_1(k^0)}\right)C,$$

де C — довільна комплексна стала, а символ $\overline{\lambda}$ означає число, комплексно спряжене до λ.

Дослідимо тепер питання про приналежність розв'язку (4.12) до просторів типу $U_{2,G}$. Для цього потрібно встановити оцінки зверху для функцій (4.10) та їхніх похідних. Спочатку розглянемо кілька факторизацій матриці системи (4.8), що залежать від випадків розташування вузлів інтерполяції.

Випадок 1. Якщо $t_0 < t_1 \leqslant 1$ або $t_1 < t_0 \leqslant 1$, то використовуватимемо факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k) & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

де $\tau = t_1/t_0$, або факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1(k) & \lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Випадок 2. Якщо $t_0 \leqslant 1 \leqslant t_1$ або $t_1 \leqslant 1 \leqslant t_0$, то використовуватимемо факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

або факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 1 \\ \lambda_1(k) & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Випадок 3. Якщо $1 \leqslant t_0 < t_1$ або $1 \leqslant t_1 < t_0$, то використовуватимемо факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

або факторизацію

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & t_0^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)-1} & \lambda_2(k)t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & 1 \\ \lambda_1(k) & \lambda_2(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

На підставі факторизацій (4.13)–(4.18) із формули (4.10) отримуємо зображення для функції $u_k(t)$ для різних випадків розташувань вузлів t_0, t_1.

Випадок 1. Якщо $t_0 < t_1 \leqslant 1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}} \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \\ -\lambda_1(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

якщо ж $t_1 < t_0 \leqslant 1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k)} \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & -1 \\ -\lambda_1(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}. \tag{4.20}$$

Випадок 2. Якщо $t_0 \leqslant 1 \leqslant t_1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \\ -\lambda_1(k) t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

якщо ж $t_1 \leqslant 1 \leqslant t_0$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k) t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & -1 \\ -\lambda_1(k) & t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Випадок 3. Якщо $1 \leqslant t_0 < t_1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}} \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -1 \\ -\lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

якщо ж $1 \leqslant t_1 < t_0$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k)} \begin{pmatrix} \lambda_2(k) & -1 \\ -\lambda_1(k) & \tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Істотною характеристикою наведених зображень є те, що в кожному з розглянутих випадків модулі виразів $\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}$, $\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}$, $t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}$, $t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}$, $t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}$, $t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}$, які входять до квадратних матриць у формулах (4.19)–(4.24), є меншими за одиницю.

Введемо величини $\lambda_3^*(k)$, $\lambda_4^*(k)$, $\lambda_5^*(k)$ за допомогою формул

$$\begin{aligned}
&\lambda_3^*(k) = \max_r |\lambda_r(k)|^2, \ \lambda_4^*(k) = \max_r |\lambda_r(k)|^4, \\
&\lambda_5^*(k) = \max_r |(\lambda_r(k) - 1)\lambda_r(k)^2|^2.
\end{aligned}$$

На основі рівностей (4.19)–(4.24) для похідних $u_k^{(l)}(t)$, $l = 0, 1, 2$, розв'язку $u_k(t)$ задачі (4.5), (4.6) отримуємо наступні оцінки.

Випадок 1. Якщо $t_0 < t_1 \leqslant 1$, то

$$8\lambda_{l+3}^*(k) \frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}\right|^2} \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_1, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_1, \end{cases} \tag{4.25}$$

якщо $t_1 < t_0 \leqslant 1$, то

$$8\lambda_{l+3}^*(k) \frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k)\right|^2} \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_0, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Випадок 2. Якщо $t_0 \leqslant 1 \leqslant t_1$, то

$$8\lambda_{l+3}^*(k) \frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}\right|^2} \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant 1, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.27}$$

якщо $t_1 \leqslant 1 \leqslant t_0$, то

$$8\lambda_{l+3}^*(k) \frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k)\right|^2} \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant 1, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.28}$$

Випадок 3. Якщо $1 \leqslant t_0 < t_1$, то

$$8\lambda^*_{l+3}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k)-\lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}\right|^2} \geqslant \begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_0,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_0.\end{cases} \tag{4.29}$$

якщо ж $1 \leqslant t_1 < t_0$, то

$$8\lambda^*_{l+3}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}-\lambda_1(k)\right|^2} \geqslant \begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_1,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_1.\end{cases} \tag{4.30}$$

Наведемо приклад, що показує випадки існування малих знаменників у формулах (4.25)–(4.30), що спричиняють розбіжність ряду (4.4), який зображує розв'язок задачі (4.1), (4.2). Для цього використаємо отримані допоміжні твердження про наближення чисел раціональними дробами.

Приклад 4.3 . Запишемо визначник для задачі Ніколетті (4.1), (4.2), у якій кількість p просторових змінних дорівнює 1,

$$a(\partial_x)=1, \quad b(\partial_x)=-\partial_x^2, \quad t_0=1.$$

$$\delta(k)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda(k)_1 t_1^{\lambda(k)_1-1} & \lambda(k)_2 t_1^{\lambda(k)_2-1}\end{vmatrix}=t_1^{\lambda(k)_1-1}(\lambda_2(k)t_1^{\lambda(k)_2-\lambda(k)_1}-\lambda_1(k)).$$

Згідно коефіцієнтів задачі $\lambda_1(k)=-\lambda_2(k)=ik$. Звідси, визначник запишеться у наступному вигляді

$$|\delta(k)|=|t_1^{ik-1}|\cdot|ikt_1^{2ik}+ik|=|t_1^{ik-1}|\cdot|k|\cdot|e^{2ik\ln t_1}+1|,$$

оскільки $t_1^{\lambda(k)_1-1}\neq 0$. Якщо прийняти $t_1>t_0=1$, то

$$|\delta(k)|\leqslant|k|\cdot|e^{2ik\ln t_1}+1|.$$

За допомогою тригонометричних перетворень отримуємо

$$|e^{2ix}+1|^2=(\cos 2x+1)^2+\sin^2 2x=$$

$$= 2 + 2\cos 2x = 2(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) = 4\cos^2 x,$$

отже

$$|e^{2ik\ln t_1} + 1| = 2|\cos k\ln t_1|. \tag{4.31}$$

Використовуючи нерівність $|\sin x| \leqslant |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$ можемо записати

$$|\cos(k\ln t_1)| = \left|\sin\left(k\ln t_1 + \tfrac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(k\ln t_1 + \tfrac{\pi}{2} + m\pi\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|k\ln t_1 + \tfrac{\pi+2m\pi}{2}\right| = \left|\tfrac{k\pi}{2}\right| \cdot \left|\tfrac{2\ln t_1}{\pi} + \tfrac{2m+1}{k}\right|.$$

Напряму застосувати теорему Хінчина (2.3) не можна, оскільки чисельник $2m + 1$ може набувати лише непарних значень.

Запишемо ξ у вигляді простого ланцюгового дробу

$$\xi_0 + \cfrac{1}{\xi_1 + \frac{1}{\xi_2 + \cdots}},$$

де $\xi_i, \ i \geqslant 1$ – додатні цілі числа.

n-м наближення ланцюгового дробу $\xi = [\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots]$ називається скінченний ланцюговий дріб $[\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$, значення якого можна записати у вигляді дробу $\frac{p_n}{q_n}$.

Доведення теореми Хінчина 2.3 конструктивне для числа $a_0 = \xi$. Зокрема, число ξ_0 вибирається довільно, а наступні елементи ланцюгового дробу мають задовольняти наступну нерівність

$$\xi_{k+1} > \frac{1}{q_k^2 \phi(q_k)}, \quad k \geqslant 0. \tag{4.32}$$

Виберемо ξ_0 непарним числом $\xi_0 \equiv 1 \pmod 2$, а всі наступні парними $\xi_i \equiv 0 \pmod 2, \ i \geqslant 1$. Це можна зробити згідно довільності конструктивної побудови числа ξ за допомогою закону утворення підхідних дробів [112, с. 11], а саме ξ_0 – довільне, $\xi_i, \ i \geqslant 1$ – обмежені лише знизу згідно (4.32).

Таким чином можна отримати лише непарні числа p_k. Справді

$$\begin{aligned}
&p_{-1} = 1 \equiv 1 \pmod 2,\\
&p_0 = \xi_0 \equiv 1 \pmod 2,\\
&p_1 = \xi_1 p_0 + p_{-1} \equiv (0 \cdot 1 + 1) \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2,\\
&\dots\\
&p_k = \xi_k p_{k-1} + p_{k-2} \equiv (0 \cdot 1 + 1) \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2.
\end{aligned}$$

Звідси, можна отримати такий наслідок з теореми Хінчина 2.3.

***Наслідок* 4.1 .** *Якою не була б додатна функція $\varphi(q)$ натурального аргументу q, знайдеться ірраціональне число ξ, для якого нерівність*

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \varphi(q)$$

має нескінченну кількість розв'язків в непарних цілих p і цілих q $(q > 0)$.

Згідно наслідку 4.1 для довільної функції $\varphi(k)$ $\exists\ \xi = \frac{2\ln t_1}{\pi}$, або $\exists\ t_1 = \exp\{\pi\xi/2\}$, таке що існує безліч $m, k \in \mathbb{Z}$, за яких виконується оцінка

$$|\delta(k)| \leqslant |k| \cdot 2|\cos(k \ln t_1)| \leqslant \left|k^2\pi\right| \cdot \left|\frac{2\ln t_1}{\pi} + \frac{2m+1}{k}\right| \leqslant \left|k^2\pi\right| \varphi(k).$$

Отже, можна підібрати таку функцію $\varphi(k)$, з відповідним t_1, що спричинятиме розбіжність ряду (4.12). Згідно певної конструктивної довільності побудови ξ, зокрема, ціла частина ξ – довільне непарне ціле число, можна забезпечити виконання $t_1 = \exp\{\pi\xi/2\} > t_0 = 1$.

Зауважимо, що підставивши $t_1 = \exp\{\pi\xi/2\}$ у вираз (4.31) отримаємо

$$2|\cos k \ln t_1| = 2|\cos(\pi k\xi/2)| \neq 0,$$

тобто виконується умова (4.11) відмінності визначника від нуля, оскільки число ξ – ірраціональне, отже $k\xi/2 \notin \mathbb{Z}$.

Для знаменників із формул (4.25)–(4.30) введемо позначення:

$$\begin{aligned}
\Delta^+(k) &= \lambda_2(k) - \lambda_1(k)\tau^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}, \quad \tau > 1,\\
\Delta^-(k) &= \lambda_2(k)\tau^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} - \lambda_1(k), \quad \tau < 1.
\end{aligned}$$

Оскільки $|a(ik)| \leqslant L_1\tilde{k}$ і $|b(ik)| \leqslant L_1^2\tilde{k}^2$, то $|D(k)| \leqslant L_2^2\tilde{k}^2$ і $|\lambda_j(k)| \leqslant L_3\tilde{k}$.

Теорема 4.2 . *Нехай виконується умова* (4.3) *і нехай для всіх (крім скінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$) виконуються нерівності*

$$|\Delta^+(k)| \geqslant C_1 \tilde{k}^{\gamma^+},$$
$$|\Delta^-(k)| \geqslant C_2 \tilde{k}^{\gamma^-},$$

де $C_1,\ C_2$ — додатні сталі, $\gamma^+,\ \gamma^-$ — дійсні числа.

Якщо $\varphi_0 \in \Phi_{\gamma^+, g_{0j}},\ \varphi_1 \in \Phi_{\gamma^-, g_{1j}},\ j = 1, \ldots, 6$, де $g_{0j},\ g_{1j}$ визначаються таблицею

j	1	2	3	4	5	6
$t_0,\ t_1$	$t_0 \leqslant t_1$ $t_1 \leqslant 1$	$t_1 \leqslant t_0$ $t_0 \leqslant 1$	$t_0 \leqslant 1$ $1 \leqslant t_1$	$t_1 \leqslant 1$ $1 \leqslant t_0$	$1 \leqslant t_0$ $t_0 \leqslant t_1$	$1 \leqslant t_1$ $t_1 \leqslant t_0$
g_{0j}	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{-L_3}$	$t_0^{L_3}$	$t_0^{L_3}$	$t_0^{L_3}$
g_{1j}	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{L_3}$	$t_1^{-L_3}$	$t_1^{L_3}$	$t_1^{L_3}$

то існує єдиний розв'язок u задачі (4.1), (4.2) *з простору U_{2,G_j} і справджуються оцінки*

$$\|u\|^2_{2,G_j} \leqslant C_3(\|\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2, g_{0j}} + \|\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2, g_{1j}}), \qquad j = 1, \ldots, 6, \tag{4.33}$$

де функції $G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4,\ G_5,\ G_6$ визначаються наступним чином

$$G_1(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_1, \\ t^{L_3} t_1^{2L_2}, & t_1 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_1^{2L_2}, & t \geqslant 1, \end{cases} \quad G_2(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_0, \\ t^{L_3} t_0^{2L_2}, & t_0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_0^{2L_2}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

$$G_3(t) = G_4(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_1, \\ t^{-L_3}, & t \geqslant 1, \end{cases}$$

$$G_5(t) = \begin{cases} t^{L_3} t_0^{-2L_2}, & t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_0^{-2L_2}, & 1 \leqslant t \leqslant t_0, \\ t^{-L_3}, & t \geqslant t_0, \end{cases} \quad G_6(t) = \begin{cases} t^{L_3} t_1^{-2L_2}, & t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_1^{-2L_2}, & 1 \leqslant t \leqslant t_1, \\ t^{-L_3}, & t \geqslant t_1. \end{cases}$$

Доведення. Згідно припущень функції $u_k(t)$ існують та визначаються формулами (4.19)–(4.24). Оцінки для функцій $(t\partial_t)^l u_k(t)$ випливають з нерівностей (4.25)–(4.30). Звідси отримуємо нерівності (4.33) для існування розв'язку задачі (4.1), (4.2). Єдиність розв'язку випливає з однозначного визначення функцій $u_k(t)$. □

4.2. Рівняння високого порядку

Розглянемо таку задачу з умовами Ніколетті для рівняння із частинними похідними типу Ейлера:

$$L\left(t\frac{\partial}{\partial t}, D\right)u(t,x) \equiv \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u + \sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D)u = 0, \quad (t,x) \in Q_T^p, \tag{4.34}$$

$$\left.\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j-1} u(t,x)\right|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j = 1,\ldots,n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega_p, \tag{4.35}$$

де $t_1,\ldots,t_n$ — такі різні точки з відрізка $[1;T]$, що

$$1 \leqslant t_1 < \ldots < t_n \leqslant T,$$

а поліноми A_j, $j = 1,\ldots,n$, належать до класу $\mathrm{Pol}^{\mathrm{hom}}_{j,p}$, тут $\mathrm{Pol}^{\mathrm{hom}}_{j,p}$ – множина однорідних многочленів степеня j від p змінних з дійсними коефіцієнтами:

$$\begin{gathered} A_j(\partial_x) = \sum_{|s|=j} a_{j,s}\partial_{x_1}^{s_1}\ldots\partial_{x_p}^{s_p}, \quad a_{s_0,s} \in \mathbb{C}, \\ |a_{s_0,s}| \leqslant A,\ A > 0,\ s = (s_1,\ldots,s_p) \in \mathbb{Z}_+^p,\ |s| = s_1 + \ldots + s_p. \end{gathered} \tag{4.36}$$

Будемо припускати, що рівняння (4.34) є таким, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, многочлен

$$L(\lambda, ik) \equiv \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(ik)\lambda^j \tag{4.37}$$

має такі різні корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$, що $i\,\lambda_j(k) \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,n$. Також вважатимемо, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p$, які лежать на сфері $|\xi| = 1$, виконується умова

$$P_L(\xi)\cdot A_n(\xi) \neq 0 \tag{4.38}$$

де $P_L(\xi)$ — дискримінант многочлена (4.37) за змінною λ.

Розв'язок задачі (4.34), (4.35) з простору $C^n([1,T];\mathcal{T}')$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{|k|\geqslant 0}u_k(t)e^{(ik,x)}.$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є розв'язком такої багатоточкової задачі Ніколетті:

$$L_n\left(d/dt,k\right)u_k(t)=0, \tag{4.39}$$

$$(td/dt)^{j-1}u_k(t_j)=\varphi_{jk},\quad j=1,\dots,n, \tag{4.40}$$

де φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,n$, відповідно.

Уведемо функції:

$$y_q(t,k)=\begin{cases}\ln^{q-1}t, & \text{якщо}\quad k=\vec{0},\\ t^{\lambda_q(k)}, & \text{якщо}\quad k\neq\vec{0},\end{cases}\qquad q=1,\dots,n,$$

Ці функції утворюють фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (4.39). Тому розв'язок задачі (4.39), (4.40) з класу $C^n[1,T]$ визначається формулою

$$u_k(t)=\sum_{q=1}^{n}C_{kq}y_q(t,k), \tag{4.41}$$

де сталі C_{kq}, $q=1,\dots,n$, визначаються зі системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n}C_{kq}(td/dt)^{j-1}y_q(t_j,k)=\varphi_{jk},\ j=1,\dots,n. \tag{4.42}$$

Визначник лінійної системи (4.42) позначимо через $\Delta_n(k)$:

$$\Delta_n(k)=\det\left\|(td/dt)^{j-1}y_q(t_j,k)\right\|_{j,q=1}^{n},\quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{4.43}$$

Легко перевірити, що для кожного $q\in\{1,\dots,n\}$ виконуються рівності

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^{r-1}\left(\ln^{q-1}t\right)=\frac{(q-1)!}{(q-r)!}\ln^{q-r}t,\quad 1\leqslant r\leqslant q, \tag{4.44}$$

$$\left(t\frac{d}{dt}\right)^{r-1}\left(\ln^{q-1} t\right) = 0, \quad r > q. \tag{4.45}$$

Із формул (4.44), (4.45) випливає, що

$$\Delta_n(\vec{0}) = \prod_{j=1}^{n}(n-1)!,$$

тобто $\Delta_n(\vec{0}) \neq 0$. Якщо $\Delta_n(k) \neq 0$ для деякого $k \in \mathbb{Z}^p$, то, використовуючи правило Крамера для знаходження сталих C_{kq}, $q = 1, \ldots, n$, системи (4.42) і підставляючи отримані для C_{kq}, $q = 1, \ldots, n$, вирази у формулу (4.41), для розв'язку задачі (4.39), (4.40) отримуємо рівність

$$u_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta_n(k)} \varphi_{jk}\, y_q(t,k), \tag{4.46}$$

де $\Delta_{jq}(k)$ — алгебричне доповнення елемента

$$(td/dt)^{j-1} y_q(t_j, k), \quad j, q = 1, \ldots, n,$$

у визначнику $\Delta_n(k)$.

Якщо $\varphi_j(x) \in \mathcal{T}'$, $j = 1, \ldots, n$, і виконується умова

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\} \qquad \Delta_n(k) \neq 0, \tag{4.47}$$

то задача (4.34), (4.35) має в просторі $C^n([1,T], \mathcal{T}')$ єдиний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta_n(k)} \varphi_{jk}\, y_q(t,k) e^{(ik,x)}. \tag{4.48}$$

Встановимо збіжність ряду (4.48) у шкалі просторів $C^n([1,T], H_\alpha)$.

Нижче у підрозділі фігурують додатні сталі C_j, $j = 1, \ldots, 18$, які не залежать від k.

Теорема 4.3 . *Нехай виконується умова* (4.47), *і нехай існує така стала* ω, *що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *справджується нерівність*

$$|\Delta_n(k)| \geqslant \tilde{k}^{-\omega}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.49}$$

Якщо $\varphi_j \in H_{\alpha_j}$, $\alpha_j = \omega+\alpha+n+C_n^2-(j-1)$, $j = 1,\ldots,n$, *то задача* (4.34), (4.35) *має в просторі* $C^n([1,T];H_\alpha)$ *єдиний розв'язок, який зображується рядом* (4.48) *і неперервно залежить від* φ_j, $j = 1,\ldots,n$.

Доведення. Зі структури рівняння (4.34), поліномів (4.36) та зроблених припущень випливають такі оцінки:

$$|\lambda_j(k)| \leqslant C_1\tilde{k}, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{4.50}$$

$$|\Delta_{jq}(k)| \leqslant C_2\tilde{k}^{n(n-1)/2-(j-1)}, \quad j,q = 1,\ldots,n, \tag{4.51}$$

$$|(td/dt)^r\, y_q(t,k)| \leqslant C_3\tilde{k}^r, \quad r = 0,1,\ldots,n, \quad q = 1,\ldots,n. \tag{4.52}$$

Із нерівностей (4.50), (4.51), (4.52), (4.49) для функції (4.46) отримуємо оцінки

$$|(td/dt)^r\, u_k(t)| \leqslant C_4\sum_{j=1}^{n}|\varphi_{jk}|\tilde{k}^{\omega+r+n(n-1)/2-(j-1)}, \quad r = 0,1,\ldots,n. \tag{4.53}$$

Таким чином, із (4.53) дістаємо

$$\|u;C^n([1,T];H_\alpha)\| \leqslant C_5\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j;H_{\alpha+\omega+n+n(n-1)/2-(j-1)}\|. \tag{4.54}$$

Із оцінки (4.54) випливає доведення теореми. □

Застосуємо метричний підхід для дослідження питання про можливість виконання оцінки (4.49). Доведемо, що нерівність (4.49) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_n) \in [1,T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$. Оцінка з таким же значенням для показника ω зберігається (див. нижче теорему 4.5) і для випадку, коли вузли інтерполяції $t_1,\ldots,t_n$ в умовах Ніколетті (4.35) є логарифмічно рівновіддаленими, тобто виконуються рівності

$$t_j = t_1^j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad t_1 > 1. \tag{4.55}$$

Для доведення теорем 4.4, 4.5 використано класичну лему Бореля-Кантеллі, а також допоміжні твердження про оцінки зверху мір виняткових множин гладких функцій спеціального вигляду.

Лема 4.1 . *Існують сталі C_6, $C_7 > 0$ такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, виконуються оцінки*

$$|\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \geqslant C_6\,\tilde{k}, \quad n \geqslant j > q \geqslant 1, \tag{4.56}$$

$$|\lambda_j(k)| \geqslant C_7\,\tilde{k}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.57}$$

Доведення. Із однорідності поліномів $A_j(\xi_1, \ldots, \xi_p), j = 1, \ldots, n$, та зі структури диференціального виразу $L(\partial/\partial t, D)$ отримуємо, що

$$L(\lambda, ik) = (i\tilde{k})^n L\left(\frac{\lambda}{i\tilde{k}}, \frac{k}{\tilde{k}}\right), \quad k \neq \vec{0}.$$

Тому корені $\lambda_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, $k \neq \vec{0}$, допускають зображення

$$\lambda_j(k) = i\tilde{k}\sigma_j(k), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.58}$$

де $\sigma_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, $k \neq \vec{0}$, — корені рівняння

$$L\left(\sigma, k/\tilde{k}\right) = 0. \tag{4.59}$$

Для кожного $\xi \in \mathbb{R}^p \backslash \{\vec{0}\}$ дискримінант $P_L(\xi)$ многочлена $L(\lambda, \xi)$ (як многочлена змінної λ) є відмінним від нуля. Оскільки $P_L(\xi)$ є многочленом від коефіцієнтів многочлена $L(\lambda, \xi)$, то $P_L(\xi)$ є неперервною функцією параметрів $\xi_1, \ldots, \xi_p$. На компакті $S = \{\xi \in \mathbb{R}^p : \xi_1^2 + \ldots + \xi_p^2 = 1\}$ модуль цієї функції відокремлений знизу від нуля деякою додатною сталою C_8:

$$\forall \xi \in S \quad |P_L(\xi)| \geqslant C_8. \tag{4.60}$$

Тоді з рівності

$$P_L\left(\frac{k}{\tilde{k}}\right) = \prod_{n \geqslant j > q \geqslant 1} (\sigma_j(k) - \sigma_q(k))^2, \quad k \neq \vec{0},$$

а також із оцінок (4.60) дістаємо, що

$$\prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} |\sigma_j(k)-\sigma_q(k)|^2 \geqslant C_8, \quad k\neq\vec{0}. \tag{4.61}$$

Із нерівності (4.61) на підставі формул (4.58) випливає, що при $k\neq\vec{0}$

$$\prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} |\lambda_j(k)-\lambda_q(k)| \geqslant \sqrt{C_8}\tilde{k}^{n(n-1)/2}, \tag{4.62}$$

Із рівномірної обмеженості за $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ коефіцієнтів рівняння (4.59) випливає й рівномірна обмеженість за k коренів цього рівняння; тому існує стала $C_9>0$ така, що для всіх $k\neq\vec{0}$ виконуються оцінки

$$|\sigma_j(k)| \leqslant C_9, \quad j=1,\ldots,n. \tag{4.63}$$

Із формул (4.58), (4.63) для $k\neq\vec{0}$ отримуємо

$$|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)| \leqslant 2C_9\tilde{k}, \quad n\geqslant j>q\geqslant 1. \tag{4.64}$$

Тоді з оцінок (4.62), (4.64) випливає, що

$$|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)| \geqslant C_{10}\tilde{k}, \quad n\geqslant j>q\geqslant 1,$$

де $C_{10}=\sqrt{C_8}\cdot(2C_9)^{1-n(n-1)/2}>0$, тобто оцінки (4.56) виконуються. Нерівності (4.57) випливають з формул Вієта, відмінності від нуля полінома $A_n(\xi)$ на сфері S і встановлюються аналогічно. □

Встановимо метричні оцінки знизу для характеристичного визначника $\Delta_n(k)$ у випадку довільного розташування вузлів.

Теорема 4.4 . *Нехай виконується умова* (4.38). *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[1;T]^n$ *нерівність* (4.49) *виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$, *якщо*

$$\omega>(p-1)n(n-1)/2.$$

Доведення. Нехай $k \neq \vec{0}$. Означимо числа $\nu_j(k)$, $j = 1, \dots, n$, за допомогою рівностей

$$\nu_1(k) = 1, \quad \nu_j(k) = \frac{\prod\limits_{q=2}^{j} |\Lambda_q(k)| \prod\limits_{q=2}^{j} |\lambda_q^{q-1}(k)|}{\tilde{k}^{(p+1+\varepsilon)j(j-1)/2}}, \quad j = 2, \dots, n,$$

де $\varepsilon = \omega/C_n^2 - p + 1$, $\Lambda_q(k) = (\lambda_q(k) - \lambda_1(k)) \dots (\lambda_q(k) - \lambda_{q-1}(k))$, $q = 2, \dots, n$.

Позначимо через $B_\omega(k)$ множину тих векторів $\vec{t} \in [1; T]^n$, для яких нерівність $|\Delta_n(k)| < \nu_n(k)$ виконується для фіксованого $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, тобто

$$B_\omega(k) = \{\vec{t} \in [1; T]^n : |\Delta_n(k)| < \nu_n(k)\}.$$

Нехай B_ω — множина тих векторів $\vec{t} \in [1; T]^n$, які належать до нескінченної кількості множин $B_\omega(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$. Доведемо спочатку, що $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_\omega = 0$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі для цього досить перевірити, що ряд

$$\sum_{|k|>0} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_\omega(k)$$

є збіжним при $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.

Через $\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)$ позначимо визначник, одержаний із визначника $\Delta_n(k)$ викреслюванням останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців, $j = 1, \dots, n$; зрозуміло, що $\Delta_n(k; t_1, \dots, t_n) = \Delta_n(k)$, $\Delta_1(k; t_1) = t_1^{\lambda_1(k)}$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, розглянемо такі множини:

$$B_{\omega,j}(k) = \{\vec{t} \in [1; T]^n : |\Delta_j(k; t_1, \dots, t_j)| < \nu_j(k),$$

$$|\Delta_{j-1}(k; t_1, \dots, t_{j-1})| \geqslant \nu_{j-1}(k)\}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Оскільки корінь $\lambda_1(k)$ є суто уявним, то враховуючи, що для довільних $k \neq \vec{0}$ виконується рівність $|\Delta_1(k; t_1)| = \left| t_1^{\lambda_1(k)} \right| = 1 \geqslant \nu_1(k)$, отримуємо, що правильним є включення

$$B_\omega(k) \subset \bigcup_{j=2}^{n} B_{\omega,j}(k), \quad k \neq \vec{0}. \tag{4.65}$$

Із формул (4.65) та адитивності міри Лебега випливає, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_\omega(k) \leqslant \sum_{j=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_{\omega,j}(k), \quad k \neq \vec{0}.$$

Тому збіжність ряду $\sum\limits_{|k|>0} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_\omega(k)$ випливатиме зі збіжності всіх рядів

$$\sum_{|k|>0} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_{\omega,j}(k), \quad j = 2, \ldots, n. \tag{4.66}$$

За теоремою Фубіні, для кожного $j = 2, \ldots, n$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} B_{\omega,j}(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} B_{\omega,j}(k; \vec{t_j})\, dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n,$$

де $\vec{t_j} = (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n)$, а символ $B_{\omega,j}(k; \vec{t_j})$, $j = 2, \ldots, n$, позначає множину

$$\{t_j \in [1, T] : (t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, \ldots, t_n) \in B_{\omega,j}(k)\}.$$

Побудуємо лінійні диференціальні вирази у вигляді добутку диференціальних виразів першого порядку:

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right) = \prod_{j=1}^{q-1} \left(t_q \frac{d}{dt_q} - \lambda_j(k)\right), \quad q = 2, \ldots, n.$$

Легко перевірити, що $\left(t\frac{d}{dt} - \lambda\right)[t^\lambda] = 0$, тому для кожного $q = 2, \ldots, n$ правильними є рівності

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right)\left[t_q^{\lambda_j(k)}\right] = 0, \quad j = 1, \ldots, q-1,$$

$$R_{q-1}\left(t_q \frac{d}{dt_q}, k\right)\left[t_q^{\lambda_q(k)}\right] = \Lambda_q(k) t_q^{\lambda_q(k)}.$$

Розвиваючи визначник $\Delta_j(k; t_1, \ldots, t_j)$ за елементами останнього рядка, отримаємо

$$\Delta_j(k; t_1, \ldots, t_j) = \sum_{r=1}^{j} (-1)^{j+r} \lambda_r^{j-1}(k) t_j^{\lambda_r(k)} \Delta_j^r(k; t_1, \ldots, t_{j-1}), \ j = \overline{2, n}, \tag{4.67}$$

де $\Delta_j^r(k;t_1,\ldots,t_{j-1})$, $1\leqslant r\leqslant j$, — мінор визначника $\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)$ порядку $(j-1)$, який відповідає викресленим останньому рядку та r-му стовпцю.

Якщо $\vec{t}\in B_{\omega,j}(k)$, $j=2,\ldots,n$, то з рівностей (4.67) та означення множин $B_{\omega,j}(k)$, $j=2,\ldots,n$, випливає нерівність

$$\left|R_{j-1}\left(t_j\frac{\partial}{\partial t_j},k\right)\Delta_j(k;t_1,\ldots,t_j)\right|\geqslant\nu_{j-1}(k)\left|\lambda_j^{j-1}(k)\Lambda_j(k)\right|. \qquad (4.68)$$

Через те, що $\deg_\mu R_{j-1}(\mu,k)=j-1$, а модуль коефіцієнта при $\left(t_j\frac{\partial}{\partial t_j}\right)^{j-1-r}$, $r=0,1,\ldots,j-1$, у диференціальному виразі $R_{j-1}(t_j\partial/\partial t_j,k)$ не перевищує $C_{11}\tilde{k}$, то з оцінок (4.68) і лем 2.4, 4.1 отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_{\omega,j}(k;\vec{t_j})\leqslant C_{12}\tilde{k}\left(\frac{\nu_j(k)}{\nu_{j-1}(k)|\lambda_j^{j-1}(k)\Lambda_j(k)|}\right)^{1/(j-1)}\leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\tilde{k}^{-p-\varepsilon},\quad C_{12}>0,\quad j=2,\ldots,n, \qquad (4.69)$$

де стала C_{12} не залежить від вибору $\vec{t_j}=(t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\in[1;T]^{n-1}$. Тоді з формул (4.68), (4.69) отримуємо оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_{\omega,j}(k)\leqslant C_{13}T^{n-1}\tilde{k}^{-p-\varepsilon},\quad j=2,\ldots,n,\quad k\in\mathbb{Z}^p. \qquad (4.70)$$

Із нерівностей (4.68) і (4.70) випливає збіжність рядів (4.66). Тому для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in[1;T]^n$ нерівність

$$|\Delta_n(k)|\geqslant\nu_n(k)$$

виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\omega>(p-1)n(n-1)/2$. Залишається врахувати, що

$$\nu_n(k)\geqslant C_{14}\tilde{k}^{-(p-1)n(n-1)/2-\sigma},\quad \sigma>0.$$

$\square$

Встановимо тепер метричні оцінки для випадку, коли вузли є логарифмічно рівновіддаленими, тобто виконуються рівності (4.55). У цьому випадку визначник (4.43) обчислюється за формулою

$$\Delta_n(k) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \dots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \lambda_1(k)t_1^{2\lambda_1(k)} & \dots & \lambda_n(k)t_1^{2\lambda_n(k)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1}(k)t_1^{n\lambda_1(k)} & \dots & \lambda_n^{n-1}(k)t_1^{n\lambda_n(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \Big(\lambda_j(k)\, t_1^{\lambda_j(k)} - \lambda_q(k) t_1^{\lambda_q(k)}\Big), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \ \ k \neq \vec{0}. \quad (4.71)$$

При виведенні (4.71) враховано формулу для визначника Вандермонда чисел

$$\lambda_1(k)t_1^{\lambda_1(k)}, \dots, \lambda_n(k)t_1^{\lambda_n(k)}.$$

Теорему 4.4 не можна застосувати для оцінки визначника (4.71), оскільки цей визначник залежить від вектора $\vec{t} = (t_1, t_1^2, \dots, t_1^n)$, що знаходиться на кривій Веронезе

$$\{(t_1, t_1^2, \dots, t_1^n) \in \mathbb{R}^n : t_1 \in (1, T^{1/n}]\}.$$

Ця крива має нульову n-вимірну міру Лебега, $n \geqslant 2$. У цьому випадку слід застосувати одновимірну міру Лебега, яка дозволяє встановити майже всюди на кривій Веронезе таку ж оцінку знизу для визначника (4.71), як і в теоремі 4.4 для визначника (4.43). Таким чином, крива Веронезе успадковує оцінку з куба $[1, T]^n$.

Теорема 4.5 . *Нехай справджується умова* (4.37) *і рівності* (4.55). *Тоді для визначника* (4.71) *нерівність* (4.49) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega > (p-1)n(n-1)/2$.*

Доведення. Враховуючи, що $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ суто уявні числа, за допомогою елементарних перетворень формули (4.71) одержуємо, що

$$|\Delta_n(k)| = \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} |\, \lambda_j(k) - \lambda_q(k)\, t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}\, |, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \ \ k \neq \vec{0}.$$

Покладемо:

$$\psi(k, t_1) = \prod_{n\geqslant j>q\geqslant 1} \psi_{jq}(k, t_1), \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad k \neq \vec{0}, \quad t_1 \in (1, T^{1/n}],$$

$$\psi_{jq}(k,t_1)=\lambda_j(k)-\lambda_q(k)\,t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)},\quad n\geqslant j>q\geqslant 1,\quad k\in\mathbb{Z}^p,\quad k\neq\vec{0},$$

$$R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)=t_1\frac{d}{dt_1}+\lambda_j(k)-\lambda_q(k),\quad n\geqslant j>q\geqslant 1,\ k\in\mathbb{Z}^p,\ k\neq\vec{0},$$

$$E(k)=\{t_1\in(1,T^{1/n}]:|\psi(k,t_1)|<\eta(k)\},\ \ k\in\mathbb{Z}^p,\ \ k\neq\vec{0},$$

$$E_{jq}(k)=\{t_1\in(1,T^{1/n}]:|\psi_{jq}(k,t_1)|<\eta_{jq}(k)\},\ n\geqslant j>q\geqslant 1,\ k\in\mathbb{Z}^p,k\neq\vec{0},$$

де $\eta(k)=\prod\limits_{n\geqslant j>q\geqslant 1}\eta_{jq}(k)$, $\eta_{jq}(k)=\tilde{k}^{-(p-1)-\varepsilon}$, $\varepsilon=2\omega/(n(n-1))-p+1>0$. Оскільки

$$\left|R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)\psi_{jq}(k,t_1)\right|=|\lambda_j(k)(\lambda_j(k)-\lambda_q(k))|\geqslant C_{15}\tilde{k}^2,$$

де $n\geqslant j>q\geqslant 1$, $k\in\mathbb{Z}^p,k\neq\vec{0}$, стала $C_{15}>0$ не залежить від вибору k, то з формул (4.56), (4.57) на підставі лем 2.4, 4.1 дістанемо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\,E_{jq}(k)\leqslant C_{16}\tilde{k}\cdot\tilde{k}^{-(p-1)-\varepsilon}/\tilde{k}^2\leqslant C_{17}\tilde{k}^{-p-\varepsilon},\tag{4.72}$$

де $n\geqslant j>q\geqslant 1$, $k\in\mathbb{Z}^p,k\neq\vec{0}$. Враховуючи, що

$$E(k)\subset\bigcup_{n\geqslant j>q\geqslant 1}E_{jq}(k),$$

з нерівностей (4.72) отримуємо таку оцінку для мір множин $E(k)$:

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\ E(k)\leqslant\sum_{n\geqslant j>q\geqslant 1}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\ E_{jq}(k)\leqslant C_{18}\tilde{k}^{-p-\varepsilon},\quad C_{18}>0.\tag{4.73}$$

Із оцінок (4.73) випливає збіжність ряду $\sum\limits_k\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\ E(k)$. Тому за лемою Бореля–Кантеллі для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $t_1\in(1,T^{1/n}]$ нерівність $|\psi(k,t_1)|\geqslant\eta(k)=\tilde{k}^{-\omega}$, де $\omega>(p-1)n(n-1)/2$, а отже, й нерівність

$$|\Delta_n(k)|\geqslant\eta(k)$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$. $\square$

Зауваження 4.2 . Зауважимо, що для рівняння з частинними похідними зі змінними коефіцієнтами типу Ейлера метричні оцінки знизу малих знаменників задачі Ніколетті є новими і для випадку довільного розташування вузлів інтерполяції, і для випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів. Раніше метричні оцінки для характеристичного визначника задачі Ніколетті встановлено у праці [51] для окремого класу рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Зауваження 4.3 . Розвинені у підрозділі 4.2 підходи дозволяють встановити коректність задач Ніколетті для систем рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі Ніколетті для лінійного рівняння типу Ейлера другого порядку зі змінними коефіцієнтами та досліджено коректність розв'язку.

Встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника задачі Ніколетті для лінійного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами. Застосовано метричний підхід [61, 80, 81] для встановлення таких оцінок. Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію. Встановлені умови коректності розв'язку задачі. Результати роботи можна перенести на випадок інтерполяційної задачі Ніколетті для систем лінійних рівнянь із частинними похідними.

РОЗДІЛ 5
НЕЛОКАЛЬНІ ДВОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

5.1. Рівняння другого порядку

У цьому підрозділі досліджено умови розв'язності задачі з нелокальними двоточковими умовами для рівняння з частинними похідними типу Ейлера другого порядку.

Розглянемо задачу

$$\left[t^2\partial_t^2 + ta(\partial_x)\partial_t + b(\partial_x)\right]u(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times \Omega_{2\pi}^p, \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \mu_0 u(t_0,x) + \mu_1 u(t_1,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in \Omega_{2\pi}^p, \\ \mu_0 u_t(t_0,x) + \mu_1 u_t(t_1,x) = \varphi_1(x), \qquad x \in \Omega_{2\pi}^p, \end{aligned} \tag{5.2}$$

де $0 < t_0 < t_1$ і вектор коефіцієнтів (μ_0, μ_1) нелокальних умов є ненульовим.

Функція

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t) e^{(ik,x)} \tag{5.3}$$

є розв'язком задачі (5.1), (5.2) лише тоді, коли кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком рівняння Ейлера

$$\left[t^2 d_t^2 + ta(ik)d_t + b(ik)\right]u_k(t) = 0, \qquad d_t = d/dt, \tag{5.4}$$

і справджує нелокальні двоточкові умови

$$\mu_0 u_k(t_0) + \mu_1 u_k(t_1) = \varphi_{0k}, \quad \mu_0 u_k'(t_0) + \mu_1 u_k'(t_1) = \varphi_{1k}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5.5}$$

де φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти розвинень функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, 2$, відповідно у ряди Фур'є за системою експонент $\{e^{(ik,x)} : k \in \mathbb{Z}^p\}$:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} e^{(ik,x)}, \quad j = 1, 2. \tag{5.6}$$

За умови $(a(ik)-1)^2 - 4b(ik) \neq 0$ корені $\lambda_1(k), \lambda_2(k)$ характеристичного рівняння

$$\lambda(\lambda-1) + a(ik)\lambda + b(ik) = 0 \tag{5.7}$$

є простими.[1] Тому функції $t^{\lambda_1(k)}, t^{\lambda_2(k)}$ утворюють на $(0,\infty)$ фундаментальну систему розв'язків рівняння (5.4). Таким чином, розв'язок задачі (5.4), (5.5) допускає зображення

$$u_k(t) = C_{1k} t^{\lambda_1(k)} + C_{2k} t^{\lambda_2(k)}. \tag{5.8}$$

Звідси маємо системи з ненульовими матрицями для визначення сталих C_{1k}, C_{2k} у формулі (5.8):

$$\begin{pmatrix} \mu_0 t_0^{\lambda_1(k)} + \mu_1 t_1^{\lambda_1(k)} & \mu_0 t_0^{\lambda_2(k)} + \mu_1 t_1^{\lambda_2(k)} \\ \lambda_1(k)\big(\mu_0 t_0^{\lambda_1(k)-1} + \mu_1 t_1^{\lambda_1(k)-1}\big) & \lambda_2(k)\big(\mu_0 t_0^{\lambda_2(k)-1} + \mu_1 t_1^{\lambda_2(k)-1}\big) \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} C_{1k} \\ C_{2k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{0k} \\ \varphi_{1k} \end{pmatrix}.$$

Позначимо:

$$\mu^+(\lambda) = \mu_0 + \mu_1 \tau^\lambda = \tau^\lambda\big(\mu_0 \tau^{-\lambda} + \mu_1\big) = \tau^\lambda \mu^-(\lambda), \tag{5.9}$$

де $\tau = t_1/t_0$. Для простих коренів розглянемо три способи розміщення чисел t_0 і t_1 щодо одиниці: $t_1 \leqslant 1$, $t_0 \leqslant 1 < t_1$, $t_0 > 1$.

Якщо $t_1 \leqslant 1$, то матриці відповідних систем є такими:

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+(\lambda_1(k)) & \mu^+(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant 0$,

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+(\lambda_1(k)) & \mu^-(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)) & \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1)/\tau \end{pmatrix} \times$$

[1] вважаємо, що ці корені занумеровані так, що $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_2(k)$.

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau^{\lambda_2(k)} t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leqslant 0$ і $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > 0$,

$$\begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^-(\lambda_1(k)) & \mu^-(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > 0$.

Якщо $t_0 > 1$, то матриці такі:

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+(\lambda_1(k)) & \mu^+(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant 0$,

$$\begin{pmatrix} t_1^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+(\lambda_1(k)) & \mu^-(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)\tau & \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \tau^{-\lambda_1(k)} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leqslant 0$ і $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > 0$,

$$\begin{pmatrix} t_1^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^-(\lambda_1(k)) & \mu^-(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > 0$.

Якщо ж $t_0 \leqslant 1 < t_1$, то

$$\begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_1(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^+(\lambda_1(k)) & \mu^+(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant (\ln t_0 / \ln t_1) \operatorname{Re}\lambda_1(k)$,

$$\begin{pmatrix} t_1^{\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & t_1^{\lambda_2(k)-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu^-(\lambda_1(k)) & \mu^-(\lambda_2(k)) \\ \lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > (\ln t_0/\ln t_1)\operatorname{Re}\lambda_1(k)$.

Із формули (5.8) у припущенні ненульових знаменників

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \Delta^+(k) = \\ &= \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1)\mu^+(\lambda_1(k)) - \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)\mu^+(\lambda_2(k)),\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta^- &= \Delta^-(k) = \\ &= \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1)\mu^-(\lambda_1(k)) - \lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1)\mu^-(\lambda_2(k)),\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\Delta_+^- &= \Delta_+^-(k) = \\ &= \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1)\mu^+(\lambda_1(k))/\tau - \lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)\mu^-(\lambda_2(k))\end{aligned} \tag{5.12}$$

маємо три випадки.

Якщо $t_1 \leqslant 1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^+(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) & -\mu^+(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \mu^+(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_0^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & (t/\tau)^{\lambda_2(k)} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta_+^-(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1)/\tau & -\mu^-(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \mu^+(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_0^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^-(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) & -\mu^-(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \mu^-(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix} \tag{5.15}$$

відповідно для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant 0$, для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leqslant 0$ і $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > 0$ та для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > 0$.

Якщо $t_0 > 1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^+(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) & -\mu^+(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \mu^+(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_0^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} (t\,\tau)^{\lambda_1(k)} t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\tau\Delta_+^-(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) & -\mu^-(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)\tau & \mu^+(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^-(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) & -\mu^-(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \mu^-(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

відповідно для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant 0$, для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leqslant 0$ і $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > 0$ та для $\operatorname{Re}\lambda_1(k) > 0$.

Якщо $t_0 \leqslant 1 < t_1$, то

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^+(k)} \times \\ \times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1) & -\mu^+(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1) & \mu^+(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k} \\ t_0^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix}, \quad (5.19)$$

$$u_k(t) = \frac{\begin{pmatrix} t^{\lambda_1(k)} t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)} & t^{\lambda_2(k)} \end{pmatrix}}{\Delta^-(k)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \lambda_2(k)\mu^-(\lambda_2(k)-1) & -\mu^-(\lambda_2(k)) \\ -\lambda_1(k)\mu^-(\lambda_1(k)-1) & \mu^-(\lambda_1(k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k} \\ t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k} \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

відповідно для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) \leqslant \dfrac{\ln t_0}{\ln t_1}\operatorname{Re}\lambda_1(k)$ та для $\operatorname{Re}\lambda_2(k) > \dfrac{\ln t_0}{\ln t_1}\operatorname{Re}\lambda_1(k)$.

Якщо $\Delta^+ = 0$ для $k \in \mathbb{Z}^p$, то розв'язок u_k існує лише за умови

$$\lambda_1(k)\mu^+(\lambda_1(k)-1)\varphi_{0k} = t_0\mu^+(\lambda_1(k))\varphi_{1k}$$

у випадку $\lambda_1(k) \neq 0$ і за умови

$$\lambda_2(k)\mu^+(\lambda_2(k)-1)\varphi_{0k} = t_0\mu^+(\lambda_2(k))\varphi_{1k}$$

у протилежному випадку. При цьому множина розв'язків є одновимірним многовидом з координатою $C_k \in \mathbb{C}$:

$$u_k(t) = \frac{t^{\lambda_1(k)}\overline{\mu^+(\lambda_1(k))} + t^{\lambda_2(k)}\overline{\mu^+(\lambda_2(k))}}{\left|\mu^+(\lambda_1(k))\right|^2 + \left|\mu^+(\lambda_2(k))\right|^2}\varphi_{0k} + \\ + \left(t^{\lambda_1(k)}\mu^+(\lambda_2(k)) - t^{\lambda_2(k)}\mu^+(\lambda_1(k))\right)C_k. \quad (5.21)$$

На основі формул (5.13)–(5.20) отримуємо для похідних $u_k^{(l)}$, де $l = 0, 1, 2$, розв'язку u_k задачі (5.1), (5.2) відповідні оцінки зверху. Зокрема, з рівностей (5.13)–(5.15) для $t_1 \leqslant 1$ маємо нерівності

$$8\lambda_{l+6}^*(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^+(k)\right|^2} \geqslant \\ \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_0, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_0, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$8\lambda_{l+6}^*(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2 + \left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta_+^-(k)\right|^2} \geqslant \\ \geqslant \begin{cases} \left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \leqslant t_2, \\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}\tau^{\lambda_2(k)}t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t \geqslant t_2, \end{cases} \quad (5.23)$$

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^-(k)\right|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_1,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}t_1^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_1,\end{cases}\tag{5.24}$$

де $t_2 = t_0\tau^{\operatorname{Re}\lambda_2(k)/\operatorname{Re}(\lambda_2(k)-\lambda_1(k))}$. Величини $\lambda_6^*(k)$, $\lambda_7^*(k)$, $\lambda_8^*(k)$ визначають формули

$$\begin{aligned}\lambda_6^*(k)&=(|\mu_0|+|\mu_1|)^2\max_r|\lambda_r(k)|^2,\\ \lambda_7^*(k)&=(|\mu_0|+|\mu_1|)^2\max_r|\lambda_r(k)|^4,\\ \lambda_8^*(k)&=(|\mu_0|+|\mu_1|)^2\max_r|(\lambda_r(k)-1)\lambda_r(k)^2|^2.\end{aligned}\tag{5.25}$$

З рівностей (5.16)–(5.18) для $t_0>1$ маємо нерівності

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^+(k)\right|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}t_0^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_0,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_0,\end{cases}\tag{5.26}$$

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^-_+(k)\right|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}\tau^{-\lambda_1(k)}t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_3,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_3,\end{cases}\tag{5.27}$$

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^-(k)\right|^2}\geqslant$$
$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_1,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_1,\end{cases}\tag{5.28}$$

де $t_3 = t_1\tau^{\operatorname{Re}\lambda_1(k)/\operatorname{Re}(\lambda_2(k)-\lambda_1(k))}$. З рівностей (5.19)–(5.20) для $t_0\leqslant 1<t_1$ маємо нерівності

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_1(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_1(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^+(k)\right|^2}\geqslant$$

$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_0,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}t_0^{\lambda_2(k)-\lambda_1(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_0,\end{cases}\tag{5.29}$$

$$8\lambda^*_{l+6}(k)\frac{\left|t_0^{-\lambda_2(k)}\varphi_{0k}\right|^2+\left|t_1^{1-\lambda_2(k)}\varphi_{1k}\right|^2}{\left|\Delta^-(k)\right|^2}\geqslant$$

$$\geqslant\begin{cases}\left|t^{l-\lambda_1(k)}t_1^{\lambda_1(k)-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\leqslant t_1,\\ \left|t^{l-\lambda_2(k)}u_k^{(l)}(t)\right|^2, & t\geqslant t_1.\end{cases}\tag{5.30}$$

Встановимо коректність розв'язку. Нехай $Z[0], Z[1], Z[2]$ – розбиття множини $\mathbb{Z}^p$, для яких відповідно виконуються нерівності

$$\operatorname{Re}\lambda_2(k)\leqslant 0,\quad \operatorname{Re}\lambda_1(k)\leqslant 0,\quad \operatorname{Re}\lambda_2(k)>0,$$

а Π_0, Π_1, Π_2 — проєктори на простори, породжені експонентами $e^{(ik,x)}$, де $k\in Z[j]$, $j=0,1,2$, тобто

$$\begin{aligned}\Pi_i\varphi &= \sum_{k\in Z[i]}\varphi_k e^{ikx},\\ \Pi_i u &= \sum_{k\in Z[i]}u_k(t)e^{ikx}.\end{aligned}\tag{5.31}$$

Теорема 5.1 . *Припустимо, що $t_1\leqslant 1$. Нехай дискримінант характеристичного рівняння (5.7) не дорівнює нулеві для всіх (крім скінченної кількості векторів $k\in\mathbb{Z}^p$) виконуються нерівності*

$$\begin{aligned}|\Delta^+(k)| &\geqslant C^+\tilde{k}^{\gamma^+}, && k\in Z[0],\\ |\Delta^-_+(k)| &\geqslant C^-_+\tilde{k}^{\gamma^-_+}, && k\in Z[1],\\ |\Delta^-(k)| &\geqslant C^-\tilde{k}^{\gamma^-}, && k\in Z[2],\end{aligned}\tag{5.32}$$

де $C^+,\ C^-_+,\ C^-$ — додатні сталі, $\gamma^+,\ \gamma^-_+,\ \gamma^-$ — дійсні числа.

Тоді за умов

$$\Pi_0\varphi_j\in\Phi_{\gamma^+,g_j},\quad \Pi_1\varphi_j\in\Phi_{\gamma^-_+,g_j},\quad \Pi_2\varphi_j\in\Phi_{\gamma^-,g_j},\quad j=1,2,$$

де $g_0 = t_0^{-L_3}$, $g_1 = t_1^{-L_3}$, *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (5.1), (5.2) *з простору* U_{2,G_j} *і справджуються оцінки*

$$\|\Pi_j u\|^2_{2,G_j} \leqslant C(\|\Pi_j \varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}} + \|\Pi_j \varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}), \qquad j = 0,1,2, \quad (5.33)$$

де функції $G_0,\ G_1,\ G_2$ *визначаються наступним чином*

$$G_0(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_0, \\ t^{L_3} t_0^{2L_2}, & t_0 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_0^{2L_2}, & t \geqslant 1, \end{cases} \qquad G_1(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_2,\ t \leqslant 1, \\ t^{-L_3}, & t \leqslant t_2,\ t \geqslant 1, \\ t^{L_3}\tau^{L_3} t_0^{2L_2}, & t \geqslant t_2,\ t \leqslant 1, \\ t^{-L_3}\tau^{L_3} t_0^{2L_2}, & t \geqslant t_2,\ t \geqslant 1, \end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} t^{L_3}, & t \leqslant t_1, \\ t^{L_3} t_1^{2L_2}, & t_1 \leqslant t \leqslant 1, \\ t^{-L_3} t_1^{2L_2}, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Доведення. Згідно з припущеннями теореми функції $u_k(t)$ існують і визначаються формулами (5.13)–(5.15). Оцінки для функцій $(t\partial_t)^l u_k(t)$ випливають з нерівностей (5.22)-(5.24). Звідси отримуємо нерівності (5.33) для існування розв'язку задачі (5.1), (5.2). Єдиність розв'язку випливає з однозначного визначення функцій $u_k(t)$. □

Аналогічна теорема справджується для випадку $t_0 \geqslant 1$ і формулюється аналогічно до теореми 5.1 наступним чином.

Теорема 5.2 . *Припустимо, що* $t_0 > 1$. *Нехай дискримінант характеристичного рівняння* (5.7) *не дорівнює нулеві для всіх (крім скінченної кількості векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$*) виконуються нерівності*

$$|\Delta^+(k)| \geqslant C^+ \tilde{k}^{\gamma^+}, \qquad k \in Z[0],$$
$$|\Delta^-_+(k)| \geqslant C^-_+ \tilde{k}^{\gamma^-_+}, \qquad k \in Z[1],$$
$$|\Delta^-(k)| \geqslant C^- \tilde{k}^{\gamma^-}, \qquad k \in Z[2],$$

де $C^+,\ C^-_+,\ C^-$ — *додатні сталі,* $\gamma^+,\ \gamma^-_+,\ \gamma^-$ — *дійсні числа.*

Тоді за умов

$$\Pi_0\varphi_j \in \Phi_{\gamma^+,g_j}, \quad \Pi_1\varphi_j \in \Phi_{\gamma_+^-,g_j}, \quad \Pi_2\varphi_j \in \Phi_{\gamma^-,g_j}, \quad j=1,2,$$

де $g_0 = t_0^{-L_3}$, $g_1 = t_1^{-L_3}$, *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (5.1), (5.2) *з простору* U_{2,G_j} *і справджуються оцінки*

$$\|\Pi_j u\|^2_{2,G_j} \leqslant C(\|\Pi_j\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}} + \|\Pi_j\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}), \qquad j=0,1,2,$$

де функції G_0, G_1, G_2 *визначаються наступним чином*

$$G_0(t) = \begin{cases} t^{L_3}t_0^{2L_2}, & t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}t_0^{2L_2}, & 1\leqslant t\leqslant t_0,\\ t^{-L_3}, & t\geqslant t_0,\end{cases} \qquad G_1(t) = \begin{cases} t^{L_3}\tau^{-L_3}t_1^{2L_2}, & t\leqslant t_3,\ t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}\tau^{-L_3}t_1^{2L_2}, & t\leqslant t_3,\ t\geqslant 1,\\ t^{L_3}, & t\geqslant t_3,\ t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}, & t\geqslant t_3,\ t\geqslant 1,\end{cases}$$

$$G_2(t) = \begin{cases} t^{L_3}t_1^{2L_2}, & t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}t_1^{2L_2}, & 1\leqslant t\leqslant t_1,\\ t^{-L_3}, & t\geqslant t_1.\end{cases}$$

Щоб сформулювати теорему для третього випадку $t_0 \leqslant 1 \leqslant t_1$ розіб'ємо $\mathbb{Z}^p$ на множини $Z[3]$ і $Z[4]$ і введемо проєктори Π_3 і Π_4 за формулами (5.31).

Теорема 5.3 . *Припустимо, що* $t_0 \leqslant 1 \leqslant t_1$. *Нехай виконуються умови теореми 5.1 про дискримінант і виконуються нерівності*

$$\begin{aligned} |\Delta^+(k)| &\geqslant C^+\tilde{k}^{\gamma^+}, \qquad k\in Z[3],\\ |\Delta^-(k)| &\geqslant C^-\tilde{k}^{\gamma^-}, \qquad k\in Z[4],\end{aligned} \tag{5.34}$$

де C^+, C^- *— додатні сталі,* γ^+, γ^- *— дійсні числа.*

Тоді за умов

$$\Pi_3\varphi_j \in \Phi_{\gamma^+,g_j}, \quad \Pi_4\varphi_j \in \Phi_{\gamma^-,g_j}, \quad j=1,2,$$

де $g_0 = t_0^{-L_3}$, $g_1 = t_1^{L_3}$, *існує єдиний розв'язок* u *задачі* (5.1), (5.2) *з простору* U_{2,G_j} *і справджуються оцінки*

$$\|\Pi_j u\|^2_{2,G_j} \leqslant C(\|\Pi_j\varphi_0\|^2_{(p^*+3)/2,g_{0j}} + \|\Pi_j\varphi_1\|^2_{(p^*+3)/2,g_{1j}}), \qquad j=3,4, \tag{5.35}$$

де функції G_3, G_4 *визначаються наступним чином*

$$G_3(t)=\begin{cases} t^{L_3}, & t\leqslant t_0,\\ t^{L_3}t_0^{2L_2}, & t_0\leqslant t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}t_0^{2L_2}, & t\geqslant 1,\end{cases}\qquad G_4(t)=\begin{cases} t^{L_3}t_1^{-2L_2}, & t\leqslant 1,\\ t^{-L_3}t_1^{-2L_2}, & 1\leqslant t\leqslant t_1,\\ t^{-L_3}, & t\geqslant t_1.\end{cases}$$

5.2. Рівняння високого порядку

Розглянемо таку нелокальну двоточкову задачу для рівняння типу Ейлера високого порядку:

$$\big(t\partial_t\big)^n u(t,x)+\sum_{j=1}^{n} A_j(\partial_x)\big(t\partial_t\big)^{n-j}u(t,x)=0,\qquad (t,x)\in(0,\infty)\times\Omega_{2\pi}^p,\tag{5.36}$$

$$\mu_0\partial_t^{j-1}u(t_0,x)+\mu_1\partial_t^{j-1}u(t_1,x)=\varphi_j(x),\quad j=1,\dots,n,\quad x\in\Omega_{2\pi}^p,\tag{5.37}$$

де $0<t_0<t_1$, $\mu_0,\mu_1\in\mathbb{C},\mu_0\cdot\mu_1\neq 0$, $|\mu_0|^2+|\mu_1|^2\leqslant M^2$, $M>0$,

$$\begin{gathered} A_j(\partial_x)=\sum_{|s|\leqslant j} a_{n-j,s}\partial_x^s=\sum_{|s|\leqslant j} a_{n-j,s}\partial_{x_1}^{s_1}\dots\partial_{x_p}^{s_p},\quad a_{s_0,s}\in\mathbb{C},\\ |a_{s_0,s}|\leqslant A,\ A>0,\ s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p,\ |s|=s_1+\ldots+s_p.\end{gathered}\tag{5.38}$$

Будемо припускати, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ рівняння

$$\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}A_j(ik)\lambda^{n-j}=0\tag{5.39}$$

має прості корені $\lambda_1(k),\dots,\lambda_n(k)$, це припущення рівносильне тому, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ дискримінант $W(k)$ рівняння (5.39) є відмінним від нуля. Надалі вважатимемо, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ нумерація коренів рівняння (5.39) підпорядковується правилу $\operatorname{Re}\lambda_1(k)\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n(k)$.

Знайдемо розв'язок задачі (5.36), (5.37) за допомогою відокремлення змінних. Для цього використаємо для шуканої функції $u(t,x)$ та заданих функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,n$, їхні зображення у вигляді рядів Фур'є за ортогональною системою $\{e^{(ik,x)}:k\in\mathbb{Z}^p\}$:

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{(ik,x)},\qquad (ik,x)=ik_1x_1+\ldots+ik_px_p,\tag{5.40}$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} e^{(ik,x)}, \quad j = 1,\ldots,n. \tag{5.41}$$

Підставляючи ряди (5.40), (5.41) у рівняння (5.36) та нелокальні умови (5.37), отримуємо, що кожен коефіцієнт $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, ряду (5.40) є розв'язком задачі

$$\big(td_t\big)^n u_k(t) + \sum_{j=1}^{n} A_j(ik)\big(td_t\big)^{n-j} u_k(t) = 0, \qquad d_t = d/dt, \tag{5.42}$$

$$\mu_0 d_t^{j-1} u_k(t_0) + \mu_1 d_t^{j-1} u_k(t_1) = \varphi_{jk}, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{5.43}$$

Позначимо: $\mu(\lambda) = \mu_0 t_0^\lambda + \mu_1 t_1^\lambda$, $\lambda^{\underline{1}} = \lambda$, $\lambda^{\underline{r}} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-r+1)$, $r = 2,\ldots,n-1$, очевидно, що $(t^\lambda)^{(r)} = \lambda^{\underline{r}}\, t^{\lambda-r}$, $r = 1,\ldots,n-1$.

Нехай $H(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — характеристична матриця нелокальної задачі (5.42), (5.43), яка зображується формулою

$$H(k) = \begin{pmatrix} \mu(\lambda_1(k)) & \ldots & \mu(\lambda_n(k)) \\ \lambda_1(k)\mu(\lambda_1(k)-1) & \ldots & \lambda_n(k)\mu(\lambda_n(k)-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1(k)^{\underline{n-1}}\mu(\lambda_1(k)-n+1) & \ldots & \lambda_n(k)^{\underline{n-1}}\mu(\lambda_n(k)-n+1) \end{pmatrix}. \tag{5.44}$$

Якщо $H(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, — невироджена матриця, то задача (5.42), (5.43) має єдиний розв'язок

$$u_k(t) = \big(t^{\lambda_1(k)} \ \ldots \ t^{\lambda_n(k)}\big) H^{-1}(k) \begin{pmatrix} \varphi_{1k} \\ \ldots \\ \varphi_{nk} \end{pmatrix}. \tag{5.45}$$

Розіб'ємо $\mathbb{Z}^p$ на множини $Z[0], Z[1], \ldots, Z[n]$, де

$$Z[0] = \{k\colon \operatorname{Re}\lambda_n(k) \leqslant 0\}, \qquad Z[n] = \{k\colon \operatorname{Re}\lambda_1(k) > 0\},$$

$$Z[j] = \{k\colon \operatorname{Re}\lambda_{n-j}(k) \leqslant 0 < \operatorname{Re}\lambda_{n-j+1}(k)\}, \quad j = 1,\ldots,n;$$

також використовуватимемо розбиття $\mathbb{Z}^p = Z\{0\}\cup Z\{1\}$, де

$$Z\{0\} = \big\{k\colon \operatorname{Re}A_1(ik) \geqslant 0\big\}, \qquad -A_1(ik) = \lambda_1(k) + \cdots + \lambda_n(k).$$

Очевидно, що $Z[0] \subset Z\{0\}$ і $Z[n] \subset Z\{1\}$.

Будемо використовувати факторизації матриці (5.44).

Для випадку $t_1 \leqslant 1$ маємо

$$H(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \tilde{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{k}^{n-1} \end{pmatrix} \tilde{H}(k) \begin{pmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & t_0^{\lambda_n(k)} \end{pmatrix}, \qquad k \in Z[0],$$

$$H(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \tilde{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{k}^{n-1} \end{pmatrix} \tilde{H}(k) \begin{pmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & & \\ & \ddots & \\ & & t_1^{\lambda_n(k)} \end{pmatrix}, \qquad k \in Z[n],$$

а для $k \in Z[j]$ маємо

$$H(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \tilde{k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{k}^{n-1} \end{pmatrix} \tilde{H}(k) \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \operatorname{diag}\big(t_0^{\lambda_1(k)}, \ldots, t_0^{\lambda_{n-j}(k)}\big) & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}\big(t_1^{\lambda_{n-j+1}(k)}, \ldots, t_1^{\lambda_n(k)}\big) \end{pmatrix},$$

де абсолютні значення елементів матриць $\tilde{H}(k)$ обмежені величиною h, яка залежить лише від A, M, t_0 і t_1.

Якщо $k \in Z[0]$, то

$$\det \tilde{H}(k) = \tilde{k}^{-(n-1)n/2} t_0^{A_1(ik)} \det H(k),$$

якщо $k \in Z[n]$, то

$$\det \tilde{H}(k) = \tilde{k}^{-(n-1)n/2} t_1^{A_1(ik)} \det H(k),$$

якщо ж $k \in Z[j]$, то

$$\det \tilde{H}(k) = \tilde{k}^{-(n-1)n/2} t_0^{-(\lambda_1(k)+\cdots+\lambda_{n-j}(k))} t_1^{-(\lambda_{n-j+1}(k)+\cdots+\lambda_n(k))} \det H(k).$$

Нехай $\tilde{\varphi}_{jk} = \tilde{k}^{1-j}\varphi_{jk}$, де $j = 1, \dots, n$, тоді

$$u_k(t) = \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\tilde{H}^{-1}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}, \qquad k \in Z[0],$$

$$u_k(t) = \left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\tilde{H}^{-1}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}, \qquad k \in Z[n],$$

а для $k \in Z[j]$ маємо

$$u_k(t) = \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_{n-j}(k)} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_{n-j+1}(k)} \dots \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\tilde{H}^{-1}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}.$$

Якщо $\hat{H}(k)$ — приєднана до $\tilde{H}(k)$ матриця ($\tilde{H}^{-1}(k) = \hat{H}(k)/\det\tilde{H}(k)$), то

$$u_k(t) = \frac{\tilde{k}^{(n-1)n/2}}{t_0^{A_1(ik)}\det H(k)}\left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\hat{H}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}, \ k \in Z[0], \tag{5.46}$$

$$u_k(t) = \frac{\tilde{k}^{(n-1)n/2}}{t_1^{A_1(ik)}\det H(k)}\left(\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\hat{H}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}, \ k \in Z[n], \tag{5.47}$$

а для $k \in Z[j]$ маємо

$$u_k(t) = \frac{t_0^{\lambda_1(k)+\dots+\lambda_{n-j}(k)}t_1^{\lambda_{n-j+1}(k)+\dots+\lambda_n(k)}}{\tilde{k}^{-(n-1)n/2}\det H(k)} \times$$

$$\times\left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_1(k)} \dots \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\lambda_{n-j}(k)} \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_{n-j+1}(k)} \dots \left(\frac{t}{t_1}\right)^{\lambda_n(k)}\right)\hat{H}(k)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}_{1k}\\ \dots\\ \tilde{\varphi}_{nk}\end{pmatrix}. \tag{5.48}$$

Визначник матриці $H(k)$ є формою степеня n від двох комплексних змінних μ_0 і μ_1. Коефіцієнт при μ_0^n у цій формі дорівнює визначникові

$$\begin{vmatrix} t_0^{\lambda_1(k)} & \dots & t_0^{\lambda_n(k)} \\ \lambda_1(k) t_0^{\lambda_1(k)-1} & \dots & \lambda_n(k) t_0^{\lambda_n(k)-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(k)\underline{^{n-1}} t_0^{\lambda_1(k)-n+1} & \dots & \lambda_n(k)\underline{^{n-1}} t_0^{\lambda_n(k)-n+1} \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{t_0^{A_1(ik)+(n-1)n/2}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(k) & \dots & \lambda_n(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1(k)\underline{^{n-1}} & \dots & \lambda_n(k)\underline{^{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{t_0^{A_1(ik)+(n-1)n/2}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1(k) & \dots & \lambda_n(k) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1}(k) & \dots & \lambda_n^{n-1}(k) \end{vmatrix} = \frac{W(k)}{t_0^{A_1(ik)+(n-1)n/2}} \neq 0,$$

де $W(k)$ — дискримінант рівняння (5.39), відмінний від нуля згідно з припущенням.

Для $j = 0, 1, \dots, n$ і $\alpha = 0, 1$ позначимо через $\Pi_{j\alpha}$ проєктор на простір, породжений експонентами $e^{(ik,x)}$, де $k \in Z[j] \cap Z\{\alpha\}$. Цей проєктор діє на функції $\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^n} \varphi_k e^{(ik,x)}$ за формулою

$$\Pi_{j\alpha}\varphi(x) = \sum_{k\in Z[j]\cap Z\{\alpha\}} \varphi_k e^{(ik,x)}.$$

Теорема 5.4 . *Нехай* $g_{j0} = \tau^{j\Lambda}$, $g_{j1} = \tau^{(n-j)\Lambda}$, $j = 1, \dots, n$, $\tau = t_1/t_0$, *функція* G *визначена наступним чином*

$$\frac{1}{G(t)} = \begin{cases} (t/t_0)^\Lambda, & t \leqslant t_0, \\ 1, & t_0 < t \leqslant t_1, \\ (t/t_1)^\Lambda, & t_1 < t, \end{cases} \tag{5.49}$$

дискримінант рівняння (5.39) *має оцінку*

$$|W(k)| \geqslant \theta_1^{-1}\tilde{k}^{-w}, \tag{5.50}$$

і нерівність

$$\|\hat{H}(k)\| < n^{(n+1)/2}h^{n-1} \tag{5.51}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$*).*

Для довільного $\varepsilon > 0$ *існує множина* $B \subset \mathbb{C}$, $\operatorname{mes} B \leqslant \varepsilon$, *що для всіх* $(\mu_0, \mu_1) \notin B$, *за умов*

$$\Pi_{j\alpha}\varphi_j \in \Phi_{q-(1-n-p^*)n/2, g_{j\alpha}}, \quad p^* > p, \quad j = 1, \ldots, n, \ \alpha = 0, 1,$$

існує єдиний розв'язок u *задачі* (5.36), (5.37) *з простору* $U_{q-w,G}$ *і справджуються оцінки*

$$\left\|\Pi_{j\alpha}u\right\|^2_{q-w,G} < \frac{C_1^2}{\varepsilon^n}\left(\sum_{r=0}^{n}\Lambda^{2r}\right)\sum_{j=1}^{n}\|\Pi_{j\alpha}\varphi\|^2_{q-(1-n-p^*)n/2, g_{j\alpha}}. \tag{5.52}$$

де $C_1 = \sqrt{\theta^n n^{n+2} t_1^{(n-1)n}}\theta_1 h^{n-1}$.

Доведення. Нехай $\zeta(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\tilde{k}^{-x}$ і $\theta = 2\pi^2M^2\zeta(p^*)$. Позначимо через B_k^0 — множину векторів (μ_0, μ_1), для яких виконується нерівність

$$t_0^{A_1(ik)+(n-1)n/2}|W(k)|^{-1}|\det H(k)| < \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{n/2}\tilde{k}^{-p^*n/2}, \tag{5.53}$$

і $B_k^0(\mu_1) \subset B_k$ — множину тих векторів (μ_0, μ_1), для яких при фіксованому μ_1, де $|\mu_1| \leqslant M$, виконується (5.53).

За теоремою Фубіні маємо

$$\operatorname{mes} B_k^0 = \iint\limits_{|\mu_1|\leqslant M}\operatorname{mes} B_k(\mu_1)\,d\mu_1. \tag{5.54}$$

За лемою Картана

$$\operatorname{mes} B_k^0(\mu_1) \leqslant \pi\frac{\varepsilon}{\theta}\tilde{k}^{-p^*},$$

тому формула (5.54) дає

$$\operatorname{mes} B_k^0 \leqslant \pi^2 M^2 \frac{\varepsilon}{\theta} \tilde{k}^{-p^*}.$$

На множині $B^0 = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} B_k^0$ хоча б один раз виконується нерівність (5.53), причому

$$\operatorname{mes} B^0 \leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} B_k^0(\mu_1) \leqslant \pi^2 M^2 \frac{\varepsilon}{\theta} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \tilde{k}^{-p^*} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поза множиною B^0 для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ отримуємо оцінку

$$|\det H(k)| \geqslant t_0^{-A_1(ik)-(n-1)n/2} \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{n/2} \tilde{k}^{-p^* n/2} |W(k)|. \tag{5.55}$$

Аналогічно, поза множиною B^1, де $\operatorname{mes} B^1 \leqslant \varepsilon/2$, для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ отримуємо оцінку

$$|\det H(k)| \geqslant t_1^{-A_1(ik)-(n-1)n/2} \left(\frac{\varepsilon}{\theta}\right)^{n/2} \tilde{k}^{-p^* n/2} |W(k)|. \tag{5.56}$$

Отже, поза множиною $B = B^0 \cup B^1$, де $\operatorname{mes} B \leqslant \varepsilon$, справджуються обидві оцінки (5.55) і (5.56).

Далі використаємо формули

$$(t\partial t)^r t^\lambda = \lambda^r t^\lambda, \quad r \geqslant 0,$$

нерівність Коші–Буняковського, оцінки

$$|\lambda_j(k)| \leqslant \Lambda \tilde{k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де

$$\Lambda = \sup_{k\in\mathbb{Z}^p} \left\{ \frac{|\lambda_j(k)|}{\tilde{k}} : j = 1, \ldots, n \right\},$$

а також оцінки (5.55), (5.56).

Згідно з припущеннями теореми функції $u_k(t)$ існують та визначаються формулами (5.46)–(5.48). Для $k \in Z[j] \cap Z\{0\}$ і $k \in Z[j] \cap Z\{1\}$, де $j = 0, 1, \ldots, n$, відповідно, маємо

$$\left|(t\partial t)^r u_k(t)\right|^2 \leqslant \frac{\theta^n t_0^{(n-1)n}}{\varepsilon^n}\frac{\Lambda^{2r}\|\hat{H}(k)\|^2\tau^{2\operatorname{Re}\lambda_{n-j+1}(k)+\cdots+2\operatorname{Re}\lambda_n(k)}}{\tilde{k}^{(1-n-p^*)n}|W(k)|^2}\times$$
$$\times\Big(\sum_{l=1}^{n-j}\Big(\frac{t}{t_0}\Big)^{2\operatorname{Re}\lambda_l(k)}+\sum_{l=n-j+1}^{n}\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{2\operatorname{Re}\lambda_l(k)}\Big)\sum_{j=1}^{n}|\tilde{\varphi}_{jk}|^2, \quad (5.57)$$

$$\left|(t\partial t)^r u_k(t)\right|^2 \leqslant \frac{\theta^n t_1^{(n-1)n}}{\varepsilon^n}\frac{\Lambda^{2r}\|\hat{H}(k)\|^2\tau^{-2\operatorname{Re}\lambda_1(k)-\cdots-2\operatorname{Re}\lambda_{n-j}(k)}}{\tilde{k}^{(1-n-p^*)n}|W(k)|^2}\times$$
$$\times\Big(\sum_{l=1}^{n-j}\Big(\frac{t}{t_0}\Big)^{2\operatorname{Re}\lambda_l(k)}+\sum_{l=n-j+1}^{n}\Big(\frac{t}{t_1}\Big)^{2\operatorname{Re}\lambda_l(k)}\Big)\sum_{j=1}^{n}|\tilde{\varphi}_{jk}|^2, \quad (5.58)$$

де $\tau = t_1/t_0 > 1$. При цьому вважатимемо нульовими суми $\sum_{l=1}^{0}$ і $\sum_{l=n+1}^{n}$. Формулу (5.55) застосовано для нерівності (5.57), а формулу (5.56) — для нерівності (5.58).

Оцінки для функцій $(t\partial_t)^r u_k(t)$, $0 \leqslant r \leqslant n$, випливають з нерівностей (5.50)–(5.51), (5.57)–(5.58), дійсно,

$$\left|(t\partial t)^r u_k(t)\right|^2 \leqslant \frac{C_1^2\Lambda^{2r}\tilde{k}^{2w}}{\varepsilon^n\tilde{k}^{(1-n-p^*)n}} g_{j\alpha}^{2\tilde{k}} G^{-2\tilde{k}}(t)\sum_{j=1}^{n}|\tilde{\varphi}_{jk}|^2, \quad k \in Z[j]\cap Z\{\alpha\}. \quad (5.59)$$

Тоді з формули (5.59) випливають оцінки для розв'язку (5.52). Єдиність розв'язку випливає з однозначного визначення функцій $u_k(t)$. $\square$

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

У п'ятому розділі дисертації досліджено умови коректності задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t та умовами періодичності за іншими координатами для лінійних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

Отримано формули для розв'язків розглянутих нелокальних двоточкових задач у вигляді рядів Фур'є. Встановлено умови збіжності цих рядів у відповідних функціональних просторах. За допомогою тверджень про оцінки виняткових множин уперше для рівнянь типу Ейлера доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників нелокальних двоточкових задач. Раніше метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників нелокальних двоточкових задач були встановлені лише для випадку рівнянь зі сталими коефіцієнтами, тоді як розглянуте рівняння типу Ейлера має змінні за t коефіцієнти.

Основні результати цього розділу викладено у працях [91].

Результати цього розділу можна узагальнити на випадок нелокальних двоточкових задач для систем лінійних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі проведено дослідження розв'язності некласичних задач з локальними багатоточковими умовами, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за рештою змінних для диференціального рівняння із частинними похідними типу Ейлера.

Наведено огляд праць, які є близькими до тематики даної дисертації. Описано загальну методику дослідження задач, наведено деякі допоміжні твердження з аналізу і теорії чисел.

Одержано такі нові результати:

• встановлено умови існування єдиного розв'язку (зображеного рядом Фур'є) двоточкових і багатоточкових задач з простими вузлами інтерполяції для рівняння Ейлера другого і високого порядків. За допомогою метричного підходу показано, що оцінки знизу малих знаменників виконуються для всіх векторів, компонентами яких є параметри задачі (коефіцієнти рівнянь, значення вузлів інтерполяції), крім, можливо, множини векторів нульової або малої міри Лебега. Розглянуто частковий випадок багатоточкової задачі, коли її вузли є логарифмічно рівновіддаленими.

• розглянуто задачу Ніколетті для рівняння з частинними похідними типу Ейлера. Встановлено умови коректної розв'язності задачі у просторах функцій зі степеневою та експоненційною поведінкою коефіцієнтів Фур'є. Уперше для рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників задачі Ніколетті. Побудовано приклади задач, що ілюструють наведені результати.

• досліджено нелокальну двоточкову задачу для диференціального рівняння з частинними похідними типу Ейлера другого та високого порядків.

Отримано умови існування єдиного розв'язку задачі, застосовано метричний підхід для доведення оцінок знизу малих знаменників задачі. Показано, що такі оцінки виконуються для всіх векторів, складених із параметрів задачі, крім множини векторів нульової або малої міри Лебега. Виконання цих оцінок проаналізовано для різних випадків розташування дійсних частин коренів характеристичного рівняння, а також різних випадків розташування вузлів інтерполяції t_0, t_1.

Результати дисертації мають теоретичний характер. Їх можна використати у майбутніх дослідженнях задач з локальними багатоточковими умовами, задач з умовами Ніколетті та задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною та умовами 2π-періодичності за рештою змінних для систем рівнянь із частинними похідними типу Ейлера, а також при дослідженні конкретних задач практики, які моделюються розглянутими задачами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абдо, С.А., & Юрчук, Н.И. Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки. *Дифференц. уравнения*, 21(3), 417–425.
2. Абдо, С.А., & Юрчук, Н.И. (1985). Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений. *Дифференц. уравнения*, 21(5), 806–815.
3. Антыпко, И.И., & Перельман, М.А. (1976). Критерий безусловной корректности краевой задачи в слое. *Теория функций, функцион. анализ, и их приложения*, 26, 3–9.
4. Антыпко, И.И., & Перельман, М.А. (1972). О классах единственности решения нелокальной многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. *Теория функций, функцион. анализ, и их приложения*, 16, 98–109.
5. Бейкер, Дж., & Грейвс-Моррис, П. (1986). *Аппроксимации Паде.* Наука.
6. Берник, В.И., Пташник, Б.И., & Салыга, Б.О. (1977). Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами. *Дифференц. уравнения*, 13(4), 637–645.
7. Берник, В.И., & Мельничук, Ю.В. (1988). *Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа.* Наука и техника.
8. Бобик, О.І., Боднарчук, П.І., Пташник, Б.Й., & Скоробогатько, В.Я. (1972). *Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.* Наук. думка.
9. Бобик, І.О., & Симотюк, М.М. (2010). Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідни-

ми. *Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки*, 65(625), 11–19.

10. Бобик, І.О., & Пташник, Б.Й. (1994). Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Укр. мат. журн*, 46(7), 795–802.
11. Борок, В.М., & Фардигола, Л.В. (1990). Нелокальные корректные краевые задачи в слое. *Матем. заметки*, 48(1), 20–25.
12. Борок, В.М., & Перельман, М.А. (1973). О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое. *Изв. вузов. Математика*, 8, 29–34.
13. Борок, В.М., & Евдокимова, С.В. (1989). Регулярные граничные задачи в полосе. *Теория функций, функцион. анализ и их прилож*, 51, 31–37.
14. Валицкий, Ю.Н. (1989). К вопросу об условной корректности многоточечной задачи. *Сиб. мат. журн*, 30(4), 251–258.
15. Валицкий, Ю.Н. (1996). Корректность задачи при заданных значениях функции и ее производных в нескольких точках. *Сиб. мат. журн*, 37(2), 251–258.
16. Валицкий, Ю.Н. (1988). Корректность многоточечной задачи для уравнения с операторными коэффициентами. *Сиб. мат. журн*, 29(4), 44–53.
17. Валицкий, Ю.Н. (1986). О корректности многоточечной задачи для дифференциального уравнения с операторными коэффициентами. *ДАН СССР*, 286(5), 1041–1043.
18. Валицкий, Ю.Н. (1982). Условная корректность четырехточечной задачи для одного дифференциального уравнения. *Вопросы корректности обратных задач ма. физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР*, 45–49.
19. Валицкий, Ю.Н. (1981). Четырехточечная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. *Функцион. анализ*,

15(4), 69–70.

20. Гадецкая, С.В. (1989). Корректные многоточечные задачи в полосе для дифференциальных уравнений с нагрузками. *Изв. вузов. Математика*, 3, 79–82.
21. Горбачук, В. И., & Горбачук, М. Л. (1984). *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* Наук. думка.
22. Гребеников, Е.А. (1978). *Метод усреднения.* Наука.
23. Гребеников, Е.А., & Рябов, Ю.А. (1978). *Резонансы и малые знаменатели в небесной механике.* Наука.
24. Дезин, А.А. (1978). Об операторных уравнениях второго порядка. *Сиб. мат. журн*, 19(5), 1032–1042.
25. Дезин, А.А. (1980). *Общие вопросы теории граничных задач.* Наука.
26. Дубинский, Ю.А. (1982). Алгебра псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами и ее приложения к математической физике. *Успехи мат. наук*, 37(5), 97–137.
27. Илькив, В.С., Полищук, В.Н., Пташник, Б.И., & Салыга, Б.О. (1986). Нелокальная многоточечная задача для псевдодифференциальных операторов с аналитическими символами. *Укр. мат. журн*, 38(5), 582–587.
28. Ільків, В.С. (1999). Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 42(4), 68–74.
29. Ільків, В.С., & Слоньовський, Я.О. (2021). Двоточкова задача для диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку типу Ейлера. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат.*, 91, 87-98. http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2021.91.087-098
30. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2023). Метричні оцінки визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології*, 36, 96-100. https://doi.org/10.15407/fmmit2023.36.096

31. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2022). Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера. *Математичні методи та фізико-механічні поля*, 65(1-2), 65-79.
32. Ільків, В.С., Симотюк, М.М., & Слоньовський, Я.О. (2022). Метричні оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Прикладні проблеми механіки і математики*, 20, 31-38.
33. Ільків, В.С., & Магеровська, Т.В. (2007). Про константу в лемі Пяртлі. *Вісн. нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки*, 601, 12–17.
34. Ільків, В.С., Нитребич, З., Слоньовський, Я О., & Симотюк, М.М. (2022). Multipoint problem for higher-order Euler partial differential equations. *Міжнародна конференція «Equadiff 15», Book of abstracts*, 228.
35. Каленюк, П.І., Нитребич, З.М., & Плешівський, Я.М. (1999). Багатоточкова задача для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними. *Вісник Держ. ун-ту «Львівська політехніка»*, 364, 223–227.
36. Каленюк, П.І., Когут, І.В., & Нитребич, З.М. (2009). Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 52(4), 7–17.
37. Каленюк, П.І., Нитребич, З.М., & Плешівський, Я.М. (2000). Крайова задача з локальними багатоточковими умовами для однорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 43(2), 90–95.
38. Каленюк, П.І., Баранецкий, Я.Е., & Нитребич, З.Н. (1993). *Обобщенный метод разделения переменных.* Наук. думка.
39. Каленюк, П.І., & Нитребич, З.М. (1996). Побудова розв'язку задачі

типу Валле Пуссена для полілінійного диференціального рівняння з частинними похідними. *Вісн. Львів. політехн. ін-ту*, 42, 44–45.

40. Кигурадзе, И.Т. (1975). *Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.* Изд-во Тбилис. ун-та.
41. Клюс, І.С., & Нитребич, З.М. (2000). Багатоточкова задача для диференціального рівняння із частинними похідними, що розкладається в добуток лінійних відносно диференціювання множників. *Вісник Держ. ун-ту «Львівська політехніка». Прикладна математика*, 407, 220–226.
42. Колмогоров, А.Н., & Фомин, С.В. (1976). *Элементы теории функций и функционального анализа. 4-е изд.* Наука.
43. Колмогоров, А.Н. (1953). О динамических системах с интегральным инвариантом на торе. *Докл. АН СССР*, 93(5), 763–766.
44. Корбут, Л.І., & Матійчук, М.І. (1994). Про зображення розв'язків нелокальних крайових задач для параболічних рівнянь. *Укр. мат. журнал*, 46(7), 947–951.
45. Лавренчук, В.П. (1990). Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя. *Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями*, 111–119. Рута.
46. Лучка, А.Ю. (1980). *Проекционно–итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* Наук. думка.
47. Лучка, А.Ю., & Габрель, О.М. (1982). Наближене розв'язання задачі Валле Пуссена для звичайних диференціальних рівнянь проекційно-ітеративним методом. *Доп. АН УРСР*, 8, 18–22.
48. Лучко, В.М. (2004). Про двоточкову крайову задачу для параболічних рівнянь вищого порядку. *Науковий вісник Чернівецького університету. Математика*, 228, 51–59.
49. Мамян, А.Х. (1982). Общие граничные задачи в слое. *ДАН СССР*, 267(2), 292–296.

50. Матійчук, М.І. (1999). *Параболічні сингулярні крайові задачі.* Наук. думка.

51. Матурін, Ю.П., & Симотюк, М.М. (2018). Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння. *Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту*, 2(33), 100–108.

52. Наймарк, М.А. (1969). *Линейные дифференциальные операторы.* Наука.

53. Нитребич, З.М. (2000). Граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші для неоднорідного рівняння з частинними похідними. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 43(3), 64–70.

54. Нитребич, З.М., Пташник, Б.Й., & Репетило, С.М. (2014). Задача Діріхле–Неймана для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. «Математика і інформатика»*, 25(1), 94–105.

55. Нитребич, З.М. (1999). Про граничний перехід від розв'язку багатоточкової задачі до розв'язку задачі Коші. *Вісн. Львів. нац. ун-ту. Серія мех.-мат.*, 54, 125–131.

56. Павленко, В.Н., & Петраш, Т.А. (2012). Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 18(2), 199–204.

57. Покорный, Ю.В. (1980). *Вопросы качественной теории краевой задачи Валле Пуссена.* [Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук, Воронеж].

58. Покорный, Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев, В.Л., Боровских, А.В., Лазарев, К.П., & Шабров, С.А. (2004). *Дифференциальные уравнения на геометрических графах.* Физматлит.

59. Пташник, Б.Й. (1974). Аналог n-точкової задачі для системи гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами. *Доп. АН УРСР. Сер. А*, 8, 709–712.

60. Пташник, Б.Й., & Симотюк, М.М. (2003). Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Укр. мат. журн*, 55(2), 241–254.
61. Пташник, Б.Й., & Симотюк, М.М. (2003). Багатоточкова задача з кратними вузлами для диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Укр. мат. журн*, 55(3), 400–413.
62. Пташник, Б.Й., & Репетило, С.М. (2014). Задача Діріхле–Неймана для систем гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 57(2), 25–31.
63. Пташник, Б.Й., & Репетило, С.М. (2012). Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Прикл. проблеми механіки і математики*, 10, 7–14.
64. Пташник, Б.Й., & Репетило, С.М. (2013). Задача Діріхле-Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 56(3), 15–28.
65. Пташник, Б.Й. (1967). Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. *Доп. АН УРСР. Сер. А*, 2, 127–130.
66. Пташник, Б.Й. (1966). Задача типу Валле Пуссена для гіперболічних рівнянь із сталими коефіцієнтами. *Доп. АН УРСР*, 10, 1254–1257.
67. Пташник, Б.И., & Штабалюк, П.И. (1986). Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным. *Дифференц. уравнения*, 22(4), 669–678.
68. Пташник, Б.Й. (1967). n-лінійна задача для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. *Вісн. Львів. політехн. ін-ту*, 16, 80–87.
69. Пташник, Б.И. (1984). *Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными.* Наук. думка.
70. Пташник, Б.Й., Ільків, В.С., Кміть, І.Я., & Поліщук, В.М. (2002). *Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними.* Наук.

думка.

71. Пытьев, Ю.П. (1969). *Математические методы интерпретации эксперимента*. Высшая школа.
72. Репетило, С.М., & Симотюк, М.М. (2018). Задача Діріхле-Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку зі сталими коефіцієнтами. *Прикл. проблеми механіки і математики*, 16, 147–153.
73. Романко, В.К. (1980). *Граничные задачи для общих дифференциальных операторов с выделенной переменной*. [Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук, МФТИ].
74. Романко, В.К. (1974). Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов. *Дифференц. уравнения*, 10(1), 117–131.
75. Романко, В.К. (1967). К теории операторов вида $\frac{d^m}{dt^m} - A$. *Дифференц. уравнения*, 3(11), 1957–1970.
76. Сабитов, К.В. (2011). Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области. *Матем. заметки*, 89(4), 596–602.
77. Сабитова, Ю.К. (2009). Нелокальные начально-граничные задачи для вырождающегося гиперболического уравнения. *Известия вузов. Математика*, 12, 49–58.
78. Сайдаматов, Э.М. (1995). О корректности неоднородных граничных задач для псевдодифференциальных уравнений. *Узб. мат. журн*, 2, 77–88.
79. Самойленко, А.М., & Ронто, Н.И. (1986). *Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач*. Наук. думка.
80. Сансоне, Дж. (1953). *Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т.* (Том 1). Изд-во иностр. лит.
81. Симотюк, М.М. (2003). Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними. *Мат. методи та фіз.-мех.*

поля, 46(2), 26–41.

82. Симотюк, М.М. (2002). Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами. *Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту*, 7, 96–107.
83. Симотюк, М.М. (2005). Двоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 48(1), 44–58.
84. Симотюк, М.М. (2004). Задача з двома кратними вузлами для систем лінійних рівнянь із частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання. *Матем. вісник НТШ*, 1, 130–148.
85. Скоробогатько, В.Я. (1963). Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители, I. *Укр. мат. журн*, 15(2), 217–223.
86. Скоробогатько, В.Я., & Бобык, Е.И. (1964). Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители, II. *Укр. мат. журн*, 16(6), 783–798.
87. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2022). Багатоточкова задача для диференціального рівняння Ейлера високого порядку. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2022»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2022/abstracts/Slonovskyi.pdf.
88. Слоньовський, Я.О., & Ільків, В.С. (2021). Двоточкова задача для диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку типу Ейлера. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2021/abstracts/Slonovskyi.pdf.
89. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2023). Задача Ніколетті для безтипного рівняння із частинними похідними. *Міжнародна наукова конференція «Математика та інформаційні технології», присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики, матеріали міжнародної наукової конференції*, 212.
90. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2022). Метричні

оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера. *Міжнародна конференція «Теорія наближення функцій та її застосування», тези доповідей*, 34-35.

91. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2024). Нелокальна задача для рівняння Ейлера високого порядку. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2024»*. http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2024/abstracts/Slonovskyi.pdf.
92. Слоньовський, Я.О., Ільків, В.С., & Симотюк, М.М. (2023). Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера. *Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми механіки та математики - 2023», збірник наукових праць*, 373-374.
93. Слоньовський, Я.О., & Ільків, В.С. (2021). The two-point problem for Euler type partial differential equation. *III Міжнародна науково-практична Інтернет-конференція «Математика та інформатика у вищій школі: виклики сучасності», матеріали конференції*, 58–62.
94. Спринджук, В.Г. (1980). Достижения и проблемы теории диофантовых приближений. *Успехи матем. наук*, 35(4), 3–68.
95. Спринджук, В.Г. (1977). *Метрическая теория диофантовых приближений*. Наука.
96. Тамаркин, Я.Д. (1917). *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*. Петроград.
97. Умаров, С.Р. (1993). *Псевдодифференциальные операторы и вопросы разрешимости краевых задач*. [Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук., Ташкент. гос. ун-т].
98. Фаддєєв, Д.К., & Сомінський, І.С. (1971). *Збірник задач з вищої алгебри*. Вища школа.
99. Хинчин, А.Я. (1978). *Цепные дроби*. Наука.
100. Шидловский, А. Б. (1982). *Диофантовы приближения и трансцен-*

дентные числа. Изд-во МГУ.

101. Ширяев, А.Н. (1989). *Вероятность.* Наука.
102. Шмидт, В. М. (1983). *Диофантовы приближения.* Мир.
103. Arnol'd, V.I. (1963). Small denominators and problems on the stability of motions in the classical and celestial mechanics. *Russian Math. Surveys*, 18(6), 85–191.
104. Barták, J., Herrmann, L., Lovicar, V., & Vejvoda, O. (1991). Partial Differential Equations of Evolution. *Ellis Horwood Series: Mathematics and its Applications*, Ellis Horwood.
105. Barták, J., & Vejvoda, O. (1991). Periodic solutions to linear partial differential equations of the first order. *Czechoslovak Math. J.*, 41(116), 185–202.
106. Bassanini, P. (1981). Iterative methods for quasilinear hyperbolic systems in the first canonic form. *Appl. Anal.*, 12(2), 105–117.
107. Bernik, V., Beresnevich, V., Vasylyshyn, P., & Ptashnyk, B. (1999). A multipoint problem with multiple nodes for linear hyperbolic equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 51, 1476–1483. https://doi.org/10.1007/BF02981680
108. Berti, M., & Bolle, P. (2006). Cantor families of periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations. *Duke Math. J.*, 134, 359–419.
109. Bourgin, D.G., & Duffin R. (1939). The Dirichlet problem for the vibrating string equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 45(12), 851–858.
110. Cesari, L. (1974). Un problema ai limiti per sistemi di equazioni hiperquasi lineari nella forma canonica di Shauder. *Atti. Acad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. phis., mat. e natur.*, 57(5), 303–307.
111. Gel'fond, A.O. (1967). *Calculus of Finite Differences.* Nauka.
112. Graham, R.L., Knuth, D.E., Patashnik, O. (1994). *Concrete mathematics.* Addison-Wesley Publishing Company.

113. Hartman, P. (1954). On nonoscillatory linear differential equations with monotone coefficients. *Amer. J. Math.*, 76, 207–219.

114. Ilkiv, V.S., Symotiuk, M.M., & Slonovskyi, Y.O. (2024). Metric estimates of the characteristic determinant of multipoint problem for an Euler-type equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 282(5), 678-698. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07209-7

115. Kalenyuk, P.I., Kohut, I.V., & Nytrebych, Z.M. (2012). Problem with integral condition for partial differential equation of the first order with respect to time. *J. Math. Sci.*, 181(3), 293–304.

116. Klyus, I., & Ptashnyk, B. (1999). A multipoint problem for partial differential equations unresolved with respect to the higher time derivative. *Ukrainian Mathematical Journal*, 51, 1813–1823. https://doi.org/10.1007/BF02525139

117. Nicoletti, O. (1897–1898). Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie. *Atti della R. Acc. Sc. Torino*, 33, 746–759.

118. Nytrebych, Z.M., & Malanchuk, O.M. (2017). The differential-symbol method of solving the problem two-point in time for a nonhomogeneous partial differential equation. *J. Math. Sci.*, 227(1), 68–80.

119. Nytrebych, Z.M. (2017). The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation. *Journal of Mathematical Sciences*, 224(4), 541–554.

120. Nytrebych, Z.M., Malanchuk, O.M., Ilkiv, V.S., & Pukach, P.Y. (2017). On the solvability of two-point in time problem for PDE. *Italian J. Pure Appl. Math.*, 38, 715–726.

121. Polya, G. (1922). On the mean value theorem corresponding to a given linear homogeneous differential equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 24, 312–324.

122. Ptashnyk, B., & Tymkiv, I. (2013). Multipoint Problem for B-Parabolic

Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 65.
https://doi.org/10.1007/s11253-013-0789-3

123. Ptashnyk, B., & Symotyuk, M. (2003). Multipoint Problem for Nonisotropic Partial Differential Equations with Constant Coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55, 293–310.
https://doi.org/10.1023/A:1025468413500
124. Ptashnyk B., & Symotyuk, M. (2006). Multi-point problem for perturbed partial differential equations. *Nonlinear Boundary Value Problems*, 16.
125. Ptashnyk, B., & Sylyuha, L. (1997). Multipoint problem for typeless systems of differential equations with constant coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*, 49, 1393–1408.
https://doi.org/10.1007/BF02487347
126. Ptashnyk B., & Symotyuk M. (2003). Multipoint Problem with Multiple Nodes for Partial Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55, 481–497. https://doi.org/10.1023/A:1025881429063
127. Pucci, P. (1979). Problemi ai limiti per sistemi di equazioni hiperboliches. *Boll. Unione Mat. ital. Ser. B*, 16(5), 87–99.
128. Rabinowitz, P.H. (1967). Periodic Solutions of Nonlinear Hyperbolie Partial Differential Equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 20(1), 145–205.
129. Siegel, C.L. (1942). Iterations of analytic functions. *Ann. Math*, 43(4), 607–612.
130. Štědrý, M., & Vejvoda, O. (1983). Small time-periodic solutions of equations of magnetohydrodynamics as a singularly perturbed problem. *Apl. Mat.*, 28, 344–356.
131. Sprindzhuk, V.G. (1980). Achievements and problems in Diophantine approximation theory. *Russian Math. Surveys*, 35(4), 1–80.
132. Valitskiy, Yu.N. (1994). Multipoint problem for a differential equation in the Hilbert space *Journ. of inverse and ill-posed problems*, 2(4), 327–247.

133. Valitskii, Yu. (1989). On the conditional well-posedness of a multipoint problem. (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.*, 30(4), 40–53.

134. Valitskii, Yu. (1997). Well-posedness of a multipoint problem in a Hilbert space with given discontinuities of a function and its derivatives. (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.*, 38(3), 504–509.

135. Vallée–Poussin de la Ch. J. (1929). Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n. *Journ. de Math. pure et appl.*, 9(8), 125–144.

136. Vejvoda, O., Štědrý, M. (1984). Existence of classical periodic solutions of the wave equation. The relation of the number-theoretic character of the period and the geometric properties of solutions. *Differentsial'nye Uravneniya*, 20, 1733–1739.

137. Vejvoda, O., Herrmann, L., Lovicar, V., Sova, M., Straskraba, I., & Stedry, M. (1981). *Partial differential equations: time periodic solutions.* Sijthoff and Noordhoof International Publishers B.V.

138. Vejvoda, O. (1964). Periodic solutions of a linear and weakly nonlinear wave equation in one dimension. I. *Czech. Math. J.*, 14, 341–382.