

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ФЕДОРЧУК АЛІНА ВОЛОДИМИРІВНА

УДК: 528.2/.3+ 528.88

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОДИКА ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ НА
ОСНОВІ ЛОКАЛЬНОГО КОРИГУВАННЯ ВИСОТ ГЛОБАЛЬНИХ
МОДЕЛЕЙ ГЕОЇДА**

193 «Геодезія та землеустрій»
(шифр і назва спеціальності)

19 «Архітектура та будівництво»
(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ / А.В.Федорчук/
(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник Савчук Степан Григорович, д.т.н., професор
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

АНОТАЦІЯ

Федорчук А. В. Методика підвищення точності GNSS-нівелювання на основі локального коригування висот глобальних моделей геоїда. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій» (19 «Архітектура та будівництво»). – Національний університет «Львівська політехніка», Львів, 2023.

До появи Глобальних навігаційних супутникових систем (Global Navigation Satellite System – GNSS) визначення висот точок фізичної поверхні Землі, висот геоїда, квазігеоїда, параметрів еліпсоїдів базувалися на суто наземних методах, які ще називають класичними. Одним із важливих методів у цьому питанні є метод нівелювання, який має кілька інтерпретацій, в залежності від типу геодезичного приладдя та отриманих даних, як-от: метод геометричного, тригонометричного, астрономо-геодезичного, астрономо-гравіметричного та гравіметричного нівелювання тощо. Всі перелічені методи уможливають проведення вимірів з високою точністю. Однак сам процес виконання робіт класичними методами є доволі трудомістким, а у деяких випадках і неможливим.

З появою GNSS-систем з'явилися новітні методи щодо отримання геодезичної інформації про Землю у вигляді різних наборів даних, зокрема необхідних для визначення висот, одним із яких є метод GNSS-нівелювання. Новітній підхід дозволяє уникнути практично всіх недоліків класичних методів, однак, навіть при сучасному розвитку GNSS-систем, цей метод має суттєвий недолік, який проявляється у вигляді точності отриманих результатів. У загальному розумінні реалізація методу GNSS-нівелювання передбачає використання двох величин:

- 1) еліпсоїдних висот, отриманих із даних GNSS-спостережень шляхом перетворення геоцентричних просторових координат (X, Y, Z) у систему еліпсоїдних координат (B, L, H) ;

2) висот геоїда чи квазігеоїда (в залежності від прийнятої системи висот) отриманих із відповідної моделі.

Дисертація присвячена теоретичним, практичним та експериментальним дослідженням для можливості підвищення точності GNSS-нівелювання шляхом локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку.

У першому розділі розглянуто сучасні моделі відлікових поверхонь, що використовують в цілях визначення висот методом GNSS-нівелювання. Огляд здійснено із виділенням їхніх основних переваг та недоліків у порівнянні із класичними підходами щодо визначення поверхонь відліку висот. Розглянуто методику побудови основних систем висот (ортометричних та нормальних) з огляду класичних та сучасних підходів, якими є метод високоточного геометричного та GNSS-нівелювання. Проаналізовано основні параметри моделювання сучасних відлікових поверхонь, які відображають переваги та недоліки використання цих моделей для реалізації методу GNSS-нівелювання. З проведеного аналізу наукових досліджень пов'язаних з тематикою GNSS-нівелювання випливає, що сьогодні немає універсального підходу щодо моделювання відлікових поверхонь з високою точністю. Тому знайти розв'язання цієї проблеми можна шляхом уточнення (тобто коригування) висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку. Такий підхід обумовлений тим, що дані глобальних моделей напряду не залежать від потенційних помилок регіонального/локального моделювання. Однак, з аналізу наукових досліджень випливає, що високоефективне коригування висот глобальних моделей можна виконати лише на локальному рівні.

У другому розділі розглянуто основні джерела похибок при виконанні GNSS-спостережень та наведено рекомендації щодо мінімізації їхнього впливу на кінцеві дані, тобто на точність отриманих координат та висот. Розглянуто процедуру опрацювання GNSS-спостережень у стандартному програмному забезпеченні з детальним описом етапів опрацювання даних

для можливості збереження належного рівня точності отриманих координат та висот. Виконано аналіз похибки визначення еліпсоїдних висот із даних GNSS-спостережень та досліджено її вплив на загальну точність результатів методу GNSS-нівелювання. Отримані результати свідчать, що такий вплив може складати 2-19% в залежності від методу спостережень та типу нівелірного знаку. Разом з тим, таке дослідження дало змогу отримати підтвердження щодо цілковитого забезпечення точності визначення еліпсоїдної висоти на рівні 1-2 см при належному виконанні GNSS-спостережень відносним методом у статичному режимі.

Третій розділ присвячений оцінці точності висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей отриманої на основі даних високоточного геометричного та GNSS-нівелювання. У цьому розділі також детально розглянуто всі типи сучасних моделей геоїда та квазігеоїда та виокремлено основні їхні характеристики, що безпосередньо впливають на загальну точність GNSS-нівелювання. Зокрема, розглянуті моделі висот геоїда та квазігеоїда регіонального масштабу, а саме EGG2015 та УКГ2012, мають ряд суттєвих недоліків, що обмежує їхнє використання для багатьох науково-практичних застосувань. На основі теоретичних та експериментальних даних проаналізовано особливості висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей та виокремлено основні параметри їхньої точності. Зокрема, першочерговими чинниками впливу на точність є ондуляція геоїда нульового порядку та вибір системи припливів модельних висот. Однак, навіть після врахування цих чинників, висоти геоїда/квазігеоїда глобальних моделей будуть містити систематичні похибки щодо прийнятої національної системи висот. Проаналізовано висоти глобальних моделей з можливістю їхнього коригування шляхом виявлення та вилучення систематичної складової на основі так званого секторного аналізу до рівня 2 см стандартного та середньоквадратичного відхилення. Таке дослідження дало змогу встановити чинники, що обмежують можливості щодо більш високоточного коригування

модельних висот, які враховано при розробленні складнішої методики коригування модельних висот.

У четвертому розділі розроблено методику локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для можливості підвищення точності методу GNSS-нівелювання. Методика базується на принципі моделювання похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку, таких як EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159, на основі використання вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій. У цьому розділі розроблену методику реалізовано на основі експериментальних даних отриманих для різних географічних територій локального масштабу. Детально проаналізовано основні параметри моделювання похибок висот глобальних моделей (масштаб, розмірність та рельєф території, кількість та конфігурація контрольних пунктів тощо), а також принцип їхнього перетворення на поправки. Запропонована методика уможливорює коригування модельних висот геоїда/квазігеоїда на рівні 1 см, і менше, з урахуванням оптимальних параметрів моделювання похибок висот обраної глобальної моделі високого ступеня та порядку. Наведено рекомендації щодо практичного впровадження розробленої методики на регіональному рівні на прикладі всієї території України та її традиційної нівелірної мережі. Проведений комплекс експериментальних досліджень забезпечує загальну точність методу GNSS-нівелювання на рівні 1-2 см для отримання еліпсоїдних висот за даними GNSS-спостережень, а також на рівні 1 см для скоригованих висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей.

Ключові слова: Глобальні навігаційні супутникові системи (Global Navigation Satellite Systems – GNSS), геометричне нівелювання, глобальні моделі геоїда, висоти квазігеоїда, GNSS-нівелювання, системи припливів, гравітаційні аномалії, похибки висот, локальна точність, коригування висот, вагові коефіцієнти, систематичні похибки, моделювання поправок, залишкові похибки, нормальні висоти.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА, В ЯКИХ ОПУБЛІКОВАНІ ОСНОВНІ НАУКОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових періодичних виданнях іншої держави, які включено до міжнародних наукометричних баз

1. Fedorchuk, A. (2022), The Potential Application of the GNSS Leveling Method in Local Areas by Means of Sector Analysis. *Geomatics and Environmental Engineering*, 16 (3), 41-55. DOI: 10.7494/geom.2022.16.3.41

Статті у наукових фахових виданнях України

2. Федорчук, А. (2021). Аналіз похибок еліпсоїдних висот на основі результатів GNSS-нівелювання. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, I (41), 37-45. DOI: 10.33841/1819-1339-1-41-37-45

3. Савчук, С., Проданець, І., Федорчук, А. (2022). Застосування методики визначення координат за даними GNSS-спостережень із прив'язкою до мережі активних референцних станцій. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, I (43), 48-54. DOI: 10.33841/1819-1339-1-43-48-54

4. Федорчук, А. (2022). Аналіз сучасних моделей відлікових поверхонь для визначення висот методом GNSS-нівелювання. *Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва*, II (44), 31-41. DOI: 10.33841/1819-1339-2-44-31-41

5. Федорчук, А. (2022). Роль систем припливів глобальних моделей геоїда у визначенні висот методом GNSS-нівелювання. *Геодезія, картографія та аерофотознімання*, 96, 5-13. DOI: 10.23939/istcgcap2022.96.005

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації, а саме матеріали та тези міжнародних і вітчизняних науково-технічних та наукових конференцій

6. Федорчук, А. (2016). Про зв'язки між системами висот міста Львова. *Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених «GeoTerrace-2016»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 91-94.

7. Федорчук, А. (2017). Про точність GNSS-нівелювання на пунктах геодезичної мережі міста Львова. *Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених «GeoTerrace-2017»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 17-20.

8. Федорчук, А. (2018). Використання даних GNSS-спостережень для визначення висот пунктів на фізичній поверхні Землі. *Тези доповідей «GEOFORUM'2018»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 31-32.

9. Федорчук, А. (2018). Попередній аналіз похибок визначення нормальних висот із GNSS-спостережень на територію міста Львова та його околиць. *Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених «GeoTerrace-2018»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 33-36.

10. Федорчук, А. (2019). Аналіз похибки визначення модельних значень аномалій висот для території Львова та його околиць за результатами GNSS-спостережень на пунктах високоточного геометричного нівелювання. *Тези доповідей «GEOFORUM'2019»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 58-59.

11. Федорчук, А. (2020). Порівняльний аналіз похибок нормальних висот високоточного геометричного та GNSS-нівелювання. *Збірник матеріалів 25-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Геофорум-2020»*, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 107-108.

12. Федорчук, А. (2021). Дослідження точності визначення координат за GNSS-даними з прив'язкою до референсних станцій. *Збірник*

матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції «Геофорум-2021», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 107-108.

13. Федорчук, А. (2021). Аналіз точності глобальних моделей геоїда щодо даних геометричного та GNSS-нівелювання. *Збірник матеріалів X-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні та природокористуванні», Ужгород: Видавництво, 8-13.*

ABSTRACT

Fedorchuk A. V. Methodology for improving the GNSS levelling accuracy based on local correction of the heights of global geoid models. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) on specialty 193 – Geodesy and Land Management (19 «Architecture and Construction»). – Lviv Polytechnic National University, Lviv, 2023.

Before the appearance of the Global Navigation Satellite System (GNSS), the determination of – the heights of points on the Earth's physical surface, the heights of the geoid, quasi-geoid, and ellipsoid parameters – was based on purely terrestrial methods, also called “classical”. One of the important methods in this matter is the method of leveling, which has several interpretations depending on the type of geodetic equipment and the data obtained, such as the methods of geometric, trigonometric, astro-geodetic, astro-gravimetric, and gravimetric leveling. All the listed methods make it possible to carry out measurements with high accuracy. However, the very process of performing work using classical methods is quite time-consuming and, in some cases, impossible.

With the advent of GNSS systems, new methods have appeared for obtaining geodetic information about the Earth in the form of various data sets, in particular those necessary for determining heights, one of which is the GNSS leveling method. The newest approach avoids almost all the shortcomings of classical methods; however, even with the modern development of GNSS systems, this method has a significant drawback, which manifests itself in the form of the accuracy of the obtained results. In a general sense, the implementation of the GNSS leveling method involves the use of two quantities:

- 1) ellipsoidal heights obtained from GNSS observation data by converting geocentric spatial coordinates (X, Y, Z) into the ellipsoidal coordinate system (B, L, H) ;
- 2) height of the geoid or quasi-geoid (depending on the adopted height system) obtained from the corresponding model.

The dissertation is devoted to theoretical, practical, and experimental investigations into the possibility of improving GNSS leveling accuracy through local correction of geoid and quasi-geoid heights of global models of high degree and order.

In the first section, modern models of reference surfaces used for height determination by the GNSS-leveling method are considered. The review included a selection of their main advantages and disadvantages in comparison to traditional approaches to determining reference surfaces for heights. The method of building the main systems of heights (orthometric and normal) is considered based on the review of classical and modern approaches, which are the methods of high-precision geometric and GNSS leveling. The main modeling parameters of modern reference surfaces are analyzed, which reflect the advantages and disadvantages of using these models for the implementation of the GNSS leveling method. From the analysis of scientific research related to the topic of GNSS leveling, it follows that today there is no universal approach to modeling reference surfaces with high accuracy. Therefore, it is possible to find a solution to this problem by specifying (i.e., correcting) the heights of the geoid or quasi-geoid in global models of high degree and order. This approach is based on the fact that global model data is completely independent of potential regional or local modeling errors. However, from the analysis of scientific research, it follows that highly effective adjustment of the heights of global models can be performed only at the local level.

In the second section, the main sources of errors in the performance of GNSS observations are considered, and recommendations are given to minimize their impact on the final data, that is, on the accuracy of the obtained coordinates and heights. The procedure for processing GNSS observations in standard software is considered, with a detailed description of the stages of data processing for the possibility of maintaining the appropriate level of accuracy of the received coordinates and heights. An analysis of the error in determining ellipsoidal heights from GNSS observation data was performed, and its influence on the overall accuracy of the results of the GNSS leveling method was investigated. The

obtained results indicate that such an influence can range from 2-19%, depending on the method of observation and the type of level mark. Such a study also made it possible to confirm the accuracy of the determination of the ellipsoidal height at the level of 1-2 cm with the proper performance of GNSS observations by the relative method in the static mode.

The third section is devoted to the assessment of the accuracy of geoid/quasi-geoid heights of global models obtained on the basis of high-precision geometric and GNSS leveling data. This section also describes in detail all types of modern geoid and quasi-geoid models and highlights their main characteristics, which directly affect the overall accuracy of GNSS leveling. In particular, geoid and quasi-geoid elevation models of the regional scale, namely EGG2015 and UKG2012, have a number of significant shortcomings that limit their use for many scientific and practical applications. On the basis of theoretical and experimental data, the peculiarities of geoid and quasi-geoid heights of global models were characterized, and the main parameters of their accuracy were identified. The selection of the tidal system of model heights and the zero-order geoid undulation, in particular, have a significant impact on accuracy. However, even after taking these factors into account, the geoid or quasi-geoid heights of global models will contain systematic errors relative to the adopted national height system. The heights of global models were analyzed with the possibility of their adjustment by identifying and extracting the systematic component based on the so-called sector analysis up to the level of 2 cm standard and root-mean-square deviation. Such a study made it possible to establish the factors that limit the possibilities for more accurate adjustment of model heights, which are taken into account when developing a more complex method of adjusting model heights.

In the fourth chapter, a technique for local correction of geoid/quasi-geoid heights of global models is developed for the possibility of increasing the accuracy of the GNSS leveling method. The technique is based on the principle of modeling errors of geoid/quasi-geoid heights of global models of high degree and order, such as EGM2008, EIGEN-6C4, GECO and XGM2019e_2159, based on the use of

gravity anomaly difference weights. In this section, the developed methodology is implemented on the basis of experimental data obtained for different geographical areas on a local scale. The main parameters for modeling height errors in global models (scale, dimension, and topography of the territory, number, and configuration of control points, etc.), as well as the principle of their transformation into corrections, are analyzed in detail. The proposed method allows the correction of the heights of geoid/quasi-geoid models at the level of 1 cm or less, with the optimal parameters for modeling the height errors of the selected global model of high degree and order. Recommendations are given for the practical implementation of the developed methodology at the regional level, using the example of the entire territory of Ukraine and its traditional leveling network. The complex of experimental studies conducted ensures the overall accuracy of the GNSS leveling method at 1-2 cm for obtaining ellipsoid heights from GNSS observation data, as well as at 1 cm for the corrected geoid/quasi-geoid heights of global models.

Keywords: Global Navigation Satellite Systems (GNSS), geometric leveling, global geoid models, quasi-geoid heights, GNSS leveling, tidal systems, gravity anomalies, height errors, local accuracy, height adjustment, weights, systematic errors, correction modeling, residual errors, normal heights.

THE RESEARCHER LIST OF PUBLICATIONS WHICH CONTAIN THE MAIN SCIENTIFIC RESULTS OF THIS DISSERTATION

Publications in scientific editions of other countries, which are included in international science-computer databases

1. Fedorchuk, A. (2022), The Potential Application of the GNSS Leveling Method in Local Areas by Means of Sector Analysis. *Geomatics and Environmental Engineering*, 16 (3), 41-55. DOI: 10.7494/geom.2022.16.3.41

Publications in scientific professional editions of Ukraine

2. Fedorchuk, A. (2021). Analysis of spheroidal heights errors based on GNSS-leveling results. *Modern achievements of geodesic science and industry*, I (41), 37-45. DOI: 10.33841/1819-1339-1-41-37-45

3. Savchuk, S., Prodanets, I., Fedorchuk, A. (2022). Application of the method of determination of coordinates according to GNSS observations with binding to the network of active reference stations. *Modern achievements of geodesic science and industry*, I (43), 48-54. DOI: 10.33841/1819-1339-1-43-48-54

4. Fedorchuk, A. (2022). Analysis of modern models of counterfeiting surfaces for determination of heights by GNSS-leveling method. *Modern achievements of geodesic science and industry*, II (44), 31-41. DOI: 10.33841/1819-1339-2-44-31-41

5. Fedorchuk, A. (2022). The role of the tidal systems of global geoid models in the determination of heights using the GNSS leveling method. *Geodesy, Cartography and Aerial Photography*, 96, 5-13. DOI: 10.23939/istcgcap2022.96.005

**Publications that testify to the approbation of the dissertation materials,
namely the materials and abstracts of international and national scientific and
technical conferences**

6. Fedorchuk, A. (2016). Of connection between systems heights. *Proceedings of International Conference of young scientist «GeoTerrace-2016»*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 91-94.

7. Fedorchuk, A. (2017). About accuracy GNSS leveling on items geodesic networks of the city of Lviv. *Proceedings of International Conference of young scientist «GeoTerrace-2017»*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 17-20.

8. Fedorchuk, A. (2018). Using GNSS observation data to determine the heights of points on the physical surface of the Earth. *Abstracts of "GEOFORUM'2018" reports*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 31-32.

9. Fedorchuk, A. (2018). Previous analysis of developments determination of normal heights from GNSS observations on the city of Lviv and followed territories. *Proceedings of International Conference of young scientist «GeoTerrace-2018»*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 33-36.

10. Fedorchuk, A. (2019). Analysis of the error in determining the model values of height anomalies for the territory of Lviv and its surroundings based on the results of GNSS observations at high-precision geometric leveling points. *Abstracts of "GEOFORUM'2019" reports*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 58-59.

11. Fedorchuk, A. (2020). Comparative analysis of the normal heights errors from high precision geometric and GNSS-leveling method. *Proceedings of 25th International scientific technical conference «Geoforum-2020»*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 107-108.

12. Fedorchuk, A. (2021). Research of coordinates determination accuracy by GNSS data with binding to reference stations. *Proceedings of International scientific technical conference «Geoforum-2021»*, Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 107-108.

13. Fedorchuk, A. (2021). Analysis of the accuracy of global geoid models regarding high-precision geometric and GNSS-leveling data. *Materials of the X International Scientific and Practical conference «New technologies in geodesy, land management, forest management and nature management»*, Uzhhorod: Publishing House, 8-13.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ	18
ВСТУП	22
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД СУЧАСНИХ МОДЕЛЕЙ ВІДЛІКОВИХ ПОВЕРХОНЬ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ	29
1.1. Тракткування висот у класичному розумінні	30
1.1.1. Поверхні відліку висот	30
1.1.2. Основні системи висот	35
1.2. Сучасні підходи щодо визначення висот	39
1.2.1. Визначення координат та висот за даними GNSS-вимірювань	39
1.2.2. Метод GNSS-нівелювання	48
1.3. Поняття геоїд/квазігеоїд в сучасному контексті	51
1.4. Огляд та аналіз сучасних моделей відлікових поверхонь для визначення висот методом GNSS-нівелювання	54
Висновки до розділу 1	62
РОЗДІЛ 2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛІПСОЇДНИХ ВИСОТ ІЗ ДАНИХ GNSS-СПОСТЕРЕЖЕНЬ	64
2.1. Розгляд похибок GNSS-вимірювань	64
2.2. Основні методи GNSS-спостережень	71
2.3. Загальні принципи опрацювання даних GNSS-спостережень	77
2.4. Точність визначення еліпсоїдних висот із GNSS-спостережень	82
Висновки до розділу 2	94
РОЗДІЛ 3. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЬНИХ ВИСОТ ГЕОЇДА/КВАЗІГЕОЇДА ЗА ДАНИМИ ВИСОКОТОЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ТА GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ	95
3.1. Класифікація математичних моделей геоїда та квазігеоїда	95
3.2. Глобальні моделі геопотенціалу	100
3.2.1. Системи припливів висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей	104
3.2.2. Ондуляція геоїда нульового порядку висот глобальних моделей	108
3.2.3. Гравітаційні аномалії глобальних моделей Землі	110

3.3. Моделі геоїда та квазігеоїда регіонального/локального масштабу	112
3.3.1. Моделі регіонального масштабу	113
3.3.2. Локальне визначення висот геометричного геоїда та квазігеоїда за даними GNSS-нівелювання	117
3.3.3. Похибки модельних висот геоїда/квазігеоїда	119
3.3. Локальна точність висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей на основі секторного аналізу	121
Висновки до розділу 3	131
РОЗДІЛ 4. РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИКИ ЛОКАЛЬНОГО КОРИГУВАННЯ ВИСОТ ГЛОБАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ	133
4.1. Методика локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей	134
4.1.1. Аналіз основних параметрів локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей	138
4.1.2. Аналіз точності інтерполяції похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей на локальних територіях	146
4.2. Реалізація методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей	153
4.2.1. Підготовка експериментальних даних для тестування методики	153
4.2.2. Аналіз результатів моделювання похибок за методикою локального коригування висот геоїда/квазігеоїда	156
4.2.3. Оцінка точності залишкових похибок висот глобальних моделей	158
4.3. Практична значимість та додаткові рекомендації щодо впровадження запропонованої методики на регіональному рівні	167
Висновки до розділу 4	174
ВИСНОВКИ	176
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	179
ДОДАТКИ	204

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

BeiDou	Китайська навігаційна супутникова система (BeiDou Navigation Satellite System)
BGI	Міжнародне гравіметричне бюро (Bureau Gravimétrique International)
CGCS	Китайська геодезична ситема координат (China Geodetic Coordinate System)
CHAMP	Супутникова місія для досліджень атмосфери та іоносфери (Challenging Minisatellite Payload)
DOP	Ефект погіршення точності супутникового сигналу (Dilution Of Precision)
DOT	Dynamic Ocean Topography
EGG	Європейський гравіметричний (гібридний) геоїд та квазігеоїд (European Gravimetric (Quasi)Geoid)
EGM	Глобальна гравітаційна модель Землі (Earth Gravitational Model)
EIGEN	Глобальна гравітаційна модель Землі (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques)
EPN	Європейська мережа перманентних GNSS-станцій (EUREF Permanent Network)
ETRF	Реалізація європейської земної референцної системи відліку (International Terrestrial Reference Frame)
ETRS	Європейська земна система відліку (International Terrestrial Reference System)
EUVN	Європейська вертикальна опорна GNSS-мережа (European vertical reference GPS network)
EVRS	Європейська вертикальна референцна система висот (European Vertical Reference System)
FFT	Метод швидкого перетворення Фур'є (Fast Fourier Transform)

Galileo	Європейська навігаційна супутникова система
GECO	Глобальна гравітаційна модель Землі (GOCE and EGM2008 combined model)
GGM	Глобальна модель геопотенціалу (Global Geopotential Model)
GNSS	Глобальні навігаційні супутникові системи (Global Navigation Satellite Systems)
GOCE	Супутникова місія для дослідження гравітаційного поля Землі та океанічних поверхонь (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer)
GPS	Глобальна система позиціонування США (Global Positioning System)
GRACE	Супутникова місія для вивчення гравітаційного поля Землі (Gravity Recovery and Climate Experiment)
GRS	Геодезична референцна система відліку (Geodetic Reference System)
GTRF	Земна референцна система відліку сузір'я супутників Galileo (Galileo Terrestrial Reference Frame)
IAG	Міжнародна геодезична асоціація (International Association of Geodesy)
ICGEM	Міжнародний центр глобальних моделей Землі (International Centre for Global Earth Models)
IGS	Міжнародна GNSS-служба (International GNSS Service)
IHRM	Міжнародна референцна система відліку висот (International Height Reference System)
ISG	Міжнародна служба геоїда/квазігеоїда (International Service for the Geoid)
ITRF	Реалізація міжнародної земної системи відліку (International Terrestrial Reference Frame)
ITRS	Міжнародна земна референцна система (International

	Terrestrial Reference System)
LAGEOS	Супутникова місія для геодинамічних процесів Землі (LAsEr GEOdynamics Satellite)
LSA	Метод найменших квадратів (Least Squares Adjustment)
LSC	Метод середньоквадратичної колокації (Least Squares Collocation)
MEE	Середній земний еліпсоїд (Mean Earth Ellipsoid)
MSL	Mean Sea Level
NAP	Амстердамський нульовий рівень відліку висот (Normaal Amsterdams Peil)
NRTK	Мережеві кінематичні виміри у режимі реального часу (Network RTK)
PPP	Метод точного позиціонування точки (Precise Point Positioning)
RCR	Метод видалення-обчислення-відновлення (Remove Compute Restore)
RINEX	Незалежний формат обміну даних приймача (Receiver INdependent EXchange Format)
RTK	Кінематичні виміри у режимі реального часу (Real Time Kinematic)
SHM	Сферична гармонічна модель (Spherical Harmonic Model)
SSH	Висоти морської поверхні (Sea Surface Heights)
TGO	Програмне забезпечення для опрацювання GNSS-спостережень (Tersus Geomatics Office)
UELN	Об'єднана європейська нівелірна мережа (United European Levelling Network)
VRS	Вертикальна референсна система (Vertical Reference System)
WGM	Світова карта (модель) гравітаційних аномалій (World Gravity Map)

WGS	Світова геодезична система координат (World Global System)
XGM	Глобальна гравітаційна модель Землі (eXperimental Geopotential Model)
ZAKPOS	Західноукраїнська мережа GNSS-станцій (Transcarpathian Position Determination System).
ГЛОНАСС	Глобальна навігаційна супутникова система (ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система)
ПЗ	Програмне забезпечення
ПЗ90	Параметри Землі 1990
США	Сполучені Штати Америки
УКГ	Український комбінований (гібридний) квазігеоїд
УПМ ГНСС	Українська постійна мережа Глобальних Навігаційних Супутникових Систем
УСК	Українська система координат

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Традиційно, ортометричні або нормальні висоти отримували методом високоточного геометричного нівелювання шляхом визначення перевищень між пунктом з відомою та невідомою висотою. Обов'язковою умовою при цьому є вимірювання сили тяжіння вздовж прокладених ходів нівелювання, або безпосередньо на пунктах з шуканою висотою. Вимірювання сили тяжіння використовували для обчислення поправок у висоту нівелірних пунктів. Числові значення отриманих у такий спосіб висот задають національну систему відліку висот, в її традиційному розумінні, та є важливими величинами для багатьох наукових та інженерних застосувань. Однак, процес класичного високоточного нівелювання є дуже трудомістким, затяжним та високовартісним. З появою та розвитком GNSS-систем з'явився новий метод визначення висот точок фізичної поверхні Землі який називають GNSS-нівелюванням. Новітній підхід базується на визначенні еліпсоїдних висот за даними GNSS-вимірів та використанні висот наявної моделі геоїда або квазігеоїда.

Питаннями щодо точності визначення координат та висот за даними GNSS-спостережень займалися українські науковці, зокрема С. Г. Савчук, І. І. Проданець, Н. І. Каблак, Я. С. Яцків, О. І. Терещук, І. О. Нисторяк та багато інших. Безпосередньо дослідженнями щодо створення моделей регіонального/локального масштабу геоїда та квазігеоїда на територію України займалися О. В. Кучер, О. М. Марченко, Д. О. Марченко, І. М. Заєць, М. Р. Ничвид, Б. Б. Джуман. Дослідженнями щодо можливості використання висот геоїда та квазігеоїда глобальних/регіональних моделей для реалізації методу GNSS-нівелювання серед українських вчених займалися П. Д. Двуліт, Ю. І. Голубінка, Н. П. Третяк, Ф. Д. Заблоцький, І. С. Тревого, І. М. Цюпак, І. В. Калинич. Загалом великий внесок щодо дослідження проблематики GNSS-нівелювання та моделювання висот геоїда та квазігеоїда зробили

багато закордонних вчених, зокрема W. Featherstone, H. Denker, T. Gruber, T. Hayden, C. Förste, J. Kostelecký, A. Celms, I. Foroughi, R. Tenzer, H. Moritz, G. Seeber, L. Sjöberg, P. Vanicek, P. Zingerle, F. Barthelmes, W. Heiskanen, B. Hofmann-Wellenhof, N. Pavlis.

Для території України прийнята нормальна система відліку висот, і для успішної інтеграції результатів GNSS-нівелювання в традиційну нівелірну мережу необхідно залучити саме високоточну модель квазігеоїда. В цьому випадку, високоточну модель квазігеоїда слід розуміти, як таку, що може забезпечити точність нормальних висот отриманих із GNSS-нівелювання на рівні 1-2 см щодо пунктів високоточного геометричного нівелювання з огляду стандартного та середньоквадратичного відхилення. Неодноразові спроби визначити саме високоточну модель для території України не привели до успіху в силу різних причин. Зокрема, наявні моделі квазігеоїда, розроблені на територію України, або не загальнодоступні, або не достатньо точні. У такому випадку альтернативою є використання даних із глобальних моделей високого ступеня та порядку, тобто висот геоїда/квазігеоїда.

У загальному розумінні точність методу GNSS-нівелювання оцінюється з огляду точності отримання еліпсоїдної висоти та залучених модельних висот геоїда/квазігеоїда. Сьогодні в результаті опрацювання статичних GNSS-вимірювань еліпсоїдні висоти можна отримати з точністю 1-2 см [203, 216, 222, 208], а узагальнена середньоквадратична точність висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високих ступенів та порядків щодо традиційних систем висот коливається від 7 до 30 см в залежності від регіонів планети [69]. Очевидно, що точність висот глобальних моделей не задовольняє більшість геодезичних робіт, наукового та інженерного типу.

Таким чином, з урахуванням основних проблемних аспектів методу GNSS-нівелювання для його реалізації з вищою точністю необхідно провести коригування висот геоїда/квазігеоїда обраної глобальної моделі щодо прийнятої традиційної (або новітньої) системи висот. З результатів наукових досліджень відомо, що розв'язувати таку задачу можна лише на локальному

рівні, оскільки точність коригування залежить від чинників, які не мають спільного знаменника для різних географічних територій, а отже потребують індивідуального підходу.

Отже, вибір теми дослідження і її актуальність зумовлені необхідністю підвищення точності GNSS-нівелювання для визначення нормальних висот точок фізичної поверхні Землі. Тому, пошук рішень щодо підвищення точності GNSS-нівелювання на основі використання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку, є одним з актуальних завдань, що стоять перед геодезичним виробництвом.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Науково-дослідна робота виконувалась на кафедрі вищої геодезії та астрономії Національного університету «Львівська політехніка» і відповідає тематиці наукової діяльності кафедри «Моніторинг фізичної поверхні Землі та її атмосфери на основі аналізу результатів сучасних наземних і супутникових вимірювань».

Мета і завдання досліджень. Метою дисертаційної роботи є розроблення методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для підвищення точності методу GNSS-нівелювання.

Відповідно до поставленої мети, необхідно вирішити такі завдання:

- виконати аналіз сучасних моделей відлікових поверхонь, що безпосередньо пов'язані із реалізацією методу GNSS-нівелювання;
- провести оцінку точності визначення еліпсоїдних висот із даних GNSS-спостережень з урахуванням впливу основних джерел похибок;
- проаналізувати точність висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей за даними високоточного геометричного та GNSS-нівелювання на локальному рівні;
- розробити методику локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для підвищення точності GNSS-нівелювання;
- здійснити оцінку точності скоригованих висот глобальних моделей для різних географічних територій.

Об'єкт дослідження. Метод GNSS-нівелювання з використанням висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку.

Предмет дослідження. Підвищення точності методу GNSS-нівелювання на основі скоригованих висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи математичного опрацювання практичних та експериментальних даних щодо похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей. Для детального вивчення властивостей похибок модельних висот застосовано нестандартні методи досліджень, як-от: секторний, просторовий та кількісний аналіз. При проведенні досліджень також застосовано метод локального моделювання похибок висот, що базується на комплексному поєднанні методу інтерполяції, фільтрації та врівноваженні даних за принципом вагових функцій. Оцінювання обчислених, змодельованих та залишкових похибок виконано на основі стандартних методів статистичного аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. У дисертаційній роботі поставлені та вирішені завдання, пов'язані з виконанням GNSS-нівелювання з вищою точністю для локальних територій на основі використання скоригованих висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей.

Ступінь наукової новизни дисертаційних досліджень визначають основні результати роботи, а саме:

– підтверджено можливість використання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку для реалізації методу GNSS-нівелювання, якщо регіональна модель таких висот відсутня або висоти наявних моделей не відповідають високому рівню точності;

– обґрунтовано необхідність коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей у локальному масштабі для підвищення точності GNSS-нівелювання;

– розроблено методикау підвищення точності GNSS-нівелювання на основі локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей,

де вперше використано вагові коефіцієнти різниць гравітаційних аномалій для врівноваження даних при моделюванні похибок висот;

– експериментально реалізовано розроблену методику для різних географічних територій, з урахуванням різнобічних аспектів можливості виконання методу GNSS-нівелювання.

Практичне значення отриманих результатів. Практичне значення роботи полягає в тому, що отримані поправки на основі розробленої методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей уможливають застосування методу GNSS-нівелювання для визначення нормальних висот у прийнятій традиційній системі з точністю на рівні III – IV класу геометричного нівелювання. Отримані результати дають змогу підвищити точність виконання GNSS-нівелювання та розширити спектр геодезичних застосувань пов'язаних із визначенням висот точок фізичної поверхні Землі, зокрема:

- в цілях побудови та оновлення нівелірних мереж III – IV класів точності;
- при створенні висотної основи для різноманітних топографічних карт;
- як повноцінна заміна технічному нівелюванню;
- для виконання моніторингу за небезпечними техногенними та природними явищами;
- для можливості реалізації 3-D кадастрових знімачів на території України;
- для забезпечення висотної основи у будівельній, транспортній, нафтогазовій, гірничодобувній, водогосподарській сферах;
- в цілях здійснення геоприв'язки GNSS-станцій до традиційної чи новітньої системи висот тощо.

Особистий внесок здобувача. Результати наукових досліджень, які представлені у дисертаційній роботі та виносяться на захист, отримані автором самостійно. Загалом за темою дисертації опубліковано 13 наукових

праць. Основні положення та результати дисертаційної роботи, отримані автором, опубліковано у співавторстві у працях [208] та одноосібно у [224, 39, 220, 223, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 222, 221]. Більшість праць присвячена аналізу локальної точності висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей щодо традиційної системи висот на основі виявлення характеру зміни систематичних похибок [215, 217, 218, 219, 221], можливості моделювання систематичної складової похибок для коригування модельних висот [224, 39] та аналізу чинників, що впливають на загальну точність методу GNSS-нівелювання [223, 214]. Інша частина робіт присвячена аналізу похибки отримання еліпсоїдних висот за даними GNSS-спостережень та її впливу на точність визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання [208, 220, 216, 222].

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати наукових досліджень, що включені до дисертації, доповідались і обговорювались на міжнародних та всеукраїнських наукових конференціях, зокрема на Студентській науково-технічній конференції (НУ ЛП, ІГДГ, ВГА) у 2016 р., 2017 р., 2018 р., Міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених “GeoTerrace” (м. Львів, Україна) у 2016 р., 2017 р., 2018 р., Міжнародній науково-технічній конференції “GEOFORUM” (Львів-Брюховичі-Яворів, Україна) у 2018 р., 2019 р., 2020 р., 2021 р., Międzynarodowa konferencja “2nd International Conference on Water Management and its Surroundings – Theoretical and Practical Aspects” (Olsztyn, Poland, Poster session/online) у 2021 р. та на Міжнародній науково-практичній конференції “Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні та природокористуванні” (м. Ужгород, Україна) у 2021 році.

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано у 13 наукових працях. Серед них: 1 стаття у науковому періодичному виданні іншої держави, яке включено до міжнародних наукометричних баз даних, 4 статті у наукових фахових виданнях України, 8 публікацій у збірниках матеріалів

конференцій, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації та додатково відображають наукові результати дисертації.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, чотирьох розділів основної частини, висновків, списку літератури та додатків. Загальний обсяг дисертації становить 218 сторінок, у тому числі 150 сторінок основної частини, включаючи 51 рисунок, 22 таблиці та 226 позицій списку літератури.

РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД СУЧАСНИХ МОДЕЛЕЙ ВІДЛІКОВИХ ПОВЕРХОНЬ ДЛЯ РЕАЛІЗАЦІЇ МЕТОДУ GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ

Перші теоретично-важливі уявлення про фігуру та розміри Землі фактично беруть свій початок ще з часів теорії сили всесвітнього тяжіння Землі Ньютона у 1686 році [108] та напрацювань Гаусса про криволінійність поверхонь у 1825 та 1827 роках [44]. Такі дослідження сприяли розвитку класичної геодезії у її фізичному та геометричному сенсі. Фізичне визначення форми та розмірів Землі зосереджено на вивченні властивостей її гравітаційного поля та внутрішньої будови, а геометричне – на якнайкращому вираженні цих властивостей у строго математичному представленні. У ще більш класичному розумінні фігура “реальної” Землі являє собою геоїд, а її “спрощена” версія – це квазігеоїд. Чисто геометричний зміст земної поверхні описує еліпсоїд.

За допомогою математичних та фізичних уявлень про фігуру та розміри Землі виконують різні геодезичні обчислення для вирішення прикладних та наукових задач. Важливими геодезичними параметрами для такого роду обчислень є координати та висоти. Геодезія, як наука, першочергово спрямована на визначення форми та розмірів Землі з високою точністю. Визначення координат базується на строгих математичних поверхнях (площина, сфера, еліпсоїд), тому їхня точність в рази перевищує точність визначення висот. Однак, саме висота є важливою складовою у визначенні форми та розмірів “істинної” фігури Землі та її фізичної поверхні. Сам термін “висота” являє собою означення того, що потрібно вирахувати вертикальну відстань від якоїсь умовної основи до іншої (явної або неявної) поверхні на якій знаходиться шукана точка. В геодезичному розумінні умовною основою слугує прийнята поверхня відліку висот, а поверхнею шуканої точки зазвичай є фізична поверхня Землі. В залежності від того, у якій інтерпретації виражено фігуру Землі (геоїд, квазігеоїд чи еліпсоїд) такою буде прийнята відлікова поверхня та похідна від неї система відліку висот.

Концепцію визначення відлікових поверхонь та систем висот вже давно розділяють на класичні та сучасні підходи [102, 55].

1.1. Тракткування висот у класичному розумінні

1.1.1. Поверхні відліку висот

В геодезії, для визначення висот використовують три основні відлікові поверхні: геоїд, квазігеоїд та еліпсоїд (рисунок 1.1).

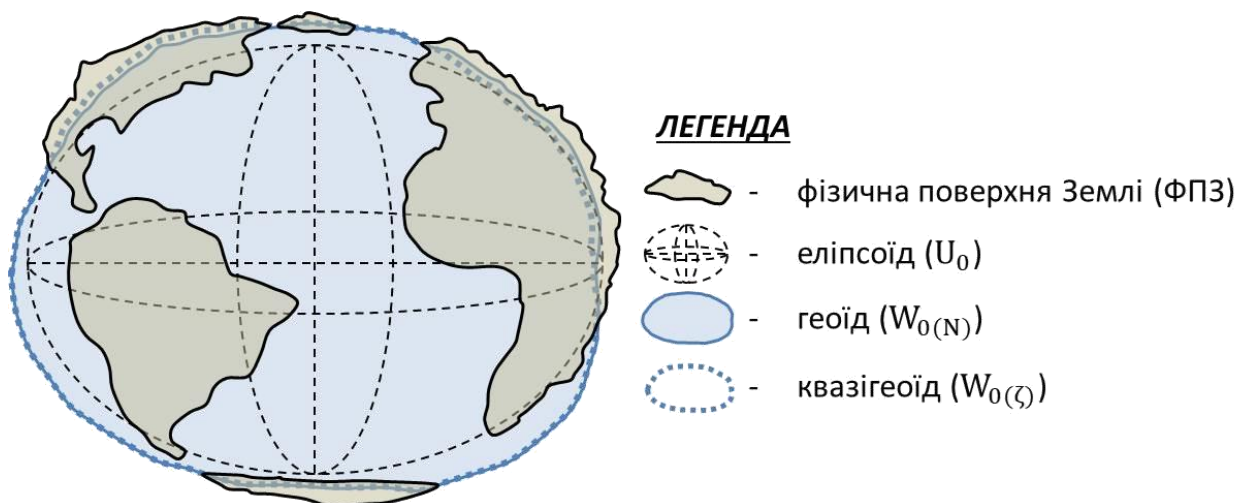


Рисунок 1.1 - Основні відлікові поверхні висот

Фізико-математичне обґрунтування фігури Землі, як рівневої поверхні, належить британському вченому Д. Г. Стоксу [144]. У своїй роботі “Про зміну сили тяжіння на поверхні Землі” він уперше вивів формули обчислення поверхні, яку сьогодні ми знаємо, як геоїд. Таку поверхню він тоді називав “вихідною поверхнею плинності Землі”, яку можна визначити на основі вимірювань сили тяжіння Землі. Стокс описав у своїй роботі основні властивості поверхні геоїда:

- поверхня повинна бути перпендикулярною до напрямку сили тяжіння та мати форму сплюсненого сфероїда малої еліптичності, у якого вісь фігури збігається з віссю обертання Землі;
- фізична поверхня Землі не є суворюю поверхнею рівноваги, через висоту материків і островів над рівнем моря;

- виміряну силу тяжіння на фізичній поверхні слід редукувати до рівня моря (тобто поверхні геоїда);
- для обчислення рівневої поверхні потрібно мати значення сили тяжіння на величезній кількості пунктів спостережень, що максимально щільно розташовані на всій поверхні Землі;
- рівневі поверхні з однаковими значеннями сили тяжіння які розташовані нижче або вище щодо рівня моря непаралельні між собою (що підтвердило припущення про неоднаковий розподіл мас Землі у різних місцях земної кори);
- для визначення рівневої поверхні під материками, слід використовувати не саму величину сили тяжіння, а її аномалію.

На основі наведених тверджень, Стокс вивів формулу обчислення поверхні геоїда N (її ще називають інтеграл Стокса), яка в класичному представленні має вигляд [58]:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma}^0 \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (1.1)$$

де R – середній радіус Землі; γ_0 – середнє значення сили тяжіння на еліпсоїді; $\Delta g = (g_N - \gamma_0)$ – “змішана” аномалія сили тяжіння, що визначається як різниця між виміряною силою тяжіння зредукованою на поверхню геоїда (g_N) та нормальною силою тяжіння на еліпсоїді (γ_0); $S(\psi)d\sigma$ – функція Стокса на змінному елементі поверхні одиничної сфери.

Слід також зазначити, що сам термін “геоїд” запропонував німецький математик та фізик Й. Б. Лістінг у 1873 році [92]. Він також надав визначення щодо його змісту: геоїд – це рівнева поверхня, яку скрізь перпендикулярно перетинають напрями ліній сили тяжіння та яка збігалася б із поверхнею світового океану у стані рівноваги, якби він був продовжений під материками й сформований лише під впливом притягання мас всередині Землі, тобто лише під силою земного тяжіння.

Безумовно, геоїд, як поверхня відносності є дуже важливою для геодезії, оскільки найбільш очевидно передає фізичні властивості фігури Землі у фізичному та математичному сенсі. Основним недоліком визначення поверхні геоїда є те, що точно дізнатися розподіл мас Землі неможливо. Тому, щоб визначити геоїд необхідно знати, хоча б теоретично, щільність мас у кожній точці між геоїдом та земною поверхнею. Довгі роки різні вчені займалися пошуком рішень щодо розв'язання проблемних питань теорії Стокса, а відповідно проблеми точного визначення поверхні геоїда. Серед найбільш відомих можна виділити роботи Е. Г. Брунса [12], Ф. А. Венінг Мейнеса [155], Г. Джеффра [73]. Усі ці дослідження доповнювали основний задум Стокса, але однозначного розв'язку крайової задачі теорії потенціалу отримати так і не вдалося.

У 1945 році радянський вчений М. С. Молоденський запропонував дещо інший підхід до визначення фігури Землі. Суть його теорії полягала в тому, що потрібно ввести додаткову (або допоміжну) поверхню відносності, яку він назвав квазігеоїдом (що означає “майже геоїд”) [199]. Ця поверхня, на відміну від геоїда, визначається на основі використання тільки матеріалів точних геодезичних вимірів, незалежно від тих чи інших уявлень про внутрішню будову Землі. Висоти поверхні квазігеоїда можна отримати як частку від поділу збурюючого потенціалу в заданій точці поверхні Землі на нормальне значення сили тяжіння, обчислене відповідним чином для цієї точки.

Квазігеоїд поділяє висоти на дві частини, з яких перша визначається інтегруванням за контуром (через геопотенціальні висоти), а друга – шляхом розв'язання крайової задачі теорії потенціалу. В цьому випадку перша компонента трактується, як “гіпсометрична” складова (тобто від поверхні еліпсоїда до поверхні телуроїда), а друга – як “гладка” (тобто від фізичної поверхні до поверхні телуроїда). Своєю чергою, телуроїд – це поверхня, нормальний потенціал якої U дорівнює фактичному потенціалу W на поверхні Землі вздовж еліпсоїдної нормалі [120]. Телуроїд не є

еквіпотенціальною поверхнею. Він був запропонований Молоденським, щоб уникнути складного визначення топографічної щільності та вертикального градієнта сили тяжіння, які є необхідними компонентами визначення поверхні геоїда. На поверхні океанів і всюди, де потенціал на фізичній поверхні Землі дорівнює значенню потенціалу на поверхні океану, квазігеоїд збігається з геоїдом, а на материковій частині він може бути обчислений, як наближена форма фігури геоїда [198]:

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma_0} \iint_{\sigma}^0 \Delta g_{f-a} S(\psi) d\sigma \quad (1.2)$$

де $\Delta g_{f-a} = (g_p - \gamma_{P(T)})$ – аномалія сили тяжіння у вільному повітрі визначена, як різниця між виміряною силою тяжіння на фізичній поверхні Землі (g_p) та нормальною силою тяжіння на телуроїді ($\gamma_{P(T)}$); всі інші елементи відповідають величинам формули (1.1).

У загальному, підхід Молоденського базується на тому, що квазігеоїд отриманий на основі телуроїда можна легко перенести на середній рівень моря і використовувати, як поверхню відліку висот. Графічне зображення принципів визначення поверхні геоїда за теорією Стокса, а квазігеоїда за теорією Молоденського представлено на рисунку 1.2.

Як зазначалося вище, третьою важливою відліковою поверхнею висот є еліпсоїд. В математичному сенсі, еліпсоїд – це замкнута геометрична фігура в другому наближенні, що має чітко визначені велику й малу піввісь та стиснення щодо полюсів. В геодезичному представленні, еліпсоїд – це набір констант, які задають опорну систему координат, що використовується для геодезичного контролю, тобто для обчислення координат точок на фізичній поверхні Землі [129].

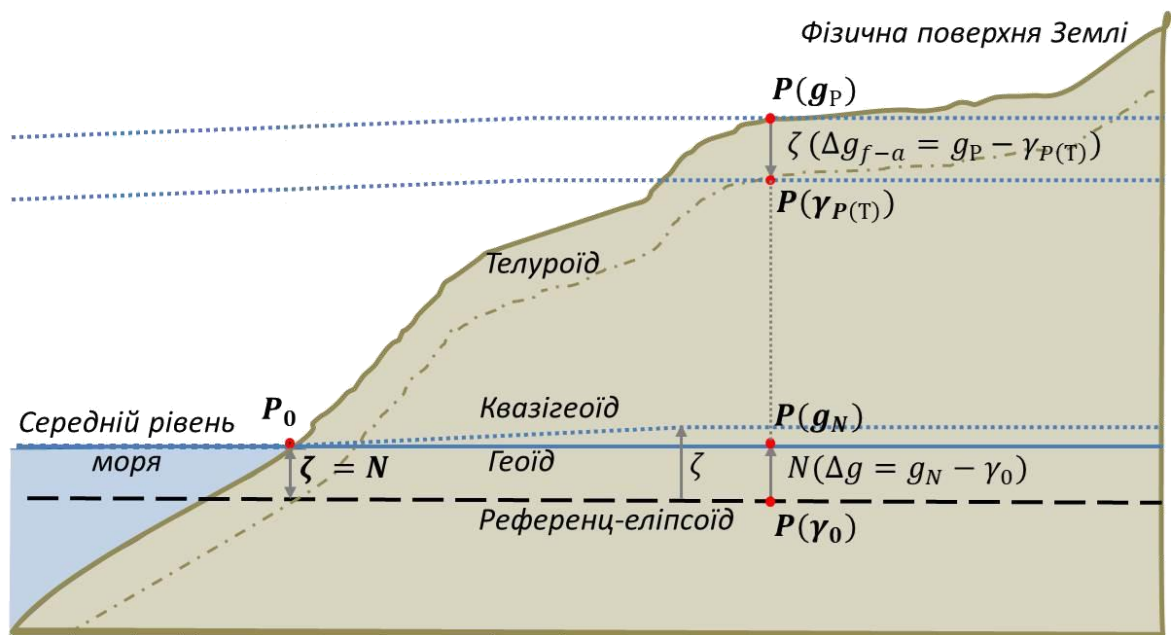


Рисунок 1.2 - Класичне визначення поверхні геоїда та квазігеоїда

Загалом існує два типи еліпсоїдів: 1) глобальний (або загальноземний, геоцентричний) еліпсоїд та 2) локальний (тобто референц-еліпсоїд) [153]. Точні параметри еліпсоїдів глобального масштабу стало можливим визначати з появою GNSS-систем, тому їхнє використання належить до сучасних підходів щодо визначення висот, які будуть розглянуті у розділі 1.2.

У класичній геодезії використовували лише референц-еліпсоїди, серед яких більш практичними версіями були еліпсоїд Бесселя (1841), Кларка (1880), Хейфорда (1909), Красовського (1940) [173]. Параметри тодішніх еліпсоїдів зазвичай описували п'ятьма величинами: широтою і довготою початкового пункту, азимутом лінії від цього пункту та двома пів осями [201]. Такі параметри визначали індивідуально для певної території, щоб референц-еліпсоїд якнайкраще зорієнтувати в тілі Землі для даного регіону. При цьому дотримувалися важливої умови – паралельності малої та великої пів осі відносно осі обертання Землі та площини екватора відповідно.

З огляду визначення висот, референц-еліпсоїд слугував у якості допоміжної опорної поверхні для можливості обчислення геодезичних (або еліпсоїдних) висот та висот геоїда або квазігеоїда. Для цього використовували традиційні геодезичні методи як-от: геометричне,

астрономо-геодезичне, астрономо-гравіметричне та гравіметричне нівелювання [180]. За допомогою цих методів отримували всі необхідні величини для практичного визначення поверхні геоїда чи квазігеоїда, а саме: астрономічні та геодезичні координати, напрям прямовисних ліній, напрям нормалей щодо прийнятого референц-еліпсоїда, прискорення сили тяжіння тощо.

1.1.2. Основні системи висот

З появою теорії відлікових поверхонь геоїда та квазігеоїда з'явилася можливість практичної реалізації систем висот. Таким чином, вибір конкретної відлікової поверхні задає систему висот у якій вони будуть визначені. Тому у класичному трактуванні виділяють ортометричну та нормальну системи висот [175].

Принцип визначення як ортометричної, так і нормальної висоти базується на вимірюванні перевищень між пунктом з відомою та невідомою висотою методом геометричного нівелювання. В такому випадку початковий пункт обирають від середнього рівня моря, висота на якому дорівнюватиме нулю. Через такий початковий пункт умовно проходить прийнята відлікова поверхня геоїда або квазігеоїда, тобто нульова позначка відліку ортометричних чи нормальних висот відповідно. При цьому розвиваючи мережу пунктів висот методом геометричного нівелювання головною умовою також є вимірювання сили тяжіння над невідомими пунктами. Отримане у такий спосіб значення сили тяжіння використовують для обчислення гравіметричних поправок у висоти цих пунктів [174]. Власне спосіб обчислення самих поправок вказуватиме на вибір конкретної системи висот.

Ортометричну висоту $H_{P_1}^O$ шуканого пункту P_1 знаходять відносно поверхні геоїда $W_{0(N)}$ по напрямку прямовисної лінії (див. рис. 1.3), а її числове значення отримують з виразу:

$$H_{P_1}^O = \frac{1}{g_m^{P_1}} \int_{P_1(N)}^{P_1} g dh \quad (1.3)$$

де $g_m^{P_1}$ – середнє значення сили тяжіння на відрізку прямої лінії $P_1 \leftrightarrow P_1(N)$; g – виміряне значення сили тяжіння на пункті P_1 ; $h = \sum_{P_1(N)}^{P_1} \Delta h$ – сума різниць потенціалів між $W_{0(N)}$ та W_{P_1} ; $\int_{P_1(N)}^{P_1} g dh$ – загальний вираз різниці потенціалів, яку ще називають геопотенціальним числом ($C_{P_1} = W_{0(N)} - W_{P_1}$) шуканого пункту P_1 .

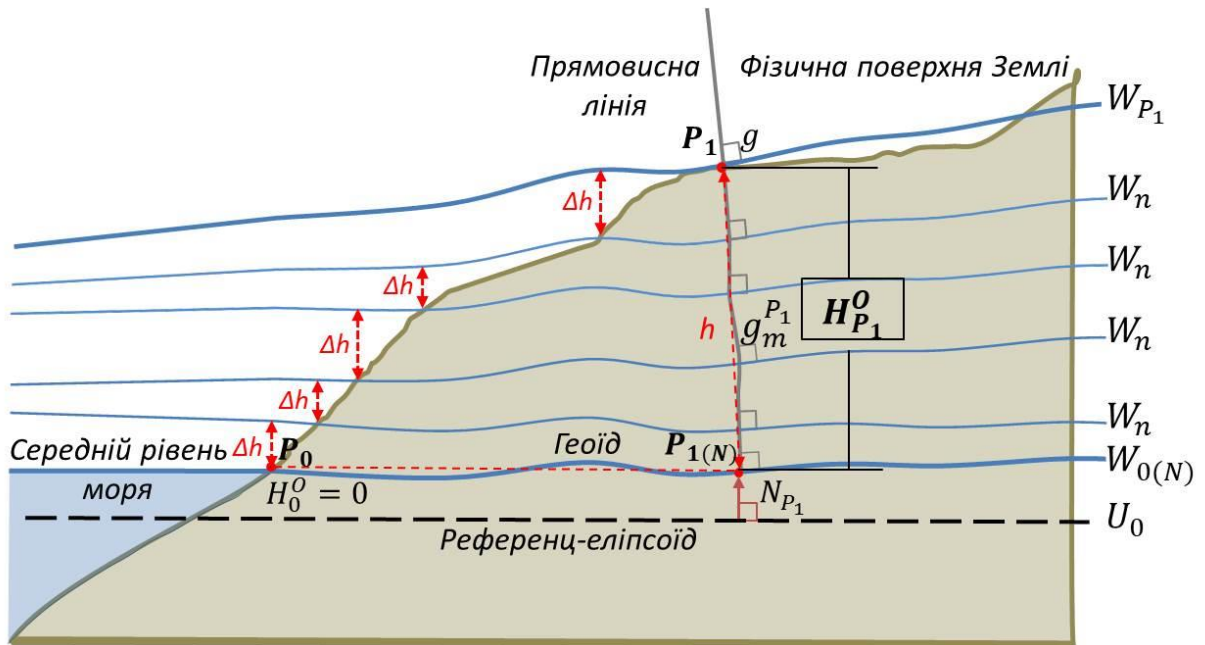


Рисунок 1.3 – Класичне визначення ортометричних висот

Для обчислення ортометричної поправки ($\delta H_{P_1}^O$) використовують суму різниць потенціалів та різницю ортометричних висот [58]:

$$\delta H_{P_1}^O = \sum_{P_0}^{P_1} \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta h + \frac{g_m^{P_0} - \gamma_0}{\gamma_0} H_{P_0}^O - \frac{g_m^{P_1} - \gamma_0}{\gamma_0} H_{P_1}^O \quad (1.4)$$

де γ_0 – довільна постійна, за яку зазвичай приймають нормальну силу тяжіння на широті 45° ; $H_{P_0}^O, H_{P_1}^O$ – ортометрична висота відповідного пункту;

$g_m^{P_0}, g_m^{P_1}$ – середня сила тяжіння вздовж прямовисних ліній на пунктах P_0 та P_1 .

Проблема ортометричних висот полягає у тому, що визначена середня сила тяжіння по прямовисній лінії буде величиною наближеною. Це пов'язано з тим, що дізнатися розподіл мас Землі між фізичною поверхнею та геоїдом можна лише на основі деяких теоретичних припущень. Зазвичай ці припущення базуються на усередненій густині земної кори, яка приблизно дорівнює $2,67 \text{ г/см}^3$ [174, 169].

Визначення нормальної висоти $H_{P_1}^\gamma$ шуканого пункту P_1 стосується поверхні квазігеоїда $W_{0(\zeta)}$ по нормалі до нього (див. рис. 1.4):

$$H_{P_1}^\gamma = \frac{1}{\gamma_m^{P_1}} \int_{P_1(\zeta)}^{P_1} \gamma dh \quad (1.5)$$

де $\gamma_m^{P_1}$ – середнє значення нормальної сили тяжіння на відрізку нормалі між P_1 та $P_1(\zeta)$; γ – значення нормальної сили тяжіння на пункті P_1 ; $\int_{P_1(\zeta)}^{P_1} \gamma dh = W_{0(\zeta)} - W_{P_1} = C_{P_1}$ – різниця потенціалів між поверхнею квазігеоїда і шуканим пунктом P_1 .

Для обчислення гравіметричної поправки у нормальну висоту $\delta H_{P_1}^\gamma$ використовують різницю нормальних висот, а значення виміряної сили тяжіння g замінюють на нормальну силу тяжіння γ , тоді:

$$\delta H_{P_1}^\gamma = \sum_{P_0}^{P_1} \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} \Delta h + \frac{\gamma_m^{P_0} - \gamma_0}{\gamma_0} H_{P_0}^\gamma - \frac{\gamma_m^{P_1} - \gamma_0}{\gamma_0} H_{P_1}^\gamma \quad (1.6)$$

де $\gamma_m^{P_0}, \gamma_m^{P_1}$ – середні значення нормальної сили тяжіння для широти відповідного пункту; $H_{P_0}^\gamma, H_{P_1}^\gamma$ – нормальна висота відповідного пункту.

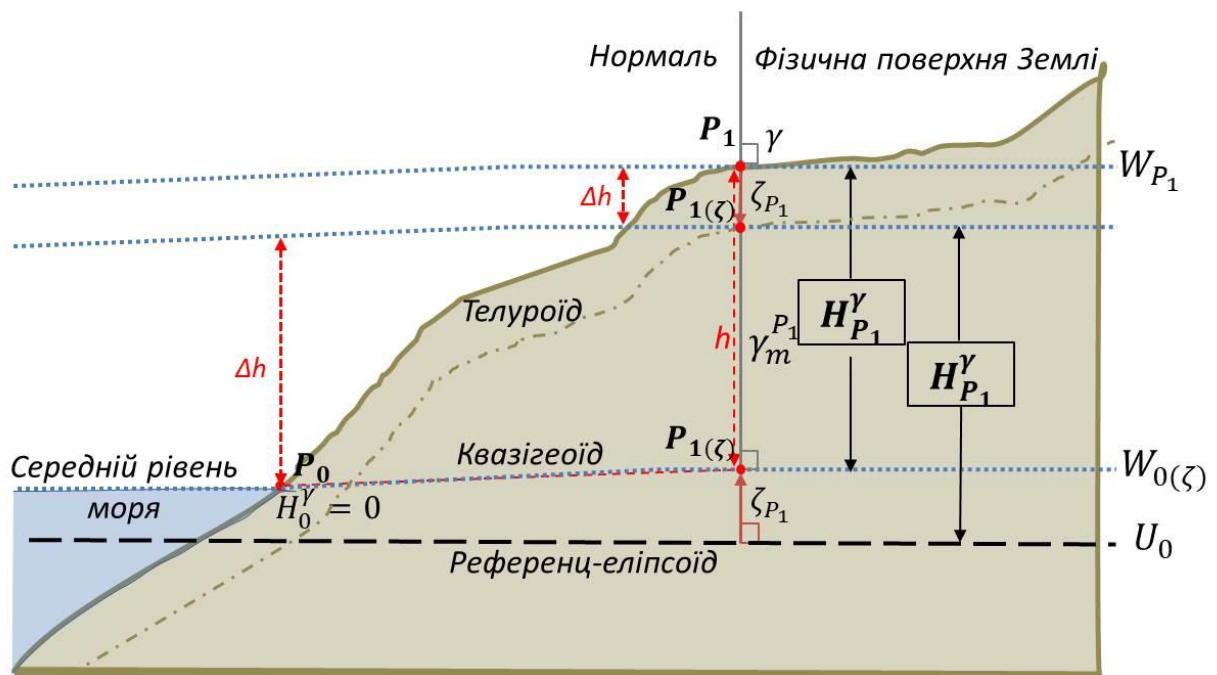


Рисунок 1.4 - Класичне визначення нормальних висот

Основна перевага використання системи нормальних висот полягає в тому, що будь-які припущення про розподіл мас всередині Землі відкидаються взагалі. З цього слідує, що нормальну висоту для будь-якого пункту, як і висоту квазігеоїда цього пункту, можна визначити точно у математичному сенсі. Недоліком цих висот є те, що вони не мають строгого фізичного обґрунтування, тому в цілому не розв'язують задачі точного визначення форми та розмірів Землі. Не зважаючи на це, класичну систему нормальних висот часто використовують для геодезичних цілей [190, 185, 192], та побудови або оновлення традиційних національних нівелірних мереж [188, 197]. Однак, важливим аспектом щодо визначення, як і ортометричних, так і нормальних висот є наявність добре розвинутої системи гравіметричних мереж [176]. І в першому і в другому випадку класичний підхід визначення висот дуже трудомісткий та фінансово дорогий. З настанням так званої “Космічної ери” [200], з’явилися простіші та економічно вигідні підходи щодо геодезичних застосувань, зокрема у визначенні ортометричних та нормальних висот.

1.2. Сучасні підходи щодо визначення висот

У сучасному розумінні сама концепція використання відлікових поверхонь геоїда або квазігеоїда та ортометричних чи нормальних висот залишається незмінною, але способи практичної реалізації постійно модернізуються. В останні десятиліття світова геодезична спільнота активно практикує впровадження нових методик створення та удосконалення висотних систем [16, 132, 130, 38]. Зокрема, в Україні дослідженнями у цій сфері почали активно займатися в останні роки [196, 184, 212]. Головною метою таких досліджень є впровадження єдиної глобальної системи висот на основі супутникових та наземних даних [136, 14, 94, 134].

Сьогодні підхід щодо визначення висот передбачає, що ортометричну або нормальну висоту фізичної поверхні Землі можна знайти на основі відомої геометричної та фізико-математичної складової. В такому випадку перша складова – це еліпсоїдна висота визначена шляхом постопрацювання даних GNSS-спостережень, а друга – це висота геоїда або квазігеоїда отримана з параметрів відповідної моделі.

1.2.1. Визначення координат та висот за даними GNSS-вимірювань

Результатом GNSS-вимірювань є геоцентричні просторові координати (X, Y, Z) які потім перетворюють в еліпсоїдні координати (B, L) та еліпсоїдну висоту (H) [135]. Геоцентричні просторові координати визначають шляхом опрацювання навігаційної інформації з RINEX-файлів (Receiver Independent Exchange Format). RINEX – це універсальний та незалежний формат даних про всю вихідну інформацію, що надходить від супутникових приймачів різних навігаційних систем та фіксується наземними GNSS-приймачами. Основними навігаційними системами є: GPS (Global Positioning System), ГЛОНАСС (ГЛОбальна НАвігаційна Супутникова Система), BeiDou (BeiDou Navigation Satellite System) та Galileo [57]. Кожна система має свою опорну координатну основу (геоцентричний еліпсоїд) в якій вона працює, зокрема система GPS використовує параметри еліпсоїда WGS84 (World Global

System), ГЛОНАСС – ПЗ90 (Параметри Землі 1990), BeiDou – CGCS2000 (China Geodetic Coordinate System), а Galileo – GTRF (Galileo Terrestrial Reference Frame) [149].

Процес опрацювання даних RINEX-файлів у спеціалізованому програмному забезпеченні першочергово спрямований на те, щоб отримати координати в наземній геоцентричній системі. Прикладами наземних референцних систем є міжнародна (глобальна) система ITRS/ITRF (International Terrestrial Reference System/Frame) [117], європейська (регіональна) ETRS/ETRF (European Terrestrial Reference System/Frame) [3] та українська (національна) УСК2000 (Українська система координат) [209]. Звичайно існує багато інших версій наземних систем, які найкраще адаптовані для забезпечення геодезичних робіт у різних частинах планети. Початкові розв'язки наземних систем координат задаються у декартовій системі просторових координат. Для отримання еліпсоїдних координат рекомендовано використовувати перетворення від ITRS/ITRF та ETRS/ETRF до геодезичної системи відліку GRS80 (Geodetic Reference System 1980) [101, 113], а для системи УСК2000, як геодезичну основу використовують референц-еліпсоїд Красовського [209].

Належну роботу всіх супутникових та наземних систем координат забезпечують міжнародні служби та організації постійного моніторингу на базі глобальних, регіональних та національних мереж GNSS-станцій. Основним органом управління таких процесів є Міжнародна GNSS-служба (International GPS Service – IGS). Служба розпочала свою офіційну діяльність з 1994 року та спрямована для надання найякісніших даних, продуктів і послуг глобального позиціонування, для підтримки високоточних GNSS-мереж та програм пов'язаних із науковою та інженерною діяльністю [156]. База даних IGS накопичує інформацію від різних аналітичних центрів обробки даних, операторів станцій і мереж, робочих груп, пілотних проєктів тощо [27]. Станом на 2017 рік глобальна IGS-мережа налічувала більш як 500 GNSS-станцій.

На території Європи найбільшою є мережа постійних GNSS-станцій EPN (EUREF Permanent Network), встановлених максимально рівномірно по всьому європейському континенту [13]. Центральне бюро EPN, виконує повсякденну координацію мережі: забезпечує зв'язок між регіональними операторами станцій, центрами обробки даних і аналітичними центрами, а також підтримує інформаційну систему EPN. Протягом останніх років з'явилися нові мульти-GNSS дані, нові формати RINEX, збільшилося використання GNSS-даних у реальному часі та створено новий формат обміну метаданими – GeodesyML. Служба EPN спрямована на перевірку та надання користувачам доступу до метаданих станцій EPN-мережі та здійснює відстеження доступності, затримок та якості всіх наборів даних. Сьогодні Європейська мережа складається з понад 330 GNSS-станцій.

Українським прототипом IGS та EPN є мережа УПМ ГНСС (УПМ ГНСС – Українська постійна мережа Глобальних Навігаційних Супутникових Систем) [179]. Наразі мережа УПМ ГНСС знаходиться в процесі розроблення та удосконалення з метою практичної реалізації для забезпечення безперервного відтворення загальноземної та європейської систем координат й можливості редукування результатів GNSS-спостережень, визначень координат на єдину епоху з урахуванням релятивістських ефектів припливних та інших рухів земної кори. УПМ ГНСС – це окрема складова Державної геодезичної мережі, яка призначена для вирішення високоточних наукових та інженерних завдань, надання користувачам, які працюють у сфері координатного забезпечення, можливості практичного отримання координат будь-якої точки на поверхні Землі або в навколишньому просторі, доступному для супутникових технологій, з достатньою точністю й ефективністю. Частина станцій УПМ ГНСС включено у мережу IGS та EPN. На цих станціях безперервно проводять комплексні супутникові, гравіметричні, астрономо-геодезичні та геофізичні спостереження, які опрацьовують у центрах оброблення інформації. Для подальшої реалізації УПМ ГНСС планується

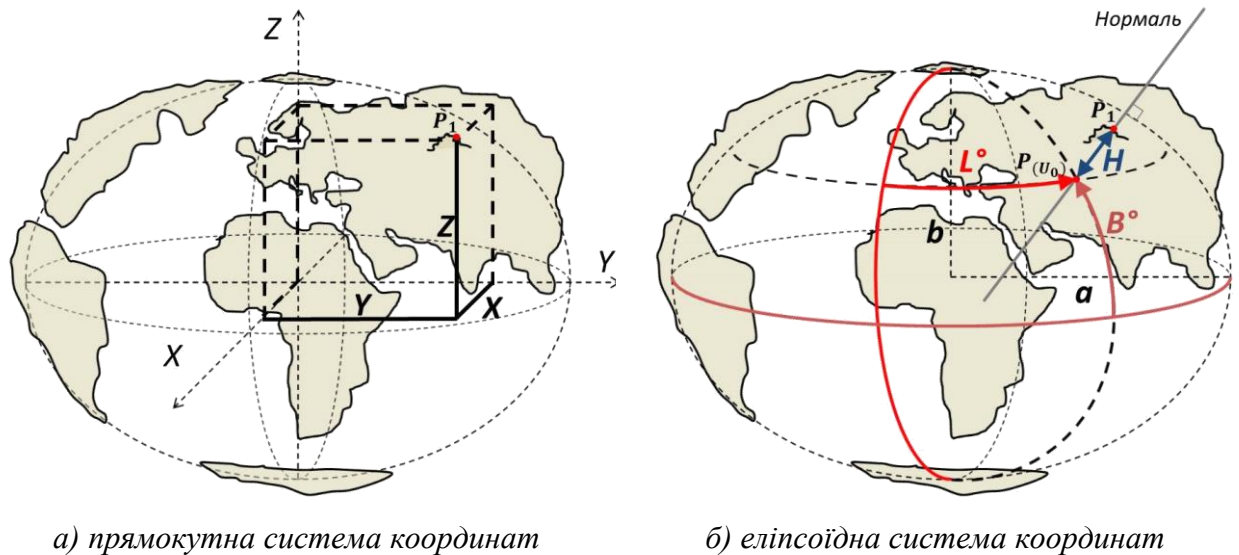
використовувати двох ранговий принцип системи, що полягає у тому, щоб 20% усіх наявних локальних GNSS-мереж України входили до її складу, як основні, а решта – 80% працювали, як суто національний сегмент. Основні станції повинні забезпечити рівномірне розміщення по території країни й додатково бути включеними до мереж IGS та EPN. Результати спостережень на таких станціях будуть незалежно опрацьовуватись, їхні координати матимуть міжнародний статус, а отримані дані проходитимуть незалежний аналіз на якість, цілісність та вірогідність для забезпечення однозначного зв'язку з міжнародними системами координат. Станом на 2022 рік густота розташування станцій мережі УПМ ГНСС не дозволяє використовувати її для геодезичного забезпечення робіт, однак в Україні існує ряд локальних GNSS-мереж, які придатні для цих цілей.

Сьогодні в Україні існує близько 400 GNSS-станцій, які існують, як поодинокі або поєднані в мережі. Наявні мережі здебільшого функціонують, як незалежні одна від одної, тому практичним користувачам доводиться обирати поміж них. Однією із найбільш відомих є мережа ZAKPOS (Transcarpathian Position Determination System). Мережа створена у 2008 році для забезпечення потреб геодезичних підприємств у проведенні вимірів у реальному часі та високоточних статичних GNSS-спостережень. Референцні GNSS-станції мережі ZAKPOS розпочали свою регулярну роботу у 2009 році [189]. Спочатку всі спостереження базувалися на системі координат ETRS89/ETRF2000. Сучасна мережа забезпечує визначення координат як в міжнародній системі відліку ITRS/ITRF, так і в національній референцній системі УСК2000. Усі ці системи мають зв'язок одна з одною на основі відповідних параметрів трансформації та перетворення координат [202, 203, 205]. Умова взаємного перетворення та трансформування між різними системами координат є обов'язковою при наданні послуг будь-якої супутникової навігаційної системи або наземної мережі.

Процедура трансформування передбачає лише встановлення зв'язку між однорідними параметрами прямокутних систем координат, а

перетворення координат має на меті здійснити перехід від однієї системи в іншу, які є різнотипними за своїм походженням. Для визначення еліпсоїдних координат та висот виконують процедуру перетворення координат.

Процедура перетворення координат є стандартною, що уможлиблює проведення обчислень для будь-якого еліпсоїда глобального, регіонального або національного масштабу. Всі необхідні параметри для перетворення є суто геометричними величинами, тому в математичному сенсі отримати еліпсоїдні координати можна досить точно. В геодезичному розумінні ситуація дещо інакша, оскільки еліпсоїдна широта та довгота це градусні величини, а висота є мірою метричною. На рисунку 1.5 зображено основні системи координат та принцип їхнього перетворення.



а) прямокутна система координат

б) еліпсоїдна система координат

Рисунок 1.5 – Принцип перетворення систем координат

Перетворення геоцентричних координат на еліпсоїдні, здійснюють за допомогою спеціальних математичних розрахунків, які автоматизовано в програмному забезпеченні на основі добре відомих формул:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan B_{i+1} = \frac{Z}{R} + \frac{b(\tan B_i)}{c + \tan^2 B_i} \\ \tan L = \frac{X}{Y} \\ H = \frac{Z}{\sin B} - (1 - e^2)N \end{array} \right. \quad (1.7)$$

де $\tan B_1 = \frac{Z}{R} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}}$ – перше ітераційне наближення еліпсоїдної широти;
 $b = \frac{ae^2}{R\sqrt{1-e^2}}$, $c = \frac{1}{1-e^2}$, $e^2 = 2\alpha - \alpha^2$ та a – параметри прийнятого еліпсоїда;
 $N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 B}}$ – радіус кривизни першого вертикалу.

Еліпсоїдна довгота відлічується від площини початкового меридіана до площини меридіана, що проходить через шуканий пункт (див. рис. 1.5б), а широта – від площини екватора до нормалі, що проходить через цей же пункт. Еліпсоїдна висота – це відстань на відрізку нормалі від пункту на фізичній поверхні Землі до ідентичного пункту зредукованого на поверхню прийнятого еліпсоїда. З формул (1.7) та з рисунка 1.5б, можна зауважити, що еліпсоїдна довгота та широта визначаються більш строго, через те, що площина початкового меридіана та екватора перпендикулярні між собою, а центр їхнього перетину збігається з геоцентром Землі. Висотна координата (тобто еліпсоїдна висота) буде визначена менш точно, оскільки напрямок нормалі будь-якого пункту завжди проходить поза центром мас Землі.

На даному етапі розвитку GNSS-систем точність визначення координат є досить добре вивченою, однак існує різниця між точністю координат похідних від наземних GNSS-станцій та точністю координат визначених на GNSS-пунктах спостережень. Уточнені координати GNSS-станцій можуть досягати кількох міліметрів [203, 6]. Точність визначення координат на GNSS-пунктах більш чутлива до багатьох чинників, що виникають під час спостережень та може коливатися на рівні 1-2 см [207, 26, 222, 208]. Точність визначення еліпсоїдних висот із GNSS-спостережень, особливо після процедури перетворення координат, є менш вивченою і потребує індивідуального оцінювання в залежності від поставлених задач [216, 220].

Постійне розширення та удосконалення GNSS-систем та супутникових технологій забезпечує збір даних необхідних для більш точного визначення не лише геометричних параметрів опорних еліпсоїдів з початком в геоцентрі мас Землі, а й для визначення еквіпотенціальних величин та навіть уможливорює поєднання їх між собою [89]. З огляду фізичних параметрів

стало можливим накопичення інформації про гравітаційні збурення та аномалії, силу тяжіння, потенціал сили тяжіння, топографію, нормальну гравітацію, відхилення прямовисних ліній від нормалі тощо [67]. Для отримання перелічених параметрів існують спеціальні супутникові геонаукові місії, найефективнішими з яких є [93]: CHAMP (Challenging Minisatellite Payload), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) та LAGEOS (LAser GEOdynamics Satellite).

Визначення еквіпотенціальних величин здебільшого зводиться до супутникових вимірів у глобальному масштабі, а потім шляхом додаткових уточнень та обчислень можна перейти до регіонального масштабу [33]. Всі ці дані необхідні для визначення поверхні геоїда та квазігеоїда, яку отримують за функціями математичного моделювання, тобто у вигляді математичної моделі [10]. Такі моделі в загальному називають глобальними моделями геопотенціалу (Global Geopotential Model – GGM). Сьогодні процес моделювання відлікових поверхонь геоїда та квазігеоїда охоплює кілька найпоширеніших математичних підходів, зокрема:

- метод найменших квадратів (Least Squares Adjustment – LSA);
- метод “видалення-обчислення-відновлення” (Remove Compute Restore – RCR);
- метод модифікації формули Стокса за найменшими квадратами (KTH-method);
- метод середньоквадратичної колокації (Least Squares Collocation – LSC);
- метод швидкого перетворення Фур’є (Fast Fourier Transform – FFT).

Перелічені методи застосовують поодинокі або шляхом їхнього комбінування на різних етапах моделювання відлікової поверхні. Підбір методики моделювання залежить від кількості та якості вихідних даних та від масштабу майбутньої моделі. Рівень можливої точності моделей також

змінюється залежно від обчислювального процесу і даних, доступних в тій чи іншій області досліджень.

Із зіставлення параметрів опорного еліпсоїда та обраної моделі геопотенціалу можна визначити висоту геоїда або квазігеоїда для будь-якої точки на фізичній поверхні Землі, як функцію перевищення між ними. При цьому опорний еліпсоїд обов'язково повинен включати параметр геоцентричної гравітаційної сталої (GM), кутової швидкості обертання Землі (ω) та динамічного фактора (J_2), які дозволяють однозначно визначити пов'язане з ним нормальне гравітаційне поле. Еліпсоїд, що визначений з урахуванням геометричних та геофізичних величин називають еквіпотенціальним. Прикладом таких еліпсоїдів глобального масштабу є WGS84 [105] та GRS80 [103]. Існують також і регіональні, і навіть так звані локальні версії еквіпотенціальних еліпсоїдів [7, 20], однак їхнє використання менш універсальне порівняно з глобальними.

Для поверхні геоїда та квазігеоїда, еквіпотенціальні еліпсоїди є невіддільною складовою при створенні сучасних моделей. Своєю чергою, еквіпотенціальні еліпсоїди складаються із глобального еліпсоїда та глобальної моделі нормального поля тяжіння. В таблиці 1.1 наведено основні характеристики еквіпотенціальних еліпсоїдів WGS84 та GRS80, де перших два параметри, що зазначені в таблиці, відповідають за геометричну складову, а три інших – за їхню фізичну значущість. Велика піввісь дорівнює екваторіальному радіусу Землі, а полярне стиснення є похідною величиною від нього. Геоцентрична гравітаційна стала визначається на основі всесвітньої гравітаційної сталої та маси Землі разом з атмосферою. Кутова швидкість обертання еквіпотенціального еліпсоїда зазвичай рівна швидкості обертання Землі навколо своєї осі. Динамічний фактор визначають на основі спостережень за параметрами збурень супутникових орбіт.

Основні характеристики еквіпотенціальних еліпсоїдів WGS84 та GRS80

Параметр	Позначення та розмірність	Назва еліпсоїда та значення параметрів	
		WGS84	GRS80
Велика піввісь	a (м)	6378137	6378137
Полярне стиснення	$1/f$	298,257223563	298,257222101
Геоцентрична гравітаційна стала	GM (м ³ /с ²)	$3,986004418 \cdot 10^{14}$	$3,986005000 \cdot 10^{14}$
Кутова швидкість обертання	ω (с ⁻¹)	$7292115 \cdot 10^{-11}$	$7292115 \cdot 10^{-11}$
Динамічний фактор	J_2	$108262,98213133 \cdot 10^{-8}$	$108263,0 \cdot 10^{-8}$

Еквіпотенціальні еліпсоїди використовують, як поверхню відліку для визначення висот геоїда або квазігеоїда з геопотенціальних моделей та як одну зі складових параметрів для побудови сучасних вертикальних референцних систем (VRS – Vertical Reference System). Системи VRS визначають на основі мережі спеціально підібраних GNSS-станцій, мережі різних морських мареографів (нульових пунктів класичних систем висот), що об'єднані в одну систему відліку висот та вузлових пунктів високоточного геометричного нівелювання. Для території Європи побудову вертикальних референцних систем здійснюють за підтримки Європейської вертикальної опорної GNSS-мережі (European vertical reference GPS network – EUVN) [65]. Мережа EUVN налічує близько 200 пунктів: ~66 GNSS-станцій, ~63 мареографи та ~67 пунктів геометричного нівелювання [166]. Для кожного з перелічених різновидів пунктів визначено прямокутні координати в системі ETRS89 та геопотенціальні висоти в системі Об'єднаної європейської нівелірної мережі (United European Levelling Network – UELN).

Основною Європейською вертикальною референчною системою висот є EVRS (European Vertical Reference System) [66]. За початок відліку висот прийнято нуль-пункт Амстердамського мареографа, скорочено NAP (Normaal Amsterdams Peil), а реалізацію здійснюють в системі нормальних висот. Суть створення такого роду систем полягає у тому, щоб реалізувати перехід на оновлені системи відліку висот на локально-регіональному рівні, а тоді об'єднати їх в єдину глобальну систему висот. У 2019 році було оголошено

про перехід України на Амстердамську систему нормальних висот [178] та про інтеграцію Української нівелірної мережі спочатку в систему UELN, а згодом і в EVRS [182].

Сучасні вертикальні системи являють собою геометрично-фізичні системи відліку висот, щоб забезпечити узгодження між основними відліковими поверхнями та GNSS-вимірами. Також важливою метою є встановлення взаємного перетворення та трансформування між системами координат та висот для можливості застосування сучасних супутникових та геодезичних методів, зокрема методу GNSS-нівелювання.

1.2.2. Метод GNSS-нівелювання

Сьогодні існує альтернативний метод визначення висот точок фізичної поверхні Землі який називають GNSS-нівелюванням. Принцип визначення висот цим методом зображено на рисунку 1.6.

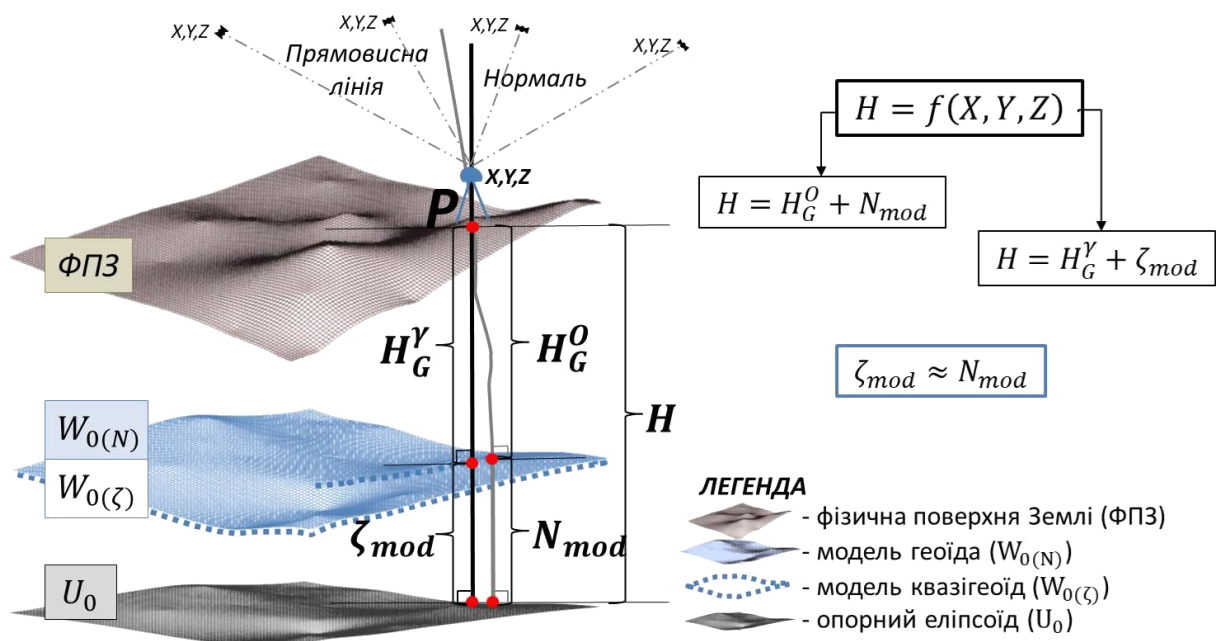


Рисунок 1.6 – Принцип методу GNSS-нівелювання

Суть методу GNSS-нівелювання полягає в тому, що визначення ортометричних (H_G^O) або нормальних (H_G^Y) висот здійснюють на основі простих рівнянь зв'язку:

$$H_G^O = H - N_{mod} \quad (1.8)$$

$$H_G^Y = H - \zeta_{mod} \quad (1.9)$$

де H – це еліпсоїдна висота визначена за даними GNSS-спостережень шляхом перетворення геоцентричних просторових прямокутних координат на еліпсоїдні ($H = f(X, Y, Z)$); N_{mod} – висота геоїда отримана з обраної моделі шляхом інтерполяції; ζ_{mod} – висота квазігеоїда (аномалія висоти) визначена методом інтерполяції з відповідної моделі.

З формул (1.8-1.9) випливає, що точність методу GNSS-нівелювання залежить від похибки визначення еліпсоїдної висоти із GNSS-спостережень та від похибки висоти геоїда або квазігеоїда отриманих з обраної моделі. Своєю чергою точність висот отриманих з моделей залежить від якості та кількості даних та інших параметрів моделювання, що використовують для їхнього обчислення.

Моделльні значення висот геоїда та квазігеоїда слугують для зв'язку між еліпсоїдною висотою та ортометричною або нормальною. Однак необхідно зазначити, що моделі геоїда бувають трьох масштабів – глобального, регіонального та локального, а модель квазігеоїда може бути виражена лише у двох останніх. Але у будь-якому випадку, еліпсоїдна висота отримана з GNSS-нівелювання, модельна висота геоїда або квазігеоїда отримана з обраної моделі є трансформантами переходу до ортометричної чи нормальної висоти [135, 58].

Для пунктів, висоти яких потрібно отримати методом GNSS-нівелювання, але які не розташовані на фізичній поверхні Землі (стінні репери та марки), GNSS-спостереження поєднують із геометричним нівелюванням (рисунок 1.7).

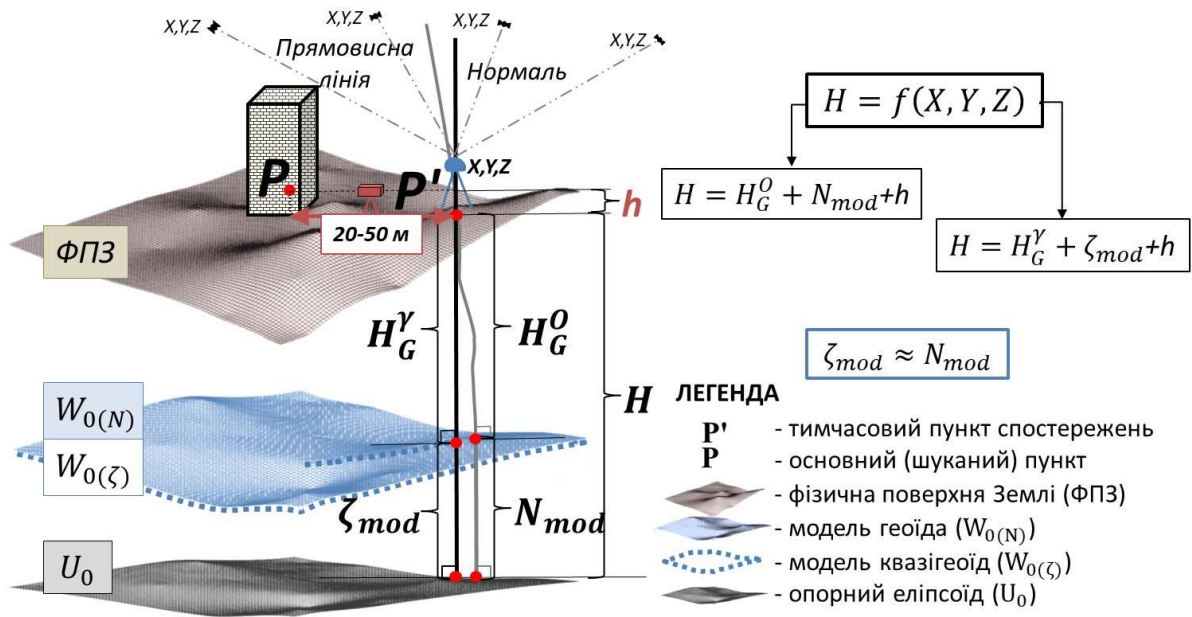


Рисунок 1.7 – Принцип методу GNSS-нівелювання з передачею висоти методом геометричного нівелювання

Принцип методики GNSS-нівелювання з передачею висоти полягає у тому, що на відстані 20-50 метрів від основного (шуканого пункту) встановлюють “тимчасовий” пункт над яким проводять спостереження GNSS-приймачем. Після закінчення таких спостережень між шуканим та тимчасовим пунктом виконують геометричне нівелювання для визначення перевищення (h) між ними. Після цього отримане перевищення враховують при обчисленні висот:

$$H_G^O = H + h - N_{mod} \quad (1.10)$$

$$H_G^Y = H + h - \zeta_{mod} \quad (1.11)$$

При виборі місця встановлення тимчасового пункту спостережень слід забезпечити його взаємну видимість на основний пункт для можливості здійснення геометричного нівелювання методом однієї станції стояння нівелірного приладу.

Відповідно до формул (1.9) та (1.11), якщо необхідно визначити нормальні висоти за допомогою GNSS-нівелювання, то потрібно

використовувати модель квазігеоїда, але в деяких випадках модель квазігеоїда може бути замінена глобальною моделлю геоїда, тобто у відповідності $\zeta_{mod} = N_{mod}$ [77], тоді:

$$H_G^Y = H - N_{mod} \quad (1.12)$$

$$H_G^Y = H + h - N_{mod} \quad (1.13)$$

Ці рівняння будуть справедливими для тих територій, де “реальний” квазігеоїд і геоїд відрізняються на рівні 1-2 сантиметри. Така заміна не призведе до суттєвих втрат точності визначення нормальних висот точок фізичної поверхні Землі за допомогою методу GNSS-нівелювання. Основна проблема методу зводиться до самого факту використання математично змодельованих величин квазігеоїда або геоїда, а не їхніх безпосередньо “вимірних” значень. Однак, з іншого боку, метод GNSS-нівелювання дає можливість уникнути основних недоліків геометричного нівелювання, таких як: затяжний процес робіт, залежність від погодних умов та сезонності, наявність великих трудових та фінансових затрат.

1.3. Поняття геоїд/квазігеоїд в сучасному контексті

З моменту появи поняття геоїда та квазігеоїда наукова спільнота завжди розділялася на прихильників тієї чи іншої концепції. Вибір геоїда припускає, що необхідно використовувати ортометричні висоти, а вибір квазігеоїда передбачає використання нормальних висот. Ортометричні та нормальні висоти найчастіше використовуються для практичної реалізації локальних, національних або континентальних вертикальних геодезичних мереж [41]. Принципова відмінність між цими двома концепціями полягає в тому, що:

- фактична середня сила тяжіння вздовж прямовисної лінії між геоїдом і фізичною поверхнею Землі, яка передбачається в теоретичному

визначенні ортометричних висот, може бути визначена лише наближено за деякими припущеннями;

- середня нормальна сила тяжіння вздовж еліпсоїдальної нормалі між фізичною поверхнею Землі та телуроїдом, при визначенні нормальної висоти, розраховується більш явно.

Геоїд – фізично значуща поверхня, має недолік чутливості до змін щільності всередині Землі, а квазігеоїд не є фізично значущою поверхнею, але вимагає інтегрування сили тяжіння на всій фізичній поверхні Землі (точніше на її спрощеній версії – телуроїді).

Геоїд є важливим інструментом для геофізичної інтерпретації Землі та у вигляді опорної поверхні для висотних систем. Гравіметричне моделювання геоїда базується на формулі Стокса, яка інтегрує гравітаційну аномалію на сфері та апроксимує поверхню Землі, щоб отримати висоту геоїда, тобто перевищення геоїда над опорним еліпсоїдом [138]. У сучасній техніці інтегрування формула Стокса модифікована різними способами, головним чином для представлення довгих довжин хвиль геоїда глобальної гравітаційної моделі Землі, тоді як короткі довжини хвиль визначаються лише поверхневою гравітацією [137]. Застосування формули Стокса вимагає врахування ряду поправок до первинно визначених гравітаційних аномалій поверхні Землі. Оскільки формулу Стокса застосовують на сфері, і вона не враховує маси, що знаходяться поза сферою, то гравітаційні аномалії повинні бути [138]:

- скориговані за прямий топографічний вплив;
- скориговані за прямий атмосферний вплив;
- продовжені (зменшені) від фізичної поверхні Землі до сфери.

Після врахування цих поправок до гравітаційних аномалій, формула Стокса дає так званий когеоїд. Наведена вище техніка для усунення ефектів зовнішніх мас спочатку називалася регуляризацією геоїда, а утворена поверхня – когеоїдом або регуляризованим геоїдом [55, 139]. Отриманий у такий спосіб когеоїд потрібно також скоригувати за усунення вже непрямих

топографічних і атмосферних впливів, що дасть можливість отримати поверхню геоїда.

Визначення поверхні квазігеоїда – це геометрично-фізичний метод, що базується на інтегруванні гравітаційних аномалій на фізичній поверхні Землі (точніше на поверхні телуроїда) шляхом послідовних наближень. Вертикальна відстань між телуроїдом та поверхнею Землі називається висотою квазігеоїда або аномалією висоти. Поверхню квазігеоїда можна отримати шляхом відкладання аномалій висот від поверхні опорного еліпсоїда. Таким чином, квазігеоїд визначають за зовнішнім гравітаційним полем стосовно поверхні Землі, при цьому до уваги беруть лише знання геометрії зовнішнього поля. Класичний підхід визначення квазігеоїда, як і геоїда, також дещо вдосконалений численними математичними та теоретичними доповненнями [154].

Геоїд – це досить гладка поверхня без будь-яких різких перепадів, країв чи інших нерівностей, в той час, як фізична поверхня Землі (або телуроїд) набагато шорсткіша, тобто недостатньо гладка, щоб здійснити її інтегрування без помилок. Більш грубі помилки визначення поверхні, як і геоїда, так і квазігеоїда, явно проявляються в гірській місцевості. Загалом, висоти геоїда та квазігеоїда є величинами, що досить плавно змінюються в глобальному сенсі, але перепад (або відхилення) цих висот відносно поверхні опорного еліпсоїда варіюється в діапазоні ± 100 м.

Сьогодні сучасні GNSS-технології дозволяють робити дедалі точніші припущення щодо розподілу топографічних мас всередині Землі. Це уможлиблює більш точне моделювання поверхні геоїда. Відповідно до припущень [154], якщо розподіл топографічної щільності буде відомий до 10%, то точність моделювання поверхні геоїда становитиме близько сантиметра, чого достатньо для більшості застосувань. З іншого боку [138] підкреслює, що інформація про розподіл щільності мас Землі необхідна для точного визначення геоїда (на відміну від квазігеоїда) може бути завжди недостатньо відомою, тому поверхню квазігеоїда можна визначити більше

точно, ніж геоїд, і тому висоти квазігеоїда є більш цінними для практичних цілей.

1.4. Огляд та аналіз сучасних моделей відлікових поверхонь для визначення висот методом GNSS-нівелювання

У останні десятиліття, зокрема у 2001-2021 роках, з'явилося чимало версій моделей відлікових поверхонь висот, які характеризуються різноманітними наборами параметрів моделювання. В цей період загалом офіційно представлено 177 регіональних моделей геоїда і квазігеоїда та 99 глобальних моделей геоїда [68, 126]. Це призвело до появи численних наукових досліджень, зокрема тих, які висвітлюють переваги та недоліки використання методу GNSS-нівелювання з урахуванням висот наявних модельних поверхонь. Проаналізувати сучасні моделі відлікових поверхонь можна на основі інформації з наукових публікацій, які стосуються проведення досліджень у визначенні висот методом GNSS-нівелювання [223].

У наукових працях [115, 18, 46, 167, 25, 110, 22, 1, 194, 140, 2, 182] досить детально описано принципи моделювання поверхні геоїда та квазігеоїда з урахуванням різних методів та наборів даних. Численні наукові дослідження присвячені верифікації та оцінці точності наявних моделей геоїда та квазігеоїда в контексті виконання методу GNSS-нівелювання на пунктах традиційних систем висот [122, 98, 109, 177, 83, 52, 191, 195, 127, 40, 157, 99]. Такий напрям досліджень дозволяє встановити фактичну точність моделей для конкретної області та використовувати дані наявних моделей для різних наукових та інженерних цілей. У роботах [100, 162, 42, 104, 37, 80, 23, 72, 151, 143, 142, 51, 34, 76, 35, 78, 4, 61, 39] продемонстровано різні комбіновані та модифіковані методи з метою здійснення корегування (адаптації) висот моделей геоїда та квазігеоїда на основі методів математичного аналізу та опрацювання даних для покращення точності визначення висот методом GNSS-нівелювання.

У загальному серед перелічених вище наукових досліджень можна виділити три основні категорії аналізу, що стосуються тематики методу GNSS-нівелювання та моделей відліку висот, як зображено на рисунку 1.8. Кожна категорія аналізу містить спільні та відмінні критичні компоненти, спрямовані на усунення конкретних недоліків, або виділення переваг, пов'язаних із застосуванням методу GNSS-нівелювання на основі моделей відлікових поверхонь. Зокрема, в межах отриманих категорій можна виділити ряд більш детальних критеріїв аналізу:

а) визначення відлікової поверхні геоїда за теорією Стокса (Stokes) та квазігеоїда за теорією Молоденського (Molodensky);

б) ефективність методів математичного аналізу та опрацювання даних, як от метод найменших квадратів (LSA), метод “видалення-обчислення-відновлення” (RCR), метод модифікації формули Стокса (KTH-method), середньоквадратична колокація (LSC) та швидке перетворення Фур’є (FFT);

в) врахування поправок систем припливів (“tide-free”, “zero-tide”, “mean-tide”) та величини ондуляції геоїда нульового порядку (“zero degree term”) для моделей глобального масштабу;

г) масштаб моделювання поверхні геоїда та квазігеоїда (наприклад, global geoid/regional geoid/local geoid/regional quasigeoid/local quasigeoid).

Відповідно до виділених критеріїв можна встановити процентне відношення частоти їхнього застосування до різних категорій наукових досліджень (рисунок 1.9).

Як видно з рисунка 1.9а, у 58% досліджень використано теорію Стокса, а теорію Молоденського у 42%, при цьому частота застосування математичних способів аналізу та опрацювання даних практично однакова (див. рис. 1.9б). З рисунка 1.9в можна виділити, що при моделюванні відлікової поверхні геоїда чи квазігеоїда більш часто використовують поправки системи без припливів (“tide-free”), а ондуляцію геоїда нульового порядку враховують лише у 33% випадків. Результати рисунка 1.9г вказують,

що моделювання, оцінку та коригування відлікових поверхонь здебільшого виконують для квазігеоїда регіонального масштабу (41%).

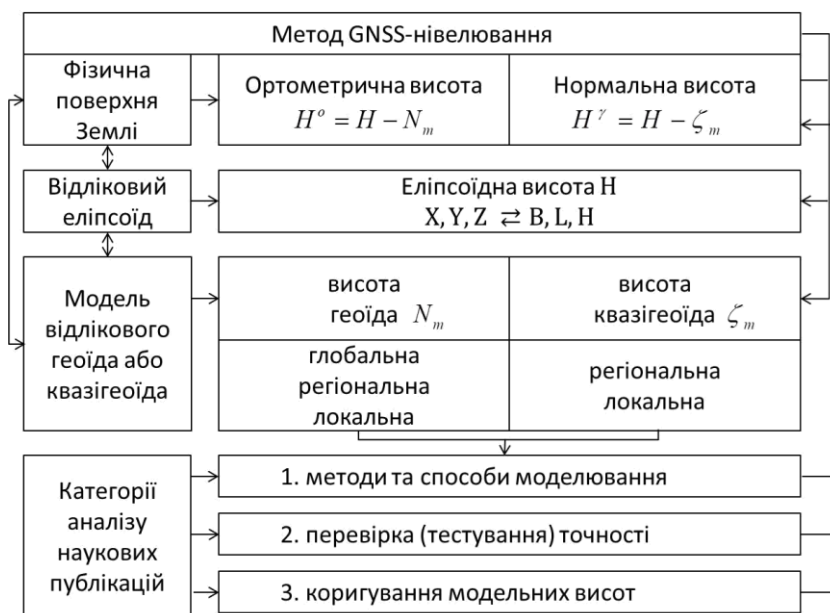


Рисунок 1.8- Принцип поділу наукових досліджень за категоріями

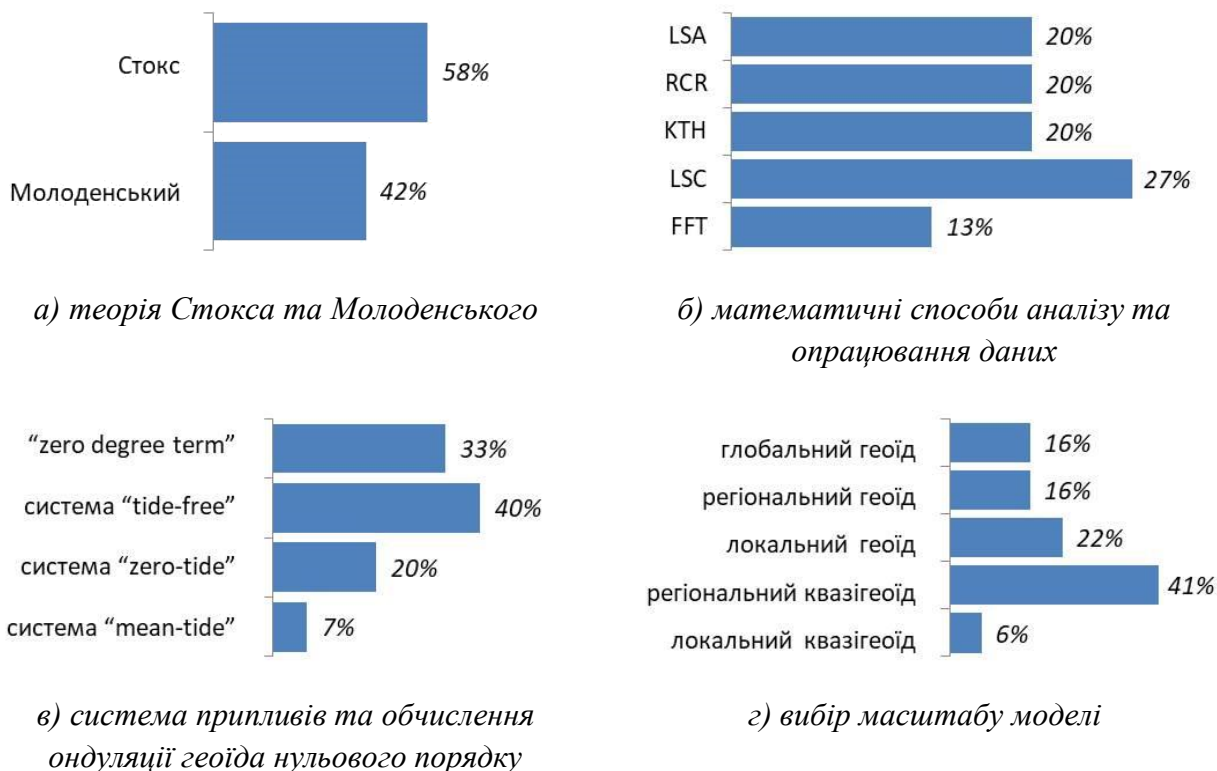


Рисунок 1.9 - Частота застосування критеріїв моделювання відлікових поверхонь

З огляду теоретичного аналізу моделей геоїда та квазігеоїда дуже інформативними є дані Міжнародного центру глобальних моделей Землі (International Centre for Global Earth Models – ICGEM) [69] та Міжнародної служби геоїда/квазігеоїда (International Service for the Geoid – ISG) [70], де представлено основні характеристики моделей відлікових поверхонь. За даними цих сайтів можна здійснити аналіз активності публікувань відповідних моделей у глобальному (дані ICGEM) та регіональному/локальному (дані ISG) масштабах, зокрема представлених за останні десятиліття та виявити найбільш прогресивні країни у цьому питанні (рисунок 1.10).

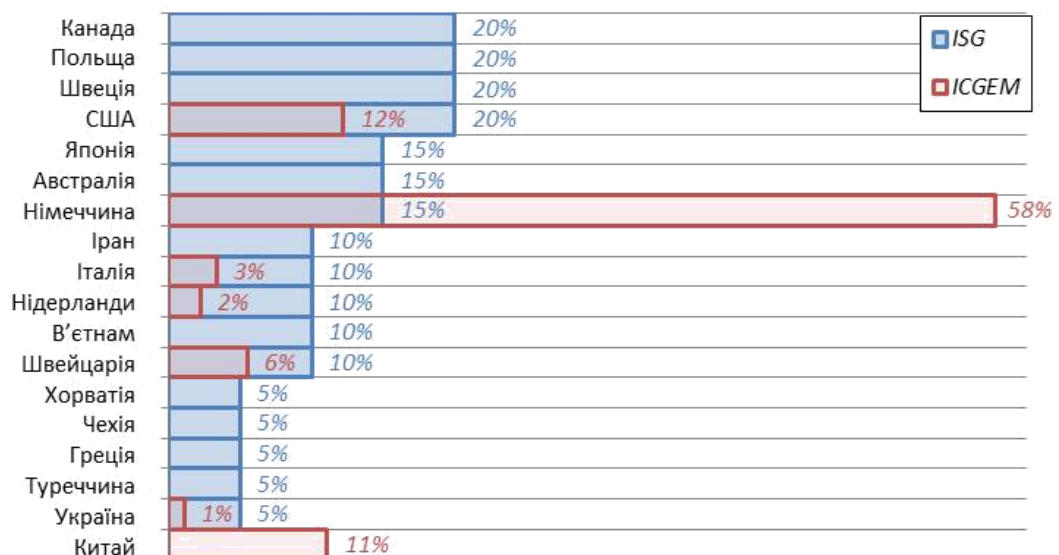


Рисунок 1.10 - Активність публікувань представлених моделей геоїда та квазігеоїда за країнами-розробниками (2001-2021 рр.)

За результатами рисунка 1.10 бачимо, що передовими у моделюванні поверхні геоїда/квазігеоїда регіонального та локального масштабу є Канада, Польща, Швеція та США (Сполучені Штати Америки), а у моделюванні глобального геоїда – Німеччина, США та Китай.

Представлена на сайті служби ICGEM інформація також уможливілює проведення аналізу щодо відношення точності висот геоїда глобальних моделей до величини ступеня/порядку їхнього обчислення для певного

регіону. Таким чином, можна провести аналіз змін точності, наприклад, для території Європи. Значення середньоквадратичних відхилень (m) 1 047 пунктів GNSS-нівелювання візьмемо з таблиці статистик на сайті ICGEM у розділі <Evaluation→GNSS Leveling>, а дані щодо ступеня/порядку моделей з розділу <Gravity Field Models→Static Models> [69]. Графічний результат такого аналізу представлено на рисунку 1.11.

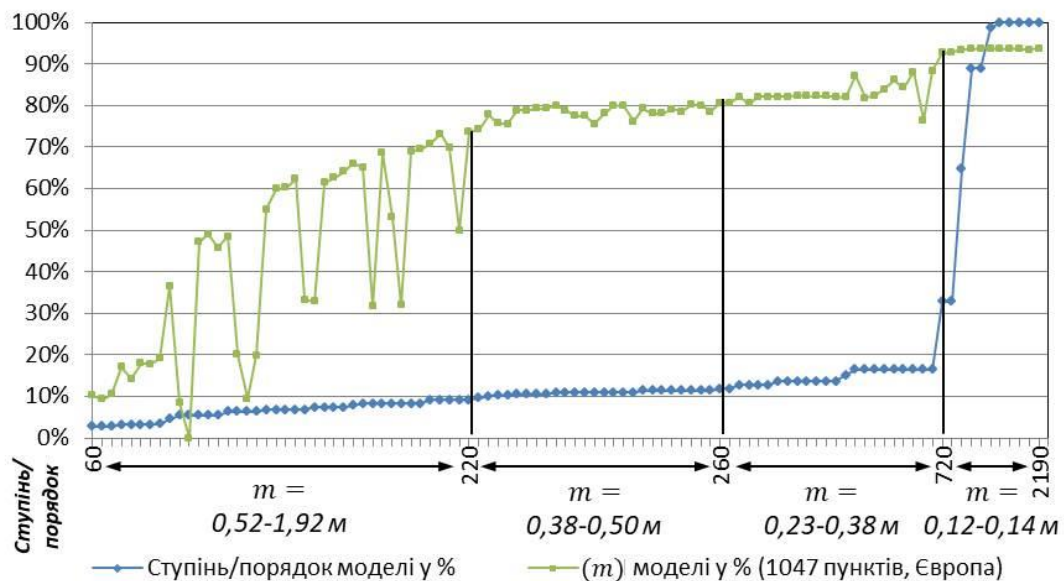


Рисунок 1.11 - Залежність середньоквадратичних значень похибок висот глобальних моделей геоїда від ступеня та порядку їх обчислення

З рисунка 1.11 видно, що існує тенденція зміни точності зі збільшенням ступеня/порядку моделі. Таким чином, можна виділити чотири частини графіку щодо точності моделей та їхнього ступеня/порядку обчислення:

- моделі 60-220 ступеня/порядку з точністю на рівні 0.52-1.92 м;
- моделі 220-260 ступеня/порядку з точністю 0.38-0.50 м;
- моделі 260-720 ступеня/порядку з точністю в межах 0.23-0.38 м;
- моделі 720-2190 ступеня/порядку, точність яких складає 0.12-0.14 м.

Лише 11% із 99 розглянутих моделей геоїда можна використовувати для практичної реалізації методу GNSS-нівелювання. Однак, пряме використання висот цих моделей для більш точних інженерних і наукових робіт не дуже ефективно. Зокрема, середньоквадратична точність висот

глобальних моделей високого ступеня/порядку вказує на те, що наявність різних підходів до моделювання відлікових поверхонь (див. рис. 1.9) геоїда (або квазігеоїда, залежно від випадку) дає майже ідентичні результати. Ситуація з моделями регіонального масштабу практично така ж, тому пошук рішень пов'язаних з підвищенням точності висот моделей геоїда/квазігеоїда, а отже й методу GNSS-нівелювання, слід здійснювати на локальному рівні.

З огляду суто геометричних моделей відліку висот існує багато різноманітних еліпсоїдів, які використовують, як відлікову поверхню для визначення модельних висот геоїда або квазігеоїда. З численних наукових досліджень виявлено, що для зазначених вище цілей найчастіше використовують поверхню глобального еліпсоїда WGS84 та GRS80, як опорну. На рисунку 1.12 представлено частоту використання цих двох еліпсоїдів, як відлікових поверхонь при визначенні висот геоїда/квазігеоїда з моделей різного масштабу.

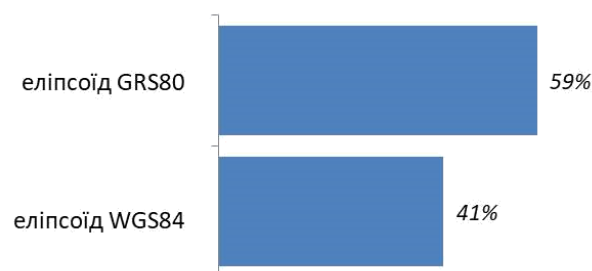


Рисунок 1.12 – Частота використання еліпсоїда WGS84 та GRS80

Крім того, відповідно до резолюції 1983 року представленої міжнародною асоціацією геодезії (IAG – International Association of Geodesy) для опрацювання геодезичних даних рекомендується використовувати саме параметри загальноземного еліпсоїда GRS80. Практично всі новітні моделі геоїда та квазігеоїда створюють з урахуванням цих рекомендацій.

Новітні можливості щодо визначення поверхні геоїда або квазігеоїда здебільшого базуються на супутникових методах, або на їхньому комбінуванні із наземними вимірами. Сьогодні для визначення ортометричних та нормальних висот точок фізичної поверхні Землі, як і для

розбудови та оновлення традиційних систем висот, широко поширений саме метод GNSS-нівелювання. Сучасний розв'язок такої задачі зводиться до того, що ортометричну або нормальну висоту знаходять, як різницю між еліпсоїдною висотою та висотою геоїда або квазігеоїда відповідно. При цьому, еліпсоїдну висоту отримують, як функцію від значень просторових геоцентричних координат, що визначені за даними GNSS-спостережень, а середня практична (польова) точність отриманих висот коливається на рівні 1-2 см. Дана точність буде справедливою при виборі будь-якої системи просторових геоцентричних координат стосовно опорного еліпсоїда, що прийнятий для тієї чи іншої системи. Наприклад, якщо під час опрацювання GNSS-спостережень у програмному пакеті користувач обрав систему координат ITRS, що використовує, як основу параметри еліпсоїда GRS80, то зазначена точність отриманих еліпсоїдних висот буде відхиленням щодо поверхні даного еліпсоїда. Такий принцип діє також для всіх інших регіональних чи національних систем просторових координат, наприклад, як ETRS або UСК2000.

Своєю чергою, висоти геоїда або квазігеоїда отримують із відповідних моделей, які зазвичай виражають у глобальному або регіональному масштабі, а їхня точність залежить від кількості та якості залучених даних та методів математичного опрацювання, що використані при їхній побудові. Тобто, без максимально точних моделювань поверхні геоїда або квазігеоїда, реалізація методу GNSS-нівелювання для отримання ортометричних чи нормальних висот фізичної поверхні Землі залишатиметься досить неоднозначною.

Зважаючи на традиційні підходи щодо визначення поверхні геоїда та квазігеоїда, що були засновані на суто наземних геодезичних методах вимірювань, існували обмежені перспективи визначення поверхні геоїда та квазігеоїда на морях (океанах). Така ситуація також не дозволяла перейти до глобального масштабу. Зважаючи на це, вивчати фігуру Землі, як фізико-математичну модель з високою точністю було неможливим. Це призвело до появи регіональних рішень у вигляді поверхні геоїда або квазігеоїда та до

побудови систем ортометричних та нормальних висот від середнього рівня моря, що географічно ближче розташований для певного регіону. При цьому, для розповсюдження систем висот класичними методами, передбачалося введення у висоти поправок, що обчислювали за даними гравіметричних вимірювань. Такий підхід дозволяв максимально точно визначати висоти на фізичній поверхні Землі та використовувати їх у практичних та наукових цілях. Однак, не зважаючи на те, що традиційні підходи є досить точними, сам процес реалізації класичних наземних методів дуже складний, довготривалий та фінансово затратний.

Висновки до розділу 1

1. Розглянуто основні відлікові поверхні, що використовують при визначенні висот з огляду традиційних та сучасних підходів. Наведено основні відомості щодо методів визначення відлікових поверхонь, що уможливило порівняння їхніх переваг та недоліків, зокрема:

2. Сучасне визначення геоїда та квазігеоїда, як відлікової поверхні висот, загалом має такі ж недоліки, як і традиційні підходи. Однак, шляхом постійної модернізації класичних концепцій, сьогодні ці поверхні можна змоделювати на рівні від кількох до десятків сантиметрів, зокрема й в глобальному масштабі. Разом з цим, така точність не задовольняє багато геодезичних робіт, зокрема наукових.

3. Визначення висот методом GNSS-нівелювання вимагає впровадження новітніх підходів, що базуються на правильному та точному поєднанні геометричних та фізичних параметрів систем відліку висот. Зважаючи на принцип сучасних підходів щодо визначення висот, що передбачають заміну “вимірних” висот геоїда/квазігеоїда – модельними значеннями, проблема застосування методу GNSS-нівелювання зводиться до точності висот геоїда або квазігеоїда обраної моделі таких висот.

4. Виконано порівняльний аналіз сучасних відлікових поверхонь, що охоплює основні проблемні напрямки щодо визначення висот методом GNSS-нівелювання. За результатами такого аналізу встановлено, що сучасні наукові дослідження спрямовані на розв’язання проблемних питань точності, як геоїда, так і квазігеоїда практично в однаковій мірі. Крім того, встановлено, що на сьогодні не існує якогось універсального підходу щодо розв’язку задачі моделювання відлікових поверхонь геоїда та квазігеоїда з точністю до сантиметра навіть на регіональному рівні.

5. За результатами огляду та аналізу сучасних відлікових поверхонь зроблено висновок, що важливим та невирішеним питанням є незадовільна точність наявних моделей геоїда та квазігеоїда, висоти яких використовують для реалізації методу GNSS-нівелювання. Звідси слідує, що для забезпечення

належної точності наявних моделей, альтернативним є рішення щодо здійснення коригувань (тобто уточнень) висот таких моделей. Разом з тим, доцільно виконувати коригування саме висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, оскільки такі моделі вільні від помилок додатково залучених даних, що використовують для регіональних моделювань. Для виконання такого роду завдання слід розробити індивідуальну методику коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей та підібрати оптимальні параметри високоточних коригувань.

РОЗДІЛ 2. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛІПСОЇДНИХ ВИСОТ ІЗ ДАНИХ GNSS-СПОСТЕРЕЖЕНЬ

2.1. Розгляд похибок GNSS-вимірювань

За результатами GNSS-спостережень можна отримати координати та висоти у відповідній системі відліку. Як відомо, всі вимірювання, як класичні геодезичні, так і новітні супутникові, мають ряд похибок. Для забезпечення високого рівня точності будь-яких вимірів необхідно знати чинники виникнення всіх можливих похибок, а також їхні властивості. Це дасть можливість виконавцю робіт чітко зрозуміти, як звести сумарний вплив всіх похибок практично до нуля в польових умовах (безпосередньо під час спостережень) та врахувати відповідні поправки під час камерального опрацювання даних. Загальну блок-схему зв'язку між супутниковими вимірами та кінцевою точністю координат наведено на рисунку 2.1.

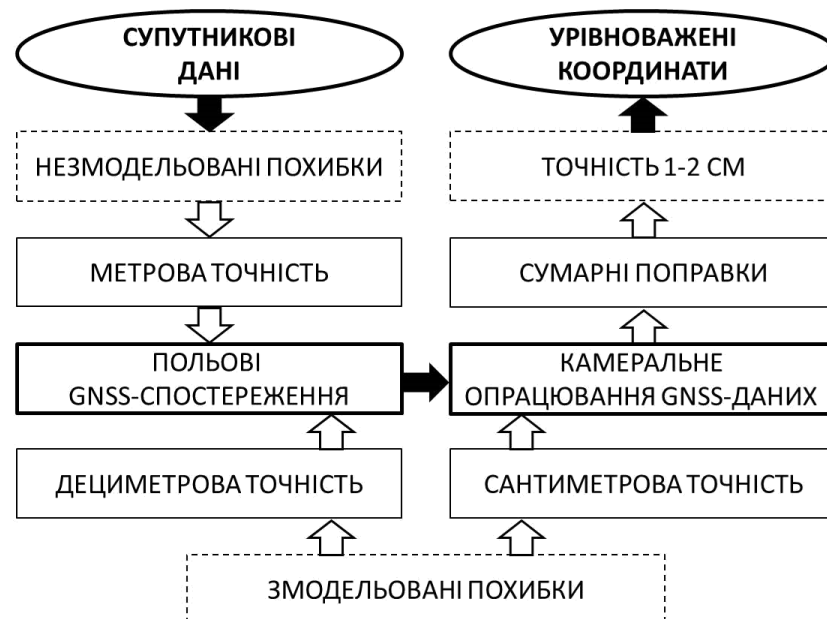


Рисунок 2.1 – Загальний зв'язок між супутниковими вимірами та точністю координат

З рисунка 2.1, можна побачити, що процес коригування похибок супутникових вимірів відбувається на етапі польових та камеральних робіт

шляхом врахування різного типу змодельованих поправок. Супутникові виміри першочергово містять помилки, що можуть спричинити не змодельовані варіації часу отримання сигналів GNSS-приймачем [158]. В загальному, для коригування супутникових вимірів існує два підходи: 1) коли змодельовані поправки надходять від мережі наземних GNSS-станцій в режимі реального часу; 2) коли змодельовані поправки можна врахувати під час постопрацювання GNSS-вимірів. Разом з тим, перший підхід стосується лише тих GNSS-приймачів, що підтримують функцію RTK (Real Time Kinematic), а поправки моделюються на основі виключно мережі активних референцних станцій. Другий підхід зазвичай використовують при виконанні статичних GNSS-спостережень із застосуванням змодельованих поправок за результатами постійних GNSS-вимірів пасивної мережі наземних GNSS-станцій.

На точність вимірювань супутниковими методами першочергово впливають похибки, що виникають в польових умовах:

- похибки годинника супутника (стабільність, релятивістські ефекти та групова затримка синхронізації часу);
- похибки годинника приймача;
- іоносферна та тропосферна затримки;
- багатошляховість (відбиття) сигналу;
- похибки ефемерид супутника;
- ефекти погіршення точності;
- похибки GNSS-приймача;
- похибки фазового центру антени.

Інформація про похибки годинника супутника надходить в навігаційному повідомленні, що уможливорює коригування значень у режимі реального часу або під час постопрацювання даних. Стабільність супутникового годинника – це фактично точність синхронізації вимірної й номінальної частоти [95]. Релятивістські ефекти виникають тому, що

годинник супутника працює швидше, ніж годинник вмонтований у GNSS-приймач, що розташований на Землі. Це впливає на запізнення сигналу в часі, на різницю в часі через гравітаційне поле, на частоту сигналу, на ефект псевдовідстані, спричинений обертанням Землі, через ексцентриситет орбіти та прискорення супутника при проходженні по ній [54].

Похибки годинників GNSS-приймачів також виникають тому, що наземні приймачі оснащені недорогими кристалічними годинниками, які мають нижчу точність порівняно із супутниковими. У результаті похибка годинника приймача набагато більша, ніж похибка годинника GNSS-супутника. Мінімізувати ці похибки можна за допомогою точніших, як правило, цезієвих або рубідієвих годинників, які мають чудову продуктивність, але проблема полягає в тому, що вони досить дорогі [118, 75]. Інше рішення, яке набагато поширеніше, полягає в тому, щоб усунути похибки шляхом визначення різниці часу між супутниковими та наземними приймачами, як додаткового невідомого параметра при супутникових спостереженнях. З теорії супутникового позиціонування відомо, що для визначення просторових координат наземного пункту достатньо отримувати сигнал мінімум від трьох супутників. Залучення четвертого супутника необхідне для виключення саме похибки годинника шляхом оцінки помилки як додаткового невідомого параметра в процесі GNSS-вимірів [75].

Іоносфера є досить великим джерелом похибок у GNSS-сигнали [57]. Похибки спричинені іоносферою, коливаються від кількох метрів до десятків метрів у зеніті [81]. Оскільки іоносфера є дисперсійним середовищем, більшу частину іоносферної затримки можна усунути за допомогою використання двох частотних GNSS-приймачів; однак після цього все ж залишаться помилки іоносфери вищого порядку [59]. Залишкові похибки можуть досягати кількох десятків сантиметрів, але їх можна врахувати, як іоносферні поправки вищого порядку [43]. Такі поправки отримують шляхом моделювання параметрів іоносфери [226, 225].

Супутниковий сигнал також проходить через тропосферу, яка є найнижчою частиною атмосфери. Оскільки це заломлювальний шар, тропосфера також затримує сигнали GNSS, однак, будучи електрично нейтральним, цей шар є недисперсійним. Ця частина атмосфери складається з сухих газів і водяної пари, тобто має дві складові: вологу і суху [56]. Волога складова становить всього 10% затримки (але моделюється менш точно), а суха складає решту затримки [181]. Загальну похибку тропосферної затримки також усувають шляхом врахування її як поправки у сигнал на основі змодельованих параметрів [116, 164].

Похибка багатошляховості виникає через навколишнє середовище навколо наземного GNSS-приймача. Тобто, сигнал перш ніж потрапити в антену приймача відбивається від навколишніх предметів, якими можуть бути дерева, водойми, будівлі тощо. Таким чином, похибка багатошляховості може обмежити точність позиціонування, навіть якщо інші джерела помилок максимально скориговані. Щоб мінімізувати вплив багатошляховості сигналів, можна використовувати спеціальні антени, методи постопрацювання для зменшення багатошляховості несучої фази або її згладжування для зменшення багатошляховості коду [71]. Існують також можливості моделювання відбитих сигналів для врахування їх, як поправок у сигнал, якщо ефект багатошляховості дуже явний та уникнути його під час спостережень не вдається [87].

Помилку ефемерид супутника можна скоригувати через поправки глобальної або локальної GNSS-мережі наземних станцій. Такі поправки використовують для уточнення орбіт супутників, а отже, для підвищення точності позиціонування та надаються відповідними службами (наприклад IGS). Комбіновані орбітальні (ефемеридні) поправки доступні в різних варіантах [158]:

- *Broadcast*, бортові (супутникові) ефемериди, що надходять у навігаційному повідомленні;

- *Ultra-Rapid*, ультрашвидкі ефемериди, що можуть бути прогнозованими (predicted half) та спостережуваними (observed half);
- *Rapid*, швидкі ефемериди, що частково уточнені за даними наземних станцій;
- *Final*, фінальні, що повністю уточнені на основі даних всієї GNSS-мережі наземних станцій.

Безпосередньо для користувачів корисним є коригування даних на основі ефемерид типу – *Ultra-Rapid*, *Rapid* та *Final* [84]. На сучасному рівні розвитку ці дані є високоефективними [204] та можуть бути доступними для використання вже за кілька годин, а більш точні протягом двох тижнів. В таблиці 2.1 наведено основні характеристики всіх типів ефемерид.

Таблиця 2.1

Основні характеристики ефемеридних поправок

Тип ефемерид	Тип поправки	Час доступності	Точність
Broadcast	супутникові	в режимі реального часу	~100 см
Ultra-Rapid (predicted half)	супутникові	в режимі реального часу	~5 см
Ultra-Rapid (observed half)	супутникові	3-9 год.	~3 см
Rapid	супутникові та наземні	17-41 год.	~2.5 см
Final	супутникові та наземні	12-18 днів	~2.5 см

Ефекти погіршення точності (DOP – Dilution Of Precision), які ще називають геометричним розведенням супутників, з'являються коли просторова конфігурація супутників несприятлива для виконання всіх необхідних умов щодо точності позиціонування. На даному етапі розвитку GNSS-систем проблема погіршення точності за показником DOP зведена практично до нуля. Пов'язано це з тим, що сьогодні сумарна кількість супутників усіх наявних супутникових систем забезпечує сприятливу просторову конфігурацію практично в будь-якій частині планети. Існує невелика різниця у погіршенні точності для полярних широт, тобто в екваторіальних широтах цей показник набагато кращий ніж у полярних [163]. Однак навіть за таких умов загальний вплив помилки викликані ефектом

DOP суттєвих змін у точність GNSS-вимірів не вносить. При виникненні можливих виняткових випадків для зменшення похибки впливу ефекту погіршення точності DOP використовують модельні зважені значення DOP [19].

Похибки GNSS-приймача виникають через так званий шум приймача. Загалом це комплексна помилка, яка утворюється у приймачі під час вимірювання супутникових сигналів [86, 148]. Шум приймача безпосередньо не пов'язаний із сигналом який надходить, а походить від компонентів самої системи роботи приймача, як-от: антена, кабелі та підсилювачі, процес квантування сигналу [150]. Шум приймача вважається білим шумом (тобто тепловим), отже його не можливо повністю уникнути та вилучити. Однак сучасні технології GNSS-приймачів дають можливість зменшити сумарну похибку впливу шуму до сантиметрового рівня.

Фазовий центр антени GNSS-приймача є сполучним елементом між супутниками й наземним приймачем. Він приймає вхідний супутниковий сигнал, а потім перетворює його у спеціальні числові значення та передає в пам'ять приймача. Варіації фазового центру антени є критичними проблемами точного позиціонування. Вони виникають через “зсув” центру антени від “істинного” положення. Такі відхилення зазвичай коригують за допомогою врахування коефіцієнтів зміни фазового центру. Визначають їх за допомогою моделювання всеможливих варіацій, а процес врахування отриманих модельних значень називають калібруванням антени [45]. Це фактично поправки, які дають змогу підвищити точність визначення координат під час постопрацювання, однак, у випадку неправильного їхнього врахування або ігнорування, отримані координати матимуть досить грубі помилки, особливо висотна складова [29].

Визначення величин всіх наведених вище похибок потребує безперервних спостережень на основі великої кількості GNSS-станцій. Вплив певних похибок можна усунути або мінімізувати під час супутникових спостережень, а деякі з них можна змодельювати за характером їхньої зміни в

часі та просторі [84]. Процес моделювання дозволяє скоригувати похибки безпосередньо під час опрацювання GNSS-спостережень в програмному пакеті, а саме врахувати:

- вибір правильного типу антени;
- правильний ввід метеорологічних параметрів;
- вибір моделі коригування похибок тропосфери/іоносфери;
- модель поправок припливних ефектів;
- тип та клас ефемерид.

На кінцеву точність GNSS-даних також впливають такі фактори, як:

- режим, час та кількість спостережень;
- точність центрування антени приймача;
- точність вимірювання висоти антени;
- вибір способу опрацювання даних;
- кількість контрольних пунктів при врівноваженні вимірів.

Також певною мірою на кінцеву точність впливає вибір програмного пакета, в якому опрацьовують GNSS-спостереження. Стосується це зокрема загальноприйнятого поділу щодо технічних можливостей програмних пакетів на інженерні та наукові, які більш детально будуть розглянуті у розділі 2.3. Практично всі програмні пакети інженерного типу дають рівнозначну точність опрацювання GNSS-даних, а різниці можуть складати кілька міліметрів [170, 210].

Таким чином, після опрацювання даних супутникових спостережень у професійному програмному забезпеченні можна отримати врівноважені еліпсоїдні координати та висоту. Чітке дотримання інструкційних рекомендацій щодо виконання GNSS-спостережень уможливорює мінімізацію впливу всіх наявних похибок та забезпечує надійність отриманих результатів. Проте, навіть після видалення всіх видів основних похибок кінцеві дані користувач отримує з певною точністю, яка також залежить від обраного методу супутникових спостережень.

2.2. Основні методи GNSS-спостережень

У загальному розумінні супутникові спостереження поділяють на абсолютні та відносні методи. Абсолютний метод базується на тому, що координати наземного GNSS-приймача визначаються безпосередньо щодо координат GNSS-супутників, і при цьому використовується лише один наземний приймач. Принцип відносного методу передбачає, що координати наземного GNSS-приймача визначаються відносно одного або кількох наземних пунктів із відомими координатами, плюс дані координат GNSS-супутників. На рисунку 2.2 зображено загальний принцип абсолютного та відносного методів супутникових спостережень.

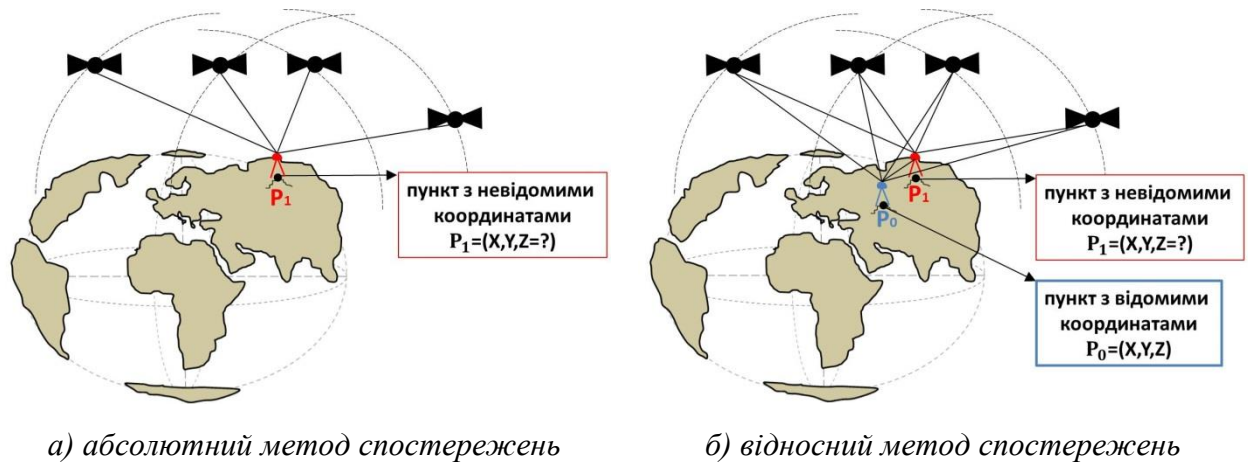


Рисунок 2.2 - Загальний принцип абсолютних та відносних супутникових спостережень

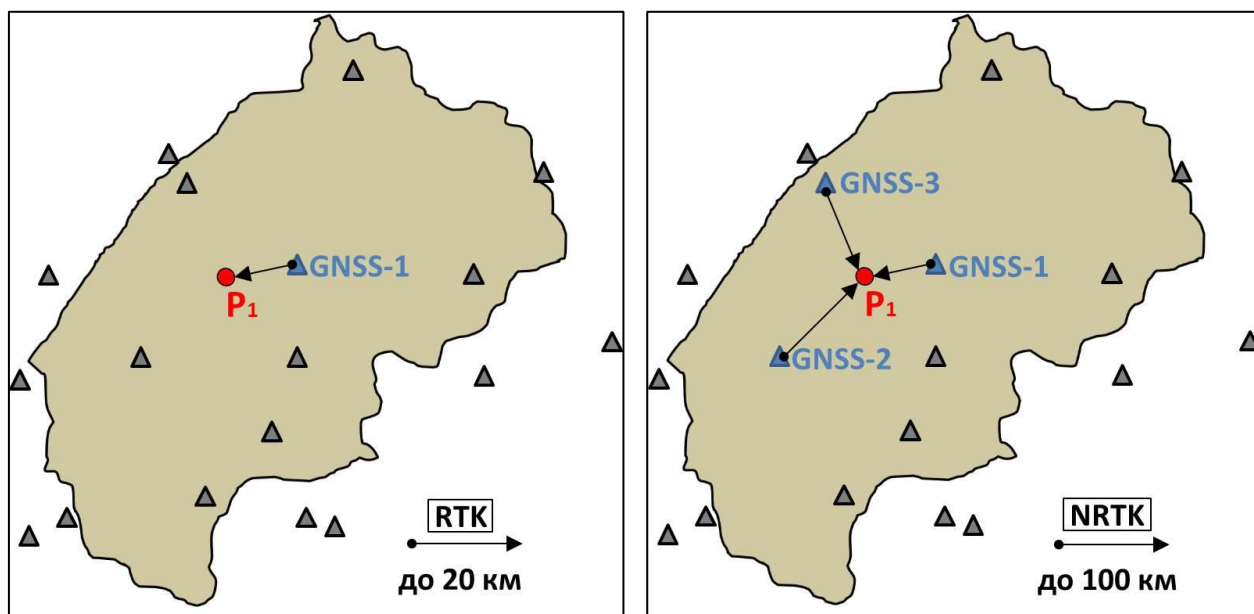
Абсолютний метод супутникових спостережень є найпростішим підходом щодо визначення координат, тому здебільшого він використовується, як стандартний метод для навігаційних цілей. Похибка визначення координат на основі абсолютного методу може коливатися від кількох до десятків метрів. Це пов'язано з тим, що стандартний абсолютний метод зазвичай не передбачає жодних спеціальних можливостей зменшення впливу джерел похибок, які впливають на GNSS-сигнали. Власне через це, його практично не використовують в геодезичних цілях. Для зменшення впливу джерел похибок стандартного абсолютного позиціонування, з 1997 року існує удосконалений метод абсолютних вимірювань, який

називають точним позиціонуванням точки або просто методом PPP (Precise Point Positioning) [168]. Суть цього методу полягає у тому, що GNSS-спостереження базуються на стандартному абсолютному методі з подальшим додатковим постопрацюванням вимірів в камеральних умовах. Однак, попри те, що в останні роки PPP-метод все частіше використовується в геодезії, сьогодні перевагу має все ж таки відносний метод GNSS-спостережень.

Відносний метод GNSS-спостережень використовує вимірювання фаз несучої хвилі, що виконані одночасно та за подвійною різницею між мінімум двома наземними станціями спостережень та GNSS-супутниками, що дозволяє усунути зсуви годинників супутників та приймачів. Іншими словами, метод відносного позиціонування – це процес визначення відносних різниць у координатах між двома наземними пунктами, кожен з яких одночасно спостерігає/вимірює діапазони супутникового коду та/або несучої фази групи тих самих супутників. Як правило, один GNSS-приймач розташований над відомим “базовим” пунктом, а інший віддалений – розташований (або динамічно переміщається) над невідомим “роверним” пунктом, який потребує геоприв’язки [152]. Обидва приймачі одночасно отримують GNSS-дані для подальшого обчислення координат шляхом постопрацювання або, альтернативно, базовий приймач передає дані у вигляді поправок на роверний приймач для обчислення положення в режимі реального часу (RTK). Вимірювання діапазону виконується шляхом порівняння різниці фаз із використанням несучої або кодової фази. Основний принцип полягає в тому, що абсолютні похибки позиціонування у двох пунктах будуть приблизно однаковими для даного проміжку часу. Результативна точність отриманих різниць координат становить приблизно метр для спостережень кодової фази та сягає сантиметрового рівня для відстеження несучої фази. Відносні різниці координат зазвичай виражаються як базис-вектори, тобто базові лінії (відстані) між пунктами, що умовно

утворюються під час відносних GNSS-спостережень. Відносний метод може виконуватись як у статичному, так і в динамічному (кінематичному режимі).

Спостереження у кінематичному режимі поділяють на класичні RTK та мережеві RTK (NRTK – Network RTK). На рисунку 2.3, представлено загальну схему принципу роботи класичного (RTK) та мережевого (NRTK) методу супутникових спостережень у режимі реального часу.



а) класичний RTK

б) мережевий NRTK

Рисунок 2.3 - Принцип роботи класичного та мережевого методу RTK

У класичному методі RTK, GNSS-приймач повинен працювати на короткій відстані від базової GNSS-станції через просторову декореляцію залежних від відстані помилок, викликаних іоносферою, тропосферою та орбітальними помилками [31]. Таким чином, робочий діапазон позиціонування класичного RTK залежить від атмосферних умов і зазвичай обмежується відстанню приблизно до 20 км від контрольної станції. Крім того, поправки від найближчої контрольної станції можуть бути недоступні, якщо така станція зазнає будь-яких збоїв у роботі. Обмеження відстані до GNSS-приймача в класичному методі RTK можна уникнути за допомогою методу, відомого як NRTK, за допомогою якого використовується ціла мережа контрольних станцій із дальністю дії зазвичай менше ніж 100 км.

З рисунка 2.3, можна побачити, що метод NRTK зазвичай потребує мінімум трьох контрольних станцій для генерування поправок для зони мережі, а класичний RTK використовує лише одну контрольну станцію. У методі NRTK, станції мережі безперервно збирають дані супутникових спостережень і надсилають їх до центрального об'єкта опрацювання, де спостереження GNSS-станцій опрацьовуються в загальній коригувальній мережі та обчислюються помилки спостережень для можливості їхнього виправлення. Обчислені таким чином поправки спостережень, що отримані від розв'язку утвореної GNSS-мережі, надсилаються на GNSS-приймач користувача, який знаходиться в зоні покриття мережі, щоб скоригувати помилки спостережень цього приймача. Перевагами класичного та мережевого методу RTK є те, що отримати координати та висоту шуканого пункту можна протягом кількох хвилин. Однак недоліком цього методу можна вважати обмежену точність визначення висот, яка коливається на рівні кількох сантиметрів. Крім того, поправки, які користувач отримує під час GNSS-спостережень в режимі реального часу є платними.

Згідно із чинною інструкцією щодо виконання топографо-геодезичних робіт за допомогою GNSS-систем на території України передбачено використання відносного методу для визначення координат та висот точок фізичної поверхні Землі та пунктів Державної геодезичної мережі [171]. Відносний метод рекомендовано використовувати, оскільки ним можна досягти міліметрового рівня точності базових ліній на основі опрацювання статичних GNSS-спостережень.

Відповідно до наказу “Про затвердження Порядку використання Державної геодезичної референцної системи координат УСК-2000 при здійсненні робіт із землеустрою”, для виконання GNSS-спостережень відносним методом необхідно використовувати двох частотні GNSS-приймачі разом із високоточними GNSS-антенами. Для антен слід використовувати уточнені варіації фазових центрів, що надаються відповідними міжнародними центрами GNSS-досліджень та ухвалені

міжнародною службою геодинамічного моніторингу – IGS. Додатково, всі GNSS-приймачі повинні відповідати чинним стандартам щодо геодезичного забезпечення при визначенні координат та висот [171, 172] у статичному режимі, а саме:

- можливість спостережень на частотах L1 та L2 та більше;
- наявність не менше 24 каналів у GNSS-приймачі;
- відстань між пунктами від 1 км до 30 км;
- тривалість сесії від 30 хв до 120 хв;
- постійне приймання сигналу від більш ніж чотирьох супутників;
- інструментальна точність на рівні $3\text{мм} + 1 * 10^{-6}D$ або на рівні величини у $5\text{мм} + 1 * 10^{-6}D$.

При кінематичному зніманні, довжину бази можна збільшувати до 100 км, але інструментальна точність не повинна перевищувати величини у $3\text{мм} + 1 * 10^{-6}D$ з урахуванням сигналу від мінімум п'яти супутників. Поза тим, для приймачів також потрібно щорічно проводити метрологічну перевірку в Укрметртестстандарті й мати міжнародний сертифікат відповідності.

Для забезпечення надійності результатів GNSS-спостережень необхідно усунути або максимально послабити вплив наявних перешкод [213]. Якщо пункт знаходиться у несприятливих умовах для спостережень, і вплив перешкод уникнути повністю не вдається, то на такому пункті проводять багаторазові сеанси спостережень. Разом з тим, з такого пункту слід визначити декілька базових ліній, тобто виконувати одночасно спостереження на двох-трьох суміжних пунктах. Однак, такий процес вимагає залучення додаткових ресурсів, зокрема наявності ще кількох приймачів та виконавців спостережень.

Сучасні можливості GNSS-систем дозволяють використовувати, як суміжні пункти – референсні GNSS-станції наявної мережі, які додатково слугують, як контрольні пункти при опрацюванні результатів спостережень

[216, 208]. Така методика уможливує здійснення прив'язки роверних пунктів до мережі активних референцних GNSS-станцій без втрати загальної точності та без залучення додаткових ресурсів. Тобто, в такому випадку GNSS-станції слугують як базові пункти при відносному методі спостережень. При цьому, головними умовами GNSS-спостережень для пунктів-роверів є:

- забезпечення тривалості сесії від двох та більше годин;
- розташування роверного пункту на достатньо відкритій місцевості;
- підтримка безперебійних GNSS-спостережень під час тривалості сесії;
- наявність мінімум трьох референцних GNSS-станцій навколо роверного пункту в радіусі 100 км.

На основі методики постопрацювання даних GNSS-спостережень із безпосередньою прив'язкою до мережі GNSS-станцій можна отримати точність визначення координат на рівні 1-2 см та значною мірою спростити процес польових робіт.

Відносний метод GNSS-спостережень має низку переваг перед звичайними наземними геодезичними вимірами, зокрема:

- міліметрова точність визначення базових ліній;
- забезпечення вимірів незалежно від погодних умов;
- незалежність від взаємної видимості між пунктами;
- автоматизоване опрацювання результатів спостережень;
- мінімальні затрати часу, фінансів та інших ресурсів, зокрема кількості виконавців робіт.

Невеликим недоліком відносного методу є те, що помилки просторової кореляції будуть збільшуватися з відстанню між приймачами. Це явище відбувається в результаті того, що сигнали того самого супутника перетинають різні частини атмосфери [74]. Тому, відстань між роверними та базовими пунктами слід обмежити в межах 100 км.

Результати GNSS-вимірів, отримані відносним методом у статичному режимі підлягають обов'язковому математичному опрацюванню. Таке опрацювання передбачає три етапи: польові обчислення, попередні обчислення, врівноваження обчислених результатів (камеральні обчислення). При цьому, програмне забезпечення для математичного опрацювання GNSS-вимірів на комп'ютерах повинно бути сертифікованим та мати надійні та високі технічні показники [187].

2.3. Загальні принципи опрацювання даних GNSS-спостережень

Для постопрацювання результатів GNSS-вимірів існує два види програмного забезпечення (ПЗ):

- 1) стандартне інженерне;
- 2) спеціальне наукове.

Програмні інженерні та наукові пакети можуть бути комерційними та некомерційними. Наукове ПЗ здебільшого використовують для опрацювання мережевих спостережень на базі постійних GNSS-станцій та для високоточних наукових досліджень. Наукові ПЗ є досить складними в користуванні, особливо для непідготовлених користувачів. Крім того, для використання наукового програмного забезпечення, комп'ютерна техніка повинна мати потужні технічні характеристики. Для вирішення прикладних геодезичних завдань, тобто для опрацювання польових вимірів, зазвичай використовують інженерні програмні пакети.

Більшість виробників GNSS-приймачів розробляють своє власне програмне забезпечення для опрацювання супутникових спостережень. Основною умовою при цьому є те, що різні програмні пакети мають спільні блоки аналізу інформації, що є дуже зручним для користувачів. Разом з цим, всі види програмного забезпечення уможливають завантаження даних в уніфікованому форматі RINEX. Кожен програмний пакет містить кілька основних розділів, що відповідають за певний набір функцій. На рисунку 2.4

наведено загальну блок-схему принципу опрацювання GNSS-вимірів у будь-якому стандартному інженерному пакеті.

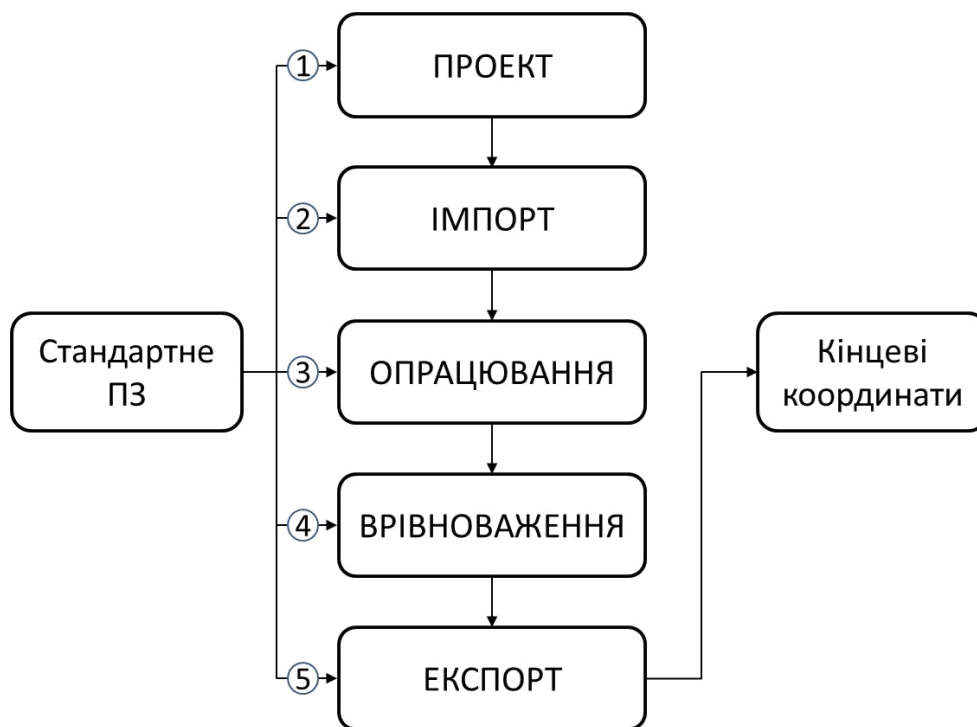


Рисунок 2.4 - Загальна блок-схема опрацювання GNSS-спостережень в інженерному програмному пакеті

Блок <Проект> відповідає за ввід інформації щодо назви проекту, параметрів точності GNSS-спостережень та взаємного врівноваження координат пунктів, різновиду первинної системи координат, параметрів трансформації або перетворення для кінцевої системи координат тощо.

У блоці <Імпорт> здійснюють завантаження всіх необхідних даних для процесу опрацювання супутникових спостережень, а саме:

- файлів польових вимірів (обсерваційні файли);
- файлу із даними про положення, швидкість і час для сузір'їв супутників на дату спостережень (навігаційний файл) ;
- файлу із точними ефемеридами;
- файлів спостережень на пунктах із відомими координатами або просто файлів вимірів найближчих GNSS-станцій.

Також у цьому блоці можна ввести уточнені координати контрольних пунктів, або ж зробити це у розділі <Опрацювання>. На цьому етапі слід звірити інформацію відтворену за даними завантажених файлів із записами польового журналу спостережень та за необхідності виконати її коригування. Першочергово це стосується перевірки наявності всіх вимірів, назв пунктів GNSS-спостережень, значення висоти антен, типів варіацій фазових центрів та елементів їхнього приведення.

Після імпорту даних, у блоці <Опрацювання> виконується обчислення усіх базисних ліній, тобто векторів, що утворюються при синхронних спостереженнях між всіма залученими базовими та роверними пунктами. При цьому, для базисних ліній обчислюються диференціальні поправки, що уможливорює подальше уточнення їхніх довжин. Такі поправки залежать від кількості спостережуваних супутників, від неперервності спостережень, від якості видимості супутників та від багатьох інших факторів. За відкоригованими базисами відбувається обчислення приростів координат усіх можливих варіантів векторів-баз. Перед запуском процесу опрацювання файлів необхідно уточнити інформацію щодо інтервалу спостережень, режиму опрацювання, вибору сузір'я супутників (одного або декількох), зазначити модель поправок іоносфери та тропосфери, кута відсічки даних тощо.

У блоці <Врівноваження> відбувається процес уточнення всієї введеної інформації для отримання точних значень координат за даними опрацьованих базисних ліній та приростів координат. Загалом існує можливість обрати поміж двох варіантів врівноваження даних GNSS-спостережень: 1) вільне врівноваження та 2) строге врівноваження. При врівноваженні “вільної” мережі проводиться внутрішнє узгодження всіх векторів-баз між всіма залученими пунктами та станціями. Під час процесу врівноваження “строгої” мережі, узгодження базисних ліній виконується відносно фіксованого контрольного пункту (або GNSS-станції). При цьому контрольних пунктів може бути кілька. Також у цьому блоці можна

відредагувати координати контрольних станцій, або ж змінити позначки щодо їхньої кількості, вказати абсолютну та відносну точність врівноваження базисних ліній, а також задати параметри виводу звіту кінцевих результатів. Приклад процесу врівноваження мережі у стандартному програмному пакеті наведено на рисунку 2.5.

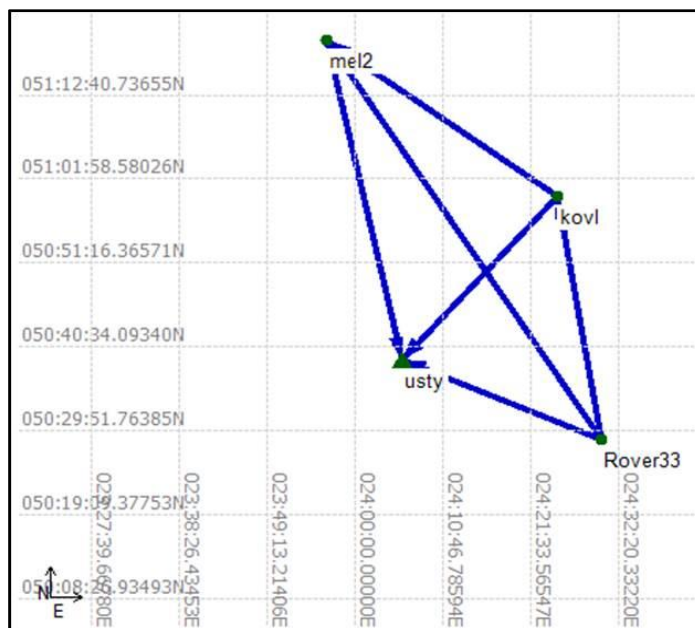


Рисунок 2.5 - Принцип врівноваження GNSS-спостережень в стандартному програмному забезпеченні

На рисунку 2.5, зображено один із варіантів врівноваження GNSS-спостережень у стандартному ПЗ, а саме:

- один роверний пункт <Rover33>, тобто пункт координати якого потрібно отримати з опрацювання GNSS-спостережень;
- одну контрольну GNSS-станцію <usty>, для якої потрібно ввести уточнені координати;
- дві найближчі станції <mel2> та <kovl> для можливості отримання координат пункту <Rover33> із врівноваження умовної GNSS-мережі.

Якщо дані GNSS-спостережень міститимуть грубі помилки, то у результаті врівноваження мережі такі пункти та похідні від них базисні вектори засвітяться червоним кольором. Це свідчить про те, що файли цих

спостережень слід вилучити з постопрацювання даних. За необхідності можна повторити спостереження на відповідних пунктах та опрацювати їх окремо.

Після процесу врівноваження даних використовують блок <Експорт>, де можна зберегти отримані результати у файлі зі зручним для користувача розширенням.

Як правило, всі стандартні інженерні програми додатково надають можливість щодо виконання планування спостережень, трансформації або перетворення між системами координат, автоматичного завантаження файлів ефемерид із серверів відповідних служб, конвертування файлів спостережень у формат RINEX та графічного зображення результатів тощо.

Основною метою функції планування спостережень є вибір оптимального інтервалу часу виконання GNSS-вимірів (вікно спостережень) з достатньою кількістю спостережуваних супутників, з надійним показником DOP і з урахуванням впливу перешкод навколо пункту спостережень. За допомогою функції планування GNSS-спостережень можна віддалено здійснити “рекогностування” пунктів, а саме:

- змоделювати схему перешкод на пунктах;
- обчислити й графічно вивести на екран траєкторії проходження супутників над заданими пунктами із можливістю відображення номерів супутників;
- обчислити й графічно зобразити кількість видимих і доступних супутників на заданий момент (інтервал) часу;
- обчислити та показати графік показника DOP, який дозволить вибрати оптимальний час та тривалість спостережень.

Також в останні роки для постопрацювання супутникових спостережень досить популярними стали так звані онлайн-сервіси. Принцип роботи онлайн-сервісів полягає у тому, що користувач може надіслати свої файли спостережень у форматі RINEX через інтернет-службу та отримати результат постопрацювання цих вимірів безпосередньо знаходячись в

польових або камеральних умовах. Зазвичай час опрацювання даних займає 5-30 хвилин, а результат надсилається на електронну пошту у текстовому документі [47]. Однак недоліком онлайн-сервісів можна вважати те, що не всі версії форматів RINEX доступні для постопрацювання. Також точність отриманих результатів буде невисокою, якщо виконувати постопрацювання відразу в польових умовах, оскільки онлайн-сервіси використовують дані швидких ефемерид. Надання послуг онлайн-сервісів здійснюється оператором GNSS-мережі в якій зареєстрований користувач і як правило є безоплатним. Для незареєстрованих користувачів ця послуга зазвичай платна.

У результаті стандартного постопрацювання GNSS-спостережень у файлі кінцевого звіту, користувач отримує інформацію про короткий опис параметрів створеного проекту, абсолютну та відносну точність врівноваження кожної базисної лінії, точність отриманих просторових та еліпсоїдних координат. Якщо результати отримані у звіті не задовольняють вимоги точності поставлених завдань, то процес опрацювання повторюють з іншими налаштуваннями проекту. Коли результати відповідатимуть заданій точності поставлених наукових або інженерних завдань, лише тоді можна використовувати отримані врівноважені координати для подальших досліджень. Зокрема, при використанні GNSS-нівелювання для визначення висот точок фізичної поверхні Землі, точність отримання еліпсоїдних висот з опрацювання даних супутникових спостережень має вагоме значення.

2.4. Точність визначення еліпсоїдних висот із GNSS-спостережень

З численних наукових досліджень щодо використання методу GNSS-нівелювання виявлено, що похибкою еліпсоїдних висот здебільшого нехтують [107, 160, 36]. Проте, фактично така похибка є результатом усіх помилок, пов'язаних зі GNSS-вимірами, яка повністю не вилучається під час опрацювання спостережень у програмному забезпеченні [17, 59]. Крім того, еліпсоїдна висота, а отже і її похибка, є однією зі складових при обчисленні

нормальних (чи ортометричних) висот на основі методу GNSS-нівелювання. Як зазначалося у розділі 1.2.2, другою складовою є модельна висота квазігеоїда або геоїда відповідно.

Нехтування похибкою еліпсоїдної висоти пояснюється тим, що похибка будь-якої математичної моделі глобального чи регіонального геоїда (і квазігеоїда – регіонального чи локального) зазвичай перевищує похибку еліпсоїдної висоти. Однак, якщо похибка моделі геоїда або квазігеоїда матиме такий самий рівень точності, як і похибка отриманих еліпсоїдних висот, то вплив останньої не слід ігнорувати [220]. Таким чином, критично важливо дослідити всі аспекти, що впливають на точність визначення висот за допомогою методу GNSS-нівелювання.

Ортометричні або нормальні висоти, отримані із результатів GNSS-нівелювання будуть завжди визначені з певними похибками [49]. Оцінити величину таких похибок можна лише на пунктах нівелірних мереж високих класів точності або на робочих еталонах [211]. Характер зміни похибки ортометричної ($m_{H_G^O}$) або нормальної ($m_{H_G^Y}$) висоти залежить від точності, з якою отримують еліпсоїдну висоту (m_H), а також від точності, з якою реалізована наявна модель геоїда (m_{N_m}) або квазігеоїда (m_{ζ_m}), тоді:

$$m_{H_G^O}^2 = m_H^2 + m_{N_m}^2 \quad (2.1)$$

$$m_{H_G^Y}^2 = m_H^2 + m_{\zeta_m}^2 \quad (2.2)$$

Для стінних реперів та марок в похибку визначення ортометричних або нормальних висот методом GNSS-нівелювання буде входити ще похибка за перевищення (m_h):

$$m_{H_G^O}^2 = m_H^2 + m_{N_m}^2 + m_h^2 \quad (2.3)$$

$$m_{H_G^Y}^2 = m_H^2 + m_{\zeta_m}^2 + m_h^2 \quad (2.4)$$

В цьому випадку, похибка за перевищення походить від результату передачі висоти методом геометричного нівелювання з тимчасового пункту спостережень на стінний нівелірний знак (див. розділ 1.2.2).

Розглянемо випадок впливу похибки еліпсоїдних висот на загальну точність визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання. Для цього візьмемо до уваги 17 значень нормальних висот (H^v) з каталогів нівелювання I – II класу, що розташовані у м. Львів та прилеглих територіях (рисунок 2.6) та еліпсоїдних висот отриманих із даних GNSS-спостережень на цих пунктах. Загалом серед всіх залучених пунктів: 12 пунктів це стінні репери, а 5 – ґрунтові.

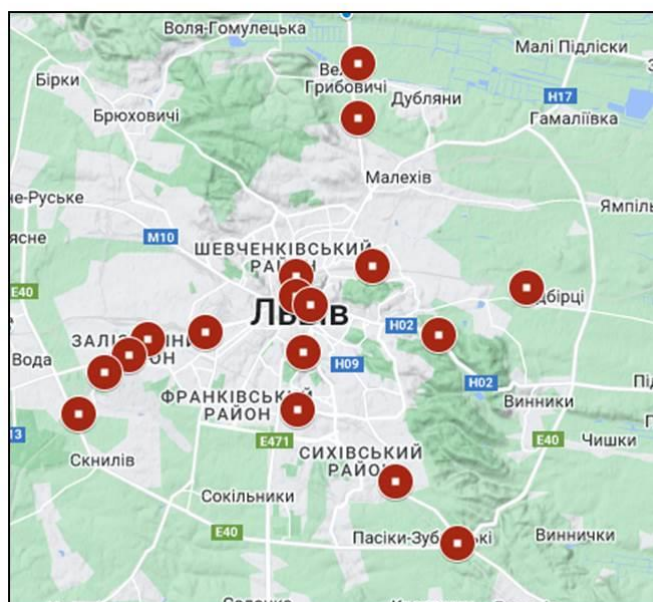


Рисунок 2.6 – Схема розташування пунктів високоточного геометричного та GNSS-нівелювання

Крім того, дані GNSS-спостережень виконано у двох режимах: *<Static>* (статичний) та в *<RTK>* (режим реального часу). Для RTK-вимірів поправки отримано від перманентної станції SULP з максимальним базис-вектором до 10 км. Дані статичних спостережень опрацьовано в інженерному програмному пакеті Tersus Geomatics Office (TGO) в якому визначено врівноважені еліпсоїдні координати (B, L) та еліпсоїдну висоту (H) для

кожного пункту [147, 146]. На основі еліпсоїдної широти (B) та довготи (L) отримано висоти геоїда/квазігеоїда (N_m), як функцію аномалій висот з моделі EGM08 для всіх пунктів, тобто прийmemo що $N_m = \zeta_m$.

Перетворимо вираз (2.2) та (2.4) на рівняння вигляду:

$$m_H^2 + m_{N_m}^2 - m_{H_G}^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$m_H^2 + m_{N_m}^2 + m_h^2 - m_{H_G}^2 = 0 \quad (2.6)$$

Якщо у формулах (2.5-2.6) замість значення m_{H_G} підставити значення похибки нормальної висоти, що отримана методом високоточного геометричного нівелювання $m_{H\gamma}$, то отримаємо нерівність:

$$m_H^2 + m_{N_m}^2 - m_{H\gamma}^2 \neq 0 \quad (2.7)$$

$$m_H^2 + m_{N_m}^2 + m_h^2 - m_{H\gamma}^2 \neq 0 \quad (2.8)$$

Тоді, похибку визначення нормальної висоти пункту методом GNSS-нівелювання можна представити, як суму всіх похибок та знайти із таких формул:

- для ґрунтових реперів

$$\Delta^2 = m_H^2 + m_{N_m}^2 + m_{H\gamma}^2 \quad (2.9)$$

- для стінних реперів

$$\Delta^2 = m_H^2 + m_{N_m}^2 + m_h^2 + m_{H\gamma}^2 \quad (2.10)$$

Похибка (Δ), називається загальною, тому що вона не виокремлює похибку визначення нормальних висот із високоточного геометричного нівелювання ($m_{H\gamma}$), похибку еліпсоїдних висот (m_H) із GNSS-спостережень та похибку модельних висот геоїда/квазігеоїда (m_{N_m}). Однак, в такому випадку похибку визначення нормальної висоти з високоточного геометричного нівелювання слід прирівняти до нуля тому, що визначити її можна лише шляхом повторного високоточного нівелювання на пунктах

нівелірної мережі I – II класів. Похибку передачі висоти методом геометричного нівелювання з тимчасового пункту GNSS-спостережень на стінний репер можна прийняти в 1 мм.

У загальному, точність GNSS-спостережень може складати кілька сантиметрів у статичному режимі [88] та приблизно вдвічі більше в режимі RTK [193]. Зважаючи на це, за похибку еліпсоїдних висот можна прийняти стандартне відхилення масиву даних GNSS-спостережень проведених на 17 пунктах високоточного геометричного нівелювання. Для цього потрібно виокремити дані спостережень за принципом “вид знаку – режим спостережень”, щоб утворилися умовні GNSS-мережі (рисунк 2.7):

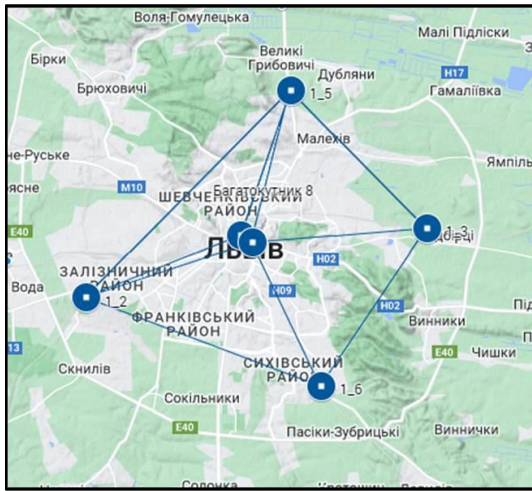
- мережа 1, зі стінних реперів в режимі статички (Static/ст. рп.);
- мережа 2, зі стінних реперів в режимі реального часу (RTK/ст. рп.);
- мережа 3, із ґрунтових реперів в режимі статички (Static/гр. рп.).

Відстань між суміжними пунктами першої GNSS-мережі не перевищує 10 км, для другої знаходиться в межах 5 км, а для третьої складає до 15 км.

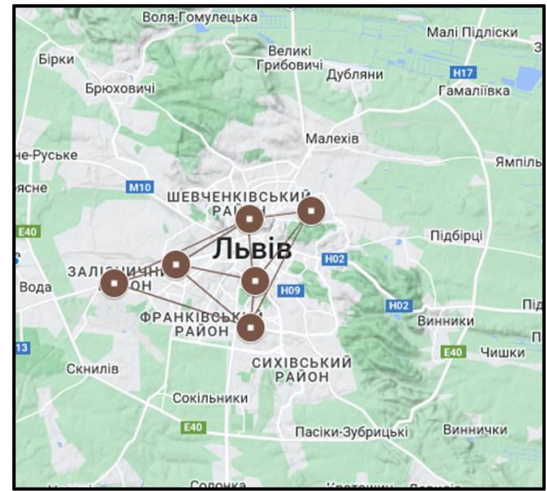
За результатами досліджень [217] систематична складова похибки висот геоїда/квазігеоїда моделі EGM2008 щодо даних високоточного геометричного нівелювання для території радіусом 15 км навколо станції Sulp складає 6 см, а стандартне відхилення 1.8 см. Однак, похибка визначення еліпсоїдної висоти та геометричного перевищення на стінному репері змінюється на кожному пункті індивідуально.

Встановити вплив похибок визначення еліпсоїдних висот на загальний результат визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання можна якщо GNSS-спостереження на пунктах проводили майже за однакових умов як-от:

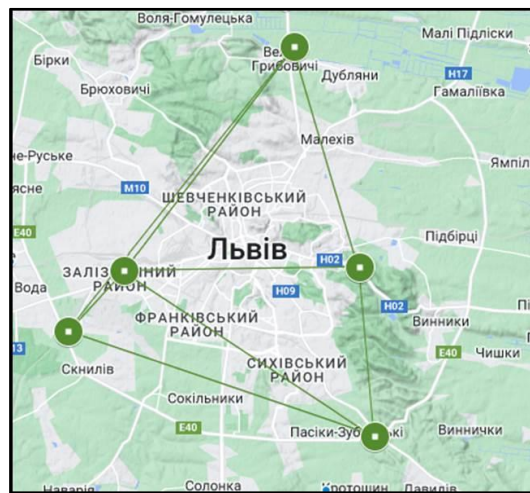
- віддаленість від контрольної станції;
- тип приймача;
- режим спостережень;
- тривалість сесії (кількість вимірів).



а) GNSS-мережа №1



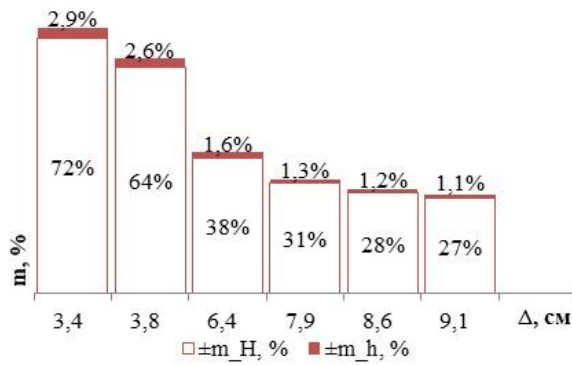
б) GNSS-мережа №2



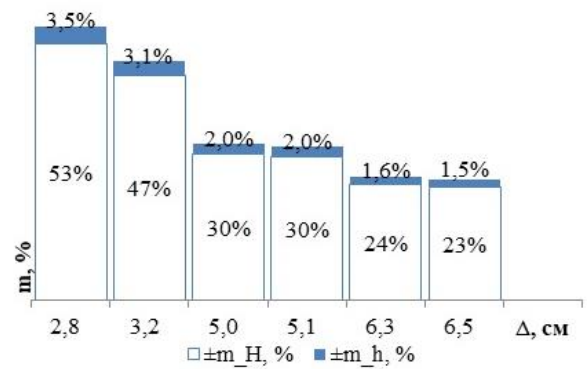
в) GNSS-мережа №3

Рисунок 2.7 - Умовні GNSS-мережі

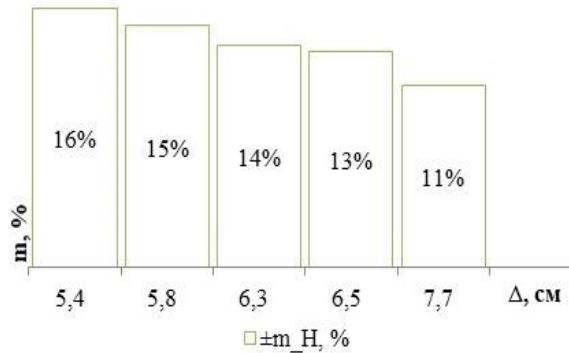
Таким чином, стандартне відхилення усіх пунктів разом або окремих груп пунктів умовних GNSS-мереж вказуватиме на точність визначення еліпсоїдних висот. Водночас із відношення похибки еліпсоїдних висот (m_H) та похибки визначення перевищення (m_h) до загальної похибки (Δ) можна виявити їхній вплив на кінцевий результат. На рисунку 2.8, у процентах показано вплив таких похибок для кожної утвореної GNSS-мережі окремо для кожного пункту.



а) на стінних реперах в режимі статики



б) на стінних реперах в режимі RTK



в) на ґрунтових реперах в режимі статики

Рисунок 2.8 - Вплив похибок еліпсоїдних висот на загальну точність методу GNSS-нівелювання

Як видно з рисунка 2.8а-б, похибка за перевищення змінюється на рівні $\pm 1,1\% \leftrightarrow \pm 3,5\%$, що відповідає 1-2 мм, а отже нею можна знехтувати. Зокрема, вплив похибки еліпсоїдної висоти може сягати:

- а) $\pm 27\% \leftrightarrow \pm 72\%$ для умови *<Static/cm. pn.>*;
- б) $\pm 23\% \leftrightarrow \pm 53\%$ для умови *<RTK/cm. pn.>*;
- в) $\pm 11\% \leftrightarrow \pm 16\%$ для *<Static/rp. pn.>*.

Як відомо, шляхом багаторічних спостережень на базі перманентних та референцних станцій отримують уточнені еліпсоїдні координати та висоту [206]. Якщо, висота антени таких GNSS-станцій ув'язана з традиційною системою висот наявної нівелірної мережі, то для них також можна виявити вплив відповідних похибок. Зазвичай GNSS-станції розташовані на дахах будівель, тому прив'язку центрів їхніх антен до наявної висотної мережі здійснюють класичними методами, наприклад тригонометричним нівелюванням.

Оскільки усі утворені умовні GNSS-мережі стосуються станції SULP, як контрольної, то для самої станції також можна визначити вплив відповідних похибок. На рисунку 2.8, зображено вплив похибки визначення еліпсоїдної висоти для станції SULP, а також вплив похибки передачі висоти методом тригонометричного нівелювання.

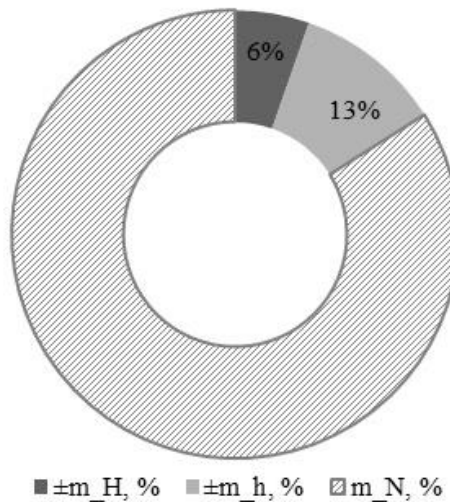
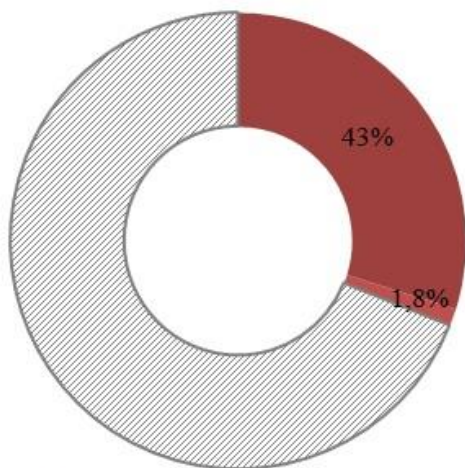


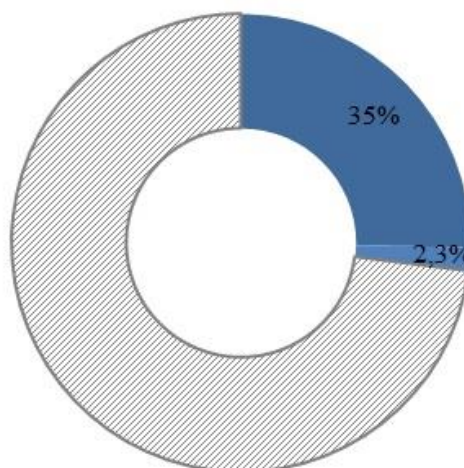
Рисунок 2.9 - Вплив похибки еліпсоїдної висоти та передачі висоти методом нівелювання на станції SULP

З рисунка 2.9, видно, що похибка визначення еліпсоїдної висоти становить 6% та є меншою в середньому на 5-10% від результатів статичних спостережень на ґрунтових реперах. Разом з тим, похибка за перевищення дорівнює 13%, оскільки передачу нормальної висоти з нівелірного пункту на станцію здійснювали методом тригонометричного нівелювання. Навіть за таких умов, сумарний вплив цих похибок не перевищує 19%, що відповідає точності умовної GNSS-мережі <Static/Гр. рп.>. Фактично, такий результат можна вважати певним орієнтиром при оцінці загальної похибки визначення нормальних висот точок фізичної поверхні Землі методом GNSS-нівелювання. Тобто, якщо стандартне відхилення похибки висот на нівелірному пункті менше від загальної похибки в межах 20%, то результат можна вважати, таким, що лежить в надійному інтервалі. У цей же спосіб можна оцінити вплив усередненої похибки визначення еліпсоїдних висот за результатами відповідних умовних мереж, як зображено на рисунку 2.10.



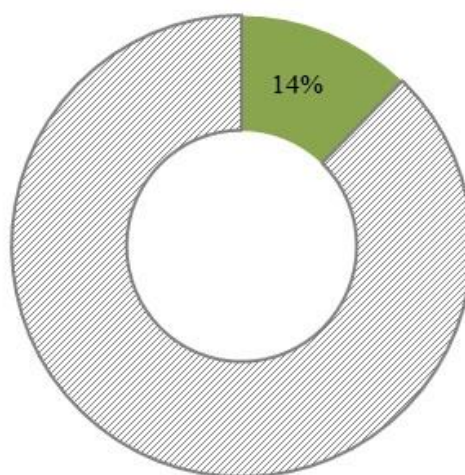
■ ±m_H, % ■ ±m_h, % ▨ m_N, %

а) GNSS-мережа 1, умова <Static/ст. рп.>



■ ±m_H, % ■ ±m_h, % ▨ m_N, %

б) GNSS-мережа 2, умова <RTK/ст. рп.>



■ ±m_H, % ▨ m_N, %

в) GNSS-мережа 3, умова <Static/рп. рп.>

Рисунок 2.10 - Вплив похибок умовних GNSS-мереж на загальну точність GNSS-нівелювання

За даними рисунка 2.10в, бачимо, що похибка еліпсоїдної висоти для GNSS-спостережень на ґрунтових реперах в статичному режимі коливається до 14%, що приблизно дорівнює 1 см від загальної похибки. У випадку стінних реперів усереднена похибка GNSS-вимірювань у статичному режимі (див. рис. 2.10а) становить 43%, або 2.9 см відповідно. Різниця похибок еліпсоїдних висот на стінних і ґрунтових реперах у 29% пов'язана із впливом навколишніх умов в яких знаходяться пункти. Наприклад, наземні реperi здебільшого розташовані на околицях міста Львова (або на відкритій частині місцевості серед міста), що дає їм максимально “відкрите небо”. Стінні ж

репери зосереджені в щільно забудованих міських районах із високим рівнем як пішохідної, так і автомобільної активності. Звідси слідує, що умови проведення GNSS-спостережень мають великий вплив на точність визначення похибки еліпсоїдної висоти [220, 210].

У результаті GNSS-вимірів в RTK-режимі, похибка еліпсоїдної висоти може сягати $\pm 35-37\%$, тобто буде меншою у порівнянні зі статикою на стінних реперах (див. рис. 2.10а-б). Режим реального часу теж чутливий до таких випадкових факторів як: кількість супутників, якість інтернет-з'єднання, багатошляховість сигналу тощо. Проте, висока точність поправок від мережі опорних GNSS-станцій дозволяє отримати фіксовані розв'язки за лічені хвилини для 8-10 вимірювань навіть в умовах міста. З огляду на це іноді більш прийнятним є використання режиму RTK, а не статичного, для визначення еліпсоїдних висот пункту розташованого в населеному пункті. Однак, при визначенні нормальної висоти в RTK-режимі, точність результатів буде значно гіршою, оскільки такий підхід передбачає використання наявної моделі висот квазігеоїда. На рисунку 2.11, наведено усереднені статистичні характеристики визначення еліпсоїдної висоти для умовно сформованих GNSS-мереж.

Статистики з рисунка 2.11, свідчать, що вплив похибки визначення еліпсоїдних висот у середньому може складати 2-19% в статичному режимі та до 12% в режимі реального часу. Звідси бачимо, що логічно-послідовне зниження точності вимірів за принципом: 1) *<Static/tp. pn.>*; 2) *<Static/cm. pn.>*; 3) *<RTK/cm. pn.>*, не прослідковується. Вплив похибки на стінних реперах у статичному режимі на 17% нижчий, ніж на ґрунтових, при цьому спостереження на цих пунктах виконували однаковими приймачами.

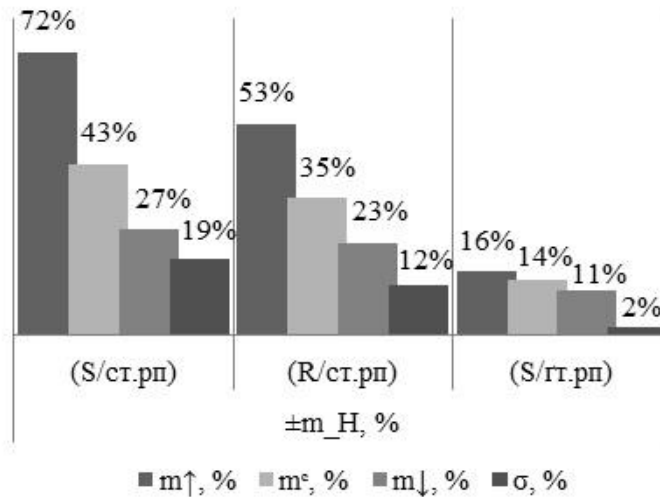


Рисунок 2.11 - Статистичні характеристики похибок еліпсоїдних висот для трьох умовних GNSS-мереж

Для чіткішого виявлення чинників, що спричинили ситуацію отриману за даними рисунку 2.11 потрібно виконати додаткову оцінку точності. Для цього пункти потрібно розділити, як зображено в таблиці 2.2, після чого виконати повторне оцінювання похибок шляхом комбінування даних різних GNSS-мереж.

Таблиця 2.2

Комбінування даних умовних GNSS-мереж

Тип комбінування GNSS-мереж	Режим спостережень	Тип пункту	Загальна кількість пунктів	Позначення категорії даних
1+2	Static+RTK	ст. рп.+ ст. рп.	12	\Sc+R\
2+3	RTK+Static	ст. рп.+гр. рп.	11	\R+Sr\
1+3	Static+Static	ст. рп.+гр. рп.	11	\Sc+Sr\
1+2+3	Static+RTK+Static	ст. рп.+ ст. рп.+ гр. рп.	17	\Sc+R+Sr\

На рисунку 2.12, наведено результати оцінювання похибок еліпсоїдних висот на основі статистичних характеристик комбінованих даних. На графіках рисунка 2.12 видно, що категорії \Sc+R\ та \Sc+R+Sr\ мають максимальні значення на рівні 65-75%, мінімальні 20-23%, а середні складають 35-43% зі стандартним відхиленням в 13-17%. Така ситуація вказує на те, що в наборі таких даних переважають максимальні та

мінімальні значення, які погано корелюють між собою. Дані категорій $\backslash Sc+Sr \backslash$ та $\backslash R+Sr \backslash$ за величиною різняться на 1-2%, при цьому максимум дорівнює $\pm 51-53\%$, мінімум $\pm 19-20\%$, а середнє і стандартне відхилення на рівні $\pm 28-31\%$ та $\pm 10-11\%$, відповідно.

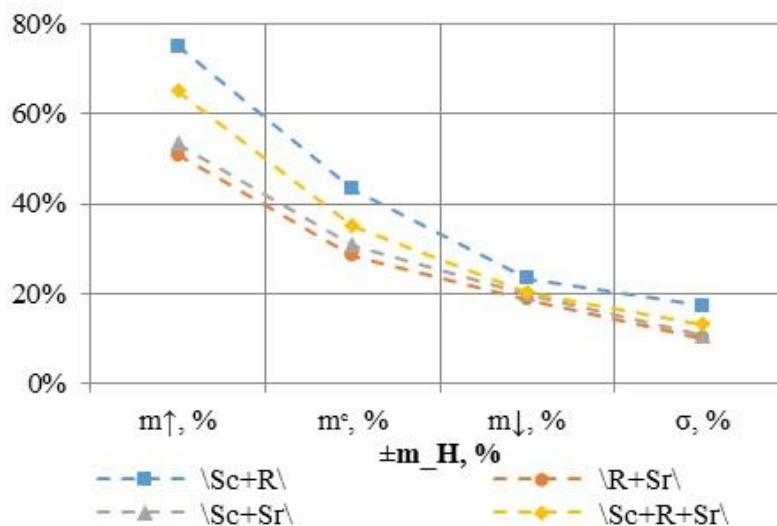


Рисунок 2.12 - Статистичні характеристики комбінованих даних GNSS-мереж

Результати рисунка 2.12 також свідчать, що шляхом комбінування даних умовних GNSS-мереж, похибки еліпсоїдних висот добре узгоджуються між собою. З отриманих результатів слідує, що для забезпечення точності похибки визначення еліпсоїдних висот на рівні 1-2 см, потрібно забезпечити хорошу якість умов GNSS-спостережень. При недотриманні належних умов така похибка матиме неоднозначний характер зміни, що призведе до накопичення випадкових похибок у точність визначення нормальних висот методом GNSS-нівелювання навіть для невеликих територій.

Висновки до розділу 2

1. Здійснено детальний огляд основних помилок GNSS-спостережень, що впливають на точність отримання кінцевих координат, зокрема еліпсоїдних висот. Наведено теоретичні відомості щодо можливості усунення або мінімізації впливу основних джерел похибок на результати GNSS-вимірів.

2. Розглянуто принципи абсолютного та відносного методів GNSS-спостережень та можливості їхнього використання для отримання координат та висот. Наведено наявні інструктивні вимоги щодо методики проведення GNSS-спостережень відносним методом на базових та роверних пунктах, які доповнено власними рекомендаціями для спрощення процесу вимірювань зі збереженням точності.

3. Описано основні етапи опрацювання GNSS-спостережень у стандартних програмних пакетах для отримання координат та висот. Наведено загальні принципи використання різних блоків опрацювання даних для забезпечення надійного рівня точності кінцевих результатів.

4. Проаналізовано точність еліпсоїдних висот щодо нормальних висот отриманих за даними GNSS-нівелювання для різних методів GNSS-спостережень та типів нівелірних пунктів. Досліджено вплив похибки еліпсоїдних висот на загальну похибку визначення висот методом GNSS-нівелювання. На основі проведеного аналізу встановлено, що мінімальний вплив похибки еліпсоїдних висот на результати GNSS-нівелювання буде при виконанні GNSS-спостережень відносним методом в режимі статички на ґрунтових реперах з інтенсивністю впливу у 2%. Для статичних спостережень на стінних реперах вплив такої похибки може сягати 19%, а для режиму RTK приблизно 12%. При цьому найбільш важливим фактором зміни точності похибки еліпсоїдних висот слід вважати ефект багатопляховості та видимості супутників (ефект “закритого/відкритого” неба).

РОЗДІЛ 3. ОЦІНКА ТОЧНОСТІ МОДЕЛЬНИХ ВИСОТ ГЕОЇДА/КВАЗІГЕОЇДА ЗА ДАНИМИ ВИСОКОТОЧНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ТА GNSS-НІВЕЛЮВАННЯ

3.1. Класифікація математичних моделей геоїда та квазігеоїда

Для геодезії представлення параметрів глобального поля сили тяжіння Землі у вигляді математичних моделей має вкрай вагомe значення для наукових та прикладних задач. Однією із важливих цілей геодезії є визначення висот точок фізичної поверхні Землі з високою точністю. В останні десятиліття дуже багато наукових зусиль спрямовано на вирішення такого роду завдання за допомогою методу GNSS-нівелювання. Як було показано у першому розділі, отримати ортометричну чи нормальну висоту на основі цього методу можна лише за наявності відомих значень висот геоїда або квазігеоїда. Сьогодні такі висоти можуть бути обчислені з наявної математичної моделі таких висот.

У загальному розумінні математичні моделі геоїда та квазігеоїда класифікують за масштабом та типом даних, які використані при їхньому моделюванні. Для наочного сприйняття на рисунку 3.1 показано власний варіант блок-схеми щодо загальноприйнятої класифікації моделей геоїда та квазігеоїда.

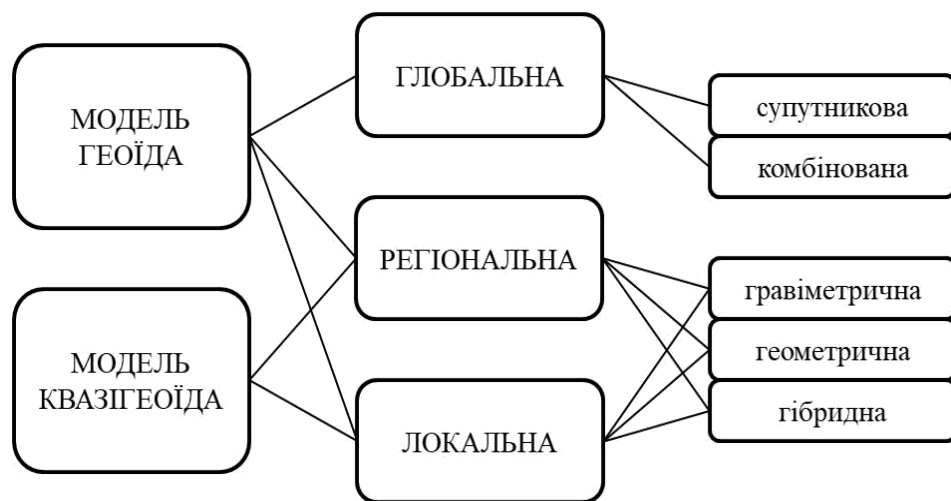


Рисунок 3.1 – Загальна класифікація моделей геоїда та квазігеоїда

З рисунка 3.1, бачимо, що модель геоїда може бути виражена у глобальному, регіональному та локальному масштабах, а модель квазігеоїда лише у регіональному й локальному. Разом з тим, сучасні глобальні моделі геоїда можуть бути супутниковими або комбінованими [123], а регіональні та локальні моделі геоїда та квазігеоїда поділяють на гравіметричні, геометричні та гібридні [126].

Глобальні супутникові моделі охоплюють інформацію отриману зі спеціальних супутникових місій та із даних спостережень пасивних супутників. Комбіновані моделі додатково включають інформацію про динамічну топографію океанічної поверхні (DOT – Dynamic Ocean Topography), про висоти морської поверхні (SSH – Sea Surface Heights), про усереднений рівень моря (MSL – Mean Sea Level), про топографію фізичної поверхні Землі (рельєф) та про наземні виміри, що пов’язані з гравітаційним полем Землі тощо.

Супутникові моделі мають обмежену роздільну здатність через послаблення гравітаційного сигналу висотою орбіти [114], тому такого роду моделі можуть бути обчислені максимально до 330 ступеня/порядку. Вищої роздільної здатності досягають лише при залученні різного роду наземних даних, і сьогодні максимальна роздільна здатність моделей глобального масштабу відповідає 5540 ступеня/порядку розкладу в ряд сферичних коефіцієнтів [167]. Величину ступеня/порядку глобальних моделей Землі використовують з метою обчислення їхньої роздільної здатності через наближені формули для градусного та метричного представлення:

$$\frac{\lambda_{min}}{2} \approx \frac{180^\circ}{n_{max}} \quad (3.1)$$

$$\psi_{min} = \frac{\pi R}{n_{max}} \approx \frac{20000km}{n_{max}} \quad (3.2)$$

де $\frac{\lambda_{min}}{2}$ – роздільна здатність в градусній мірі, ψ_{min} – роздільна здатність у метричній мірі; n_{max} – ступінь обчислення моделі; R – радіус Землі.

В таблиці 3.1 наведено кілька прикладів супутникових та комбінованих глобальних моделей геопотенціалу та відповідні їм характеристики.

Таблиця 3.1

Характеристики деяких глобальних моделей геопотенціалу

Характеристика моделі						Тип даних						
Тип	Назва	Рік	Ступінь/ порядок	Роздільна здатність		альтиметричні	супутникові	наземні	топографічні	спеціальні	спеціальні місця	Модель геопотенціалу
				км	хв'							
Комбіновані	XGM2019e	2019	5540	~4 км	~2'	+	-	+	+	-	+	
	SGG-UGM-1	2018	2159	~9 км	~5'	-	-	-	-	+	+	
	EIGEN-6C3stat	2014	1949	~10 км	~6'	+	-	-	-	+	-	
	GOCO05c	2016	720	~14 км	~15'	+	+	+	-	-	-	
	EGM96	1996	360	~28 км	~30'	+	-	+	-	-	+	
Супутникові	GO_CONS_GCF_2_SPW_R5	2017	330	~56 км	~33'	-	-	-	-	+	-	
	GOCO06s	2019	300	~61 км	~36'	-	+	-	-	-	-	
	GGM01S	2003	120	~83 км	~1,5°	-	-	-	-	+	-	
	GRIM4s4	1995	70	~167 км	~2,6°	-	+	-	-	-	-	
	GEM9	1977	30	~333 км	~6°	-	+	-	-	-	-	

Як видно з даних таблиці 3.1, максимальна роздільна здатність глобальної моделі XGM2019e складає 2' (або ~4 км). Це означає, що з такої моделі можна отримати будь-яку величину пов'язану з гравітаційним полем Землі на сітці з кроком 2' × 2'. Відповідно всі величини моделей 2159 (або ж 2190) ступеня/порядку можуть бути обчислені на сітці з кроком у 5' × 5', що відповідає ділянці 9 × 9 км на фізичній поверхні Землі.

Однак, навіть за таких умов пряме використання висот глобальних моделей геоїда для практичних цілей, як-от визначення висот точок фізичної поверхні Землі, є малоефективним з огляду їхньої точності. Така ситуація здебільшого склалася через історичні причини пов'язані із тим, що різні країни використовують різні системи висот (ортометричні, нормальні тощо) та відповідно також різні нуль-пункти (Амстердамський, Кронштадтський тощо) початку відліку прийнятої системи висот.

Фактично до 2008 року максимальний порядок обчислення глобальних моделей не перевищував значення 360, що відповідно обмежувало їхню

точність у порівнянні із регіональними моделями. З цих причин, різні країни створювали власні регіональні та локальні моделі геоїда чи квазігеоїда виключно в межах своїх територій, або на кілька країн одночасно, якщо між такими країнами існувала узгодженість щодо прийнятої системи висот та нуль-пунктом. Починаючи з 2008 року з'явилася можливість обчислення моделей геоїда високих ступенів/порядків у глобальному масштабі й разом з цим, з'явилися перспективи щодо створення єдиної світової системи відліку висот IHRS (International Height Reference System). Однак цей процес є дуже складним для практичної реалізації й не лише через історичний поділ у системах висот та нуль-пунктах їхнього відліку, а ще й здебільшого через політичні упередженості між країнами світу. У зв'язку з цим, сьогодні більш доречно розглядати можливості глобальних моделей високого ступеня/порядку, як виокремлені частини із глобального масштабу, тобто для регіональних, або локальних територій.

Коли мова йде про регіональну чи локальну модель геоїда або квазігеоїда, то тут обов'язково припускається пряме використання такої моделі для практичних цілей. Тобто такі моделі повинні мати зв'язок із певним опорним еліпсоїдом, традиційною (або оновленою) системою висот та не містити грубих помилок щодо цієї системи. Крім того, регіональні/локальні моделі добре описують високочастотні особливості "істинної" поверхні геоїда та квазігеоїда, які зазвичай не відображаються при глобальному моделюванні [115]. Якраз тому, моделі гравіметричного геоїда вважаються найбільш наближеними щодо самої фігури геоїда в її класичному розумінні. Гравіметрична модель будується виключно з урахуванням гравітаційних наборів даних. Такі набори даних відрізняються лише за методами вимірювань величин, а саме:

- наземні гравіметричні вимірювання;
- спеціальні супутникові місії для визначення параметрів гравітаційного поля Землі;
- супутникова альтиметрія;

– гравіметричні виміри у повітрі тощо.

Суть гравіметричного моделювання геоїда полягає у тому, щоб представити таку модель якомога краще та точніше щодо поверхні “істинного” геоїда. При цьому, гравіметрична модель не прив’язується до жодної прийнятої системи висот, а будується, навпаки, незалежно від неї, щоб передати всі високочастотні властивості хвилястості поверхні геоїда в певному регіоні. Термін “модель гравіметричного квазігеоїда” застосовують лише для наголошування на те, що в основу її моделювання покладено теорію Молоденського, але при цьому основними даними є виключно гравітаційні величини.

Геометрична модель геоїда або квазігеоїда дістала свою назву від того, що для її моделювання необхідно провести GNSS-нівелювання на пунктах геометричного нівелювання прийнятої традиційної системи висот. При цьому, для побудови геометричного геоїда чи квазігеоїда зазвичай необхідно залучити пункти саме високоточного геометричного нівелювання, тобто фактично дані I – II класу точності. Різниця між геометричним геоїдом та квазігеоїдом полягає лише в тому, що якщо висоти нівелірних пунктів були визначені класичними методами нівелювання в системі ортометричних висот, то із даних GNSS-нівелювання проведеного на цих пунктах можна отримати модель геометричного геоїда. Відповідно, якщо висоти пунктів визначені в системі нормальних висот, то модель буде називатися геометричною моделлю квазігеоїда. Детальніше методику визначення висот геометричного геоїда та квазігеоїда буде розглянуто у розділі 3.2.1, оскільки такого роду дані є складовою запропонованої у цій роботі методики підвищення точності GNSS-нівелювання.

Гібридні моделі геоїда та квазігеоїда поєднують у собі концепцію як гравіметричних моделей, так і геометричних. Гібридна модель обов’язково має бути прив’язана до офіційної системи відліку висот, а висоти такої моделі мають найбільш точно забезпечувати перехід від еліпсоїдних висот до ортометричних або нормальних висот. У випадку гібридних моделей за

основу беруть дані регіональної/локальної гравіметричної моделі, які доповнюють даними геометричної моделі. При цьому, якщо немає можливості використати регіональну гравіметричну модель, то як основу можна взяти дані глобальних моделей геопотенціалу супутникового чи комбінованого типу.

Починаючи від перших спроб глобального моделювання фігури геоїда з 1960 років до 1990 років тривало створення моделей першого покоління [67]. Відповідно починаючи з 1990 років і до сьогодні триває період другого покоління глобальних моделей геопотенціалу. Нині, завдяки високоточним супутниковим вимірюванням, які є результатом розвитку сучасних GNSS-технологій, глобальне гравітаційне поле Землі та його варіації можна представити з кращою просторовою та часовою роздільною здатністю [10].

3.2. Глобальні моделі геопотенціалу

З появою перших GNSS-систем у 1960 роках з'явилися можливості щодо визначення фігури геоїда в глобальному масштабі й вже в 1968 році на основі наземних та супутникових даних про гравітаційне поле Землі поверхня геоїда була представлена до 14 ступеня/порядку [123]. Така процедура визначення поверхні геоїда називається апроксимацією гравітаційного потенціалу Землі, а її математичним результатом є глобальна модель геопотенціалу, або як її ще називають – глобальна модель геоїда.

Особливістю моделей глобального призначення є те, що вони можуть бути використані для будь-якого регіону планети. Доступ до даних глобальних моделей забезпечують спеціальні служби гравітаційного поля Землі, однією з яких є Міжнародний центр глобальних моделей Землі (ICGEM) [69]. База даних ICGEM налічує найбільшу колекцію різноманітних варіантів глобальних моделей геопотенціалу. Кожна глобальна модель має набір певних величин (функціоналів), які можуть бути обчислені через розрахункові сервіси (утиліти), що надає служба ICGEM на своєму сайті [68]. Особливої уваги заслуговують глобальні моделі високих ступенів та

порядків, такі як: EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, XGM2019e_2159 та SGG-UGM-2. Основні характеристики перелічених моделей наведено у таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

**Характеристики глобальних моделей гравітаційного поля Землі
високого ступеня та порядку**

Характеристика моделі		EGM2008	EIGEN-6C4	GECO	XGM2019e_2159	SGG-UGM-2
Рік випуску моделі		2008	2014	2015	2019	2020
Функції гармонійних коефіцієнтів		еліпсоїдні	сферичні	сферичні	сферичні	еліпсоїдні
Ступінь обчислення (n)		2190	2190	2190	2190	2190
Порядок обчислення (m)		2159	2190	2159	2159	2159
Тип даних	альтиметричні	+	+	-	+	+
	супутникові	-	-	-	-	-
	наземні	+	+	-	+	-
	топографічні	-	-	-	+	-
	спеціальні супутникові місії	+	+	+	+	+
	модель геопотенціалу	-	-	+	-	+
Базова система припливів		“tide-free”	“tide-free”	“tide-free”	“zero-tide”	“zero-tide”
Глобальна середня квадратична точність за даними GNSS-нівелювання (24 014 пунктів)		18,77 см	17,80 см	17,63 см	17,32 см	17,75 см
Регіональна середня квадратична точність за даними GNSS-нівелювання для території Європи (1 047 пунктів)		12,5 см	12,1 см	12,3 см	12,7 см	12,1 см

З таблиці 3.2, бачимо, що першою глобальною моделлю гравітаційного поля Землі з високою роздільною здатністю стала модель EGM2008 (Earth Gravitational Model) [115], що оприлюднена у 2008 році. Ця модель утворена поєднанням даних супутникових спостережень про гравітаційне поле Землі (місія GRACE), наземних даних гравітації та даних супутникової альтиметрії. В основу побудови моделі EGM2008 покладено функції еліпсоїдних гармонійних коефіцієнтів 2190 ступеня та 2159 порядку. На сайті служби ICGEM, глобальна середня квадратична точність висот геоїда/квазігеоїда отриманих із цієї моделі складає 18.77 см. Такі результати наведено за даними GNSS-нівелювання виконаного на 24 014 пунктах геометричного нівелювання розташованих на материковій частині Землі. При цьому, регіональна точність висот моделі EGM2008 оцінюється в 12.5 см для

території Європи за результатами GNSS-нівелювання на 1 047 пунктах. Зокрема, автори моделі EGM2008 наголошують, що у районах покритих високоякісними даними (США, Європа, Австралія тощо) точність висот може становити близько 5-10 см [115]. Фактично, це свідчить про те, що модель EGM2008 можна використовувати, як регіональну для певних територій. Також, слід звернути увагу на те, що наведена точність висот моделі EGM2008 стосується даних з урахуванням поправок системи припливів “tide-free”, оскільки ця система прийнята, як базова для цієї моделі.

Наступною глобальною моделлю високого ступеня/порядку (див. табл. 3.2) стала остання реалізація серії моделей EIGEN (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques), а саме EIGEN-6C4 [18]. Ця модель розроблена у 2014 році, шляхом комбінування даних супутникових місій GOCE, GRACE, LAGEOS із наземними, морськими та океанічними даними про гравітаційні аномалії. На деякі частини континентів модель EIGEN-6C4 доповнена даними моделі EGM2008. Модель EIGEN-6C4 обчислена із використанням сферичних гармонійних коефіцієнтів до 2190 ступеня та порядку. Згідно із даними ICGEM, глобальна точність висот цієї моделі складає 17.80 см (24 014 пунктів), а регіональна 12.1 см для Європи (1047 пунктів) з урахуванням поправок базової системи припливів “tide-free”.

У 2015 році представлено комбіновану глобальну модель гравітаційного поля Землі – GECO (GOCE and EGM2008 combined model), що сягає 2190 ступеня та 2159 порядку сферичних гармонійних коефіцієнтів [46]. Вона утворена комбінуванням даних моделі EGM2008 з новими даними з супутникової місії GOCE. Таке поєднання дало змогу створити нову покращену модель глобального масштабу та підвищити точність даних на тих територіях, де модель EGM2008 демонструвала найнижчі результати. При цьому, глобальну точність вдалося покращити до 17.63 см, але регіональна точність для території Європи суттєво не змінилася, та склала

12.3 см (див. табл. 3.2). Разом з цим, для висот моделі GECO, як і для моделі EGM2008, прийнято систему припливів “tide-free”, як базову.

Комбінована модель глобального гравітаційного поля серії XGM2019 (eXperimental Geopotential Model) була випущена у 2019 році [167]. Початково, ця модель представлена сфероїдними (а не сферичними) гармонійними коефіцієнтами до максимального 5399 ступеня/порядку, що відповідає роздільній здатності приблизно в 4 км, або сітці $2' \times 2'$ в градусній мірі. Однак, щоб відповідати стандарту служби ICGEM, коефіцієнти моделі також було обчислено, як функції сферичних гармонійних коефіцієнтів до 5540 ступеня/порядку. В основу побудови XGM2019 покладено дані супутникової моделі глобального гравітаційного поля GOCO06s у поєднанні з наземною гравітаційною сіткою, даними моделі супутникової альтиметрії DTU13 та моделі глобальної топографії/батиметрії EARTH2014. При цьому, модель XGM2019 є незалежною від будь-яких даних моделі EGM2008. Поєднання супутникових даних із наземними спостереженнями демонструє покращення точності у порівнянні з попередніми моделями високого ступеня та порядку. Автори XGM2019 надали модель розрахованою у трьох різних шкалах спектральної роздільної здатності, а саме у розширенні ступеня/порядку, як: 5540/5399 (XGM2019e), 2190/2159 (XGM2019e_2159) та 760/719 (XGM2019). Для оцінювання точності моделі XGM2019 у порівнянні з іншими моделями високого ступеня/порядку, доцільно розглядати дані лише варіанту моделі XGM2019e_2159 (див. табл. 3.2). Тому, на сайті ICGEM представлено узагальнену глобальну та регіональну точність саме цієї моделі, яка складає 17.32 см та 12.7 см для території Європи. Відмінністю моделі XGM2019 від моделей EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO є те, що її базовою системою припливів слугує система нульових припливів, тобто “zero-tide”.

Ще однією глобальною моделлю гравітаційного поля Землі високого ступеня/порядку є модель SGG-UGM-2, що представлена у 2020 році. В основу її обчислення покладено еліпсоїдні гармонійні коефіцієнти

2190 ступеня і 2159 порядку. Модель створено шляхом поєднання даних супутникової альтиметрії про морську гравітацію, даних гравітаційних аномалій моделі EGM2008 над континентальною частиною Землі та даних супутникових спостережень місії GOCE і GRACE [90]. За даними служби ICGEM базовою системою припливів для моделі SGG-UGM-2 є система “zero-tide”, а її регіональна та глобальна точність на Європейській континентальній частині складає 12.1 см та 17.75 см, відповідно (див. табл. 3.2).

3.2.1. Системи припливів висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

Серед різноманітних характеристик глобальних моделей геоїда/квазігеоїда вагоме значення мають припливні поправки, які в загальному заведено називати системами припливів. Існує три основні концепції систем припливів [28]:

- система без (вільна від) припливів – “tide-free”;
- система середніх припливів – “mean-tide”;
- система нульових припливів – “zero-tide”.

Кожна система має свої особливості, що пов’язані із впливом Місяця та Сонця на гравітаційне поле Землі, а також на її тверду та пружну частини. Суть застосування тієї чи іншої системи полягає у тому, які саме поправки необхідно застосувати до потенційних або похідних величин гравітаційного поля Землі. При обчисленні хвилястості геоїда за допомогою інтеграла Стокса припускається, що потенційне поле сили тяжіння Землі незмінне у часі. Насправді це означає, що залежні від часу величини, які впливають на потенційне поле, усереднюють у часі та моделюють [141]. Однак, усереднення за часом не усуває “постійний” потенціал Місяця та Сонця, що і призводить до трьох різних концепцій систем припливів.

На рисунку 3.2, зображено загальну блок-схему трьох концепцій систем припливів на прикладі висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, які є похідними від величин гравітаційного поля Землі.

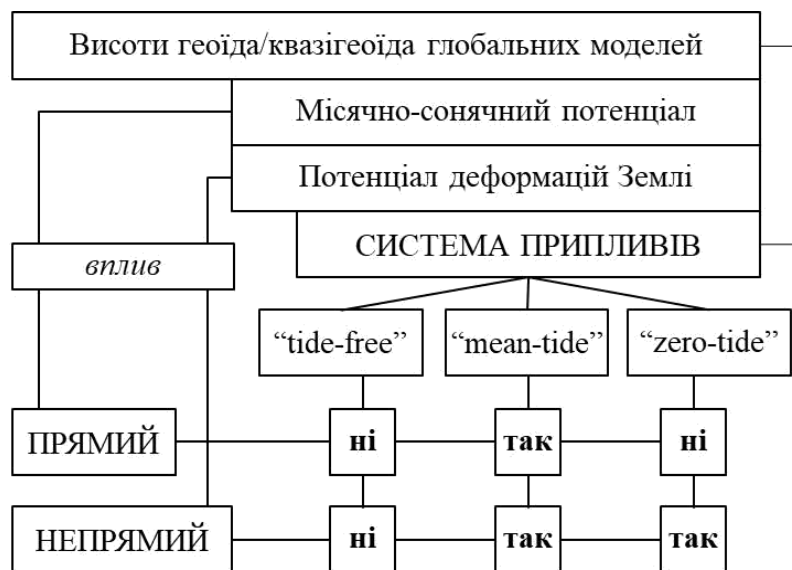


Рисунок 3.2 – Загальна блок-схема концепцій систем припливів висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

Концептуально, кожна система припливів базується на врахуванні/неврахуванні двох ефектів впливу – прямого та непрямого. Прямий вплив викликаний обертанням Землі навколо Сонця та обертанням Місяця навколо Землі. Непрямий вплив походить від деформацій земної кори викликаних обертанням Землі навколо своєї осі. Як видно з рисунка 3.2, у системі “tide-free” прямий та непрямий вплив не враховуються. Це означає, що потенціал Місяця, Сонця та постійних деформацій Землі вилучається із всіх гравітаційних величин, що використовують для моделювання поверхні геоїда. Отримана у такий спосіб модель геоїда буде найбільш віддаленою від “реальної” форми Землі [96].

Концепція системи припливів “mean-tide” полягає у врахуванні, як прямих, так і непрямих впливів. Тобто, в такому випадку, гравітаційні величини визначені у цій системі містять поправки похідні від усередненого за багаточасовий період потенціалу Місяця, Сонця та всіх деформацій земної кори. Величини, визначені у цій системі припливів будуть найбільш

наближено відповідати фізичному змісту фігури Землі, тобто геоїду у його “істинній” формі.

Система припливів “zero-tide” є усередненням між концепцією систем “tide-free” та “mean-tide”. Вибір цієї системи означає, що прямий вплив потенціалу Місяця та Сонця не враховується щодо потенційних величин гравітаційного поля Землі, а непрямий ефект (деформації Землі) зберігається (див. рис. 3.2). У цьому сенсі, припускається, що гравітаційне поле Землі формується лише під впливом сили тяжіння та відцентрової сили обертання Землі навколо своєї осі.

Висоти геоїда/квазігеоїда отримані з будь-якої глобальної моделі гравітаційного поля Землі можуть бути виражені у всіх трьох припливних системах. Моделі регіонального масштабу створюють у системі нульових припливів, а моделі локального масштабу здебільшого стосуються системи середніх припливів. Як зазначалося у розділі 3.2, щодо глобальних моделей EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO застосовується система “tide-free”, як базова, а для моделей XGM2019e_2159 та SGG-UGM-2 базовою є система “zero-tide” (див. табл. 3.2). Водночас відповідно до резолюції IAG №9 та №16 (1983 р.) для величин пов’язаних із гравітаційним полем Землі рекомендовано використовувати систему “zero-tide”, а для величин пов’язаних із “земною корою” – систему “mean-tide” [62]. Звідси випливає, що геоїд, як поверхня (чи фігура) має належати до системи нульових припливів, але висоти, що описують фізичну поверхню Землі (ортометричні, нормальні тощо) необхідно визначати в системі середніх припливів. Останнє припущення справедливе лише за умови, якщо використовуються традиційні геодезичні (наземні) методи вимірювань при впровадженні тієї чи іншої системи відліку висот.

Сучасний підхід щодо визначення висот фізичної поверхні Землі базується на методі GNSS-нівелювання. Як відомо, реалізація цього методу полягає в обчисленні ортометричних (чи нормальних) висот, як різниці між еліпсоїдною висотою та висотою геоїда або квазігеоїда, які отримують із

відповідних моделей. Опрацювання даних GNSS-спостережень зазвичай здійснюють у відповідній міжнародній, регіональній або національній системах координат (див. розділ 1.2.1). Всі зазначені системи координат за своїм визначенням автоматично належить до системи без припливів, тобто “tide-free” [119]. Разом з тим, еліпсоїдні координати (B,L) та висоту (H) отримують шляхом перетворення просторових координат (X,Y,Z), а отже, в залежності від обраної системи просторових координат автоматично “успадковується” еліпсоїдна система координат, тобто геометричний еліпсоїд [96]. Таким чином, еліпсоїдні висоти отримані за даними GNSS-спостережень будуть також належати до системи “tide-free”. Звідси слідує, що модельні висоти геоїда чи квазігеоїда та еліпсоїдну висоту отриману із GNSS-даних необхідно привести до якоїсь однієї системи припливів. З іншого боку, якщо використання системи припливів “tide-free” є незалежним від будь-яких припливних поправок, то ортометрична чи нормальна висота похідна від методу GNSS-нівелювання буде мимоволі належати до системи припливів, у якій отримано значення висот геоїда/квазігеоїда обраної глобальної моделі [121]. В цьому випадку, вибір системи припливів висот геоїда/квазігеоїда необхідно здійснювати залежно від очікуваного кінцевого результату. Тобто, якщо висоту фізичної поверхні Землі потрібно отримати в традиційній системі висот, то модельні висоти слід брати в системі “mean-tide”. Це пов’язано з тим, що всі висоти визначені методом геометричного нівелювання за своєю природою стосується середнього рівня моря, а отже системи середніх припливів. Новітні системи висот, як-от система EVRF2007, належить до системи припливів “zero-tide”. Отже, при застосуванні методу GNSS-нівелювання для визначення висот фізичної поверхні Землі у цій системі, модельні висоти геоїда/квазігеоїда мають враховувати таку ж систему припливів. Разом з тим, реалізація EVRF2019 передбачає можливість вираження висот у двох системах припливів – “zero-tide” та “mean-tide” [131], а глобальна система висот IHR5 запланована виключно, як система “mean-tide” [96]. Звідси слідує, що

наукове товариство не дійшло згоди щодо чіткої конкретики у застосуванні тієї чи іншої концепції систем припливів. Наразі це питання залишається відкритим, і повинно розглядатися індивідуально для конкретних цілей щодо визначення висот методом GNSS-нівелювання.

3.2.2. Ондуляція геоїда нульового порядку висот глобальних моделей

Ще одним важливим параметром висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей є ондуляція геоїда нульового порядку. Як вже зазначалось, поверхню геоїда або квазігеоїда можна виразити числовими величинами відносно поверхні опорного еліпсоїда, які називають висотою геоїда та висотою квазігеоїда (аномалією висоти). При моделюванні гравітаційного поля Землі за допомогою сферичних гармонійних моделей SHM (Spherical Harmonic Model), масу глобальної моделі та масу опорного еліпсоїда підбирають так, щоб вони дорівнювали масі Землі. На поверхні геоїда значення потенціалу сили тяжіння Землі постійне ($W = W_0$), а на поверхні опорного еліпсоїда постійною є величина потенціалу нормальної сили тяжіння ($U = U_0$). Якщо маса “геоїд-еліпсоїд-Земля” є однаковою, то справедливою буде рівність $U = U_0 = W_0$, тобто потенціал сили тяжіння еліпсоїда дорівнює потенціалу сили тяжіння на геоїді [64]. Прикладом такої рівності є глобальна модель геоїда EGM2008, що має свій базовий еліпсоїд EGM2008 з параметрами середнього земного еліпсоїда MEE (Mean Earth Ellipsoid). За таких умов, висоти геоїда/квазігеоїда є дуже малими величинами у глобальному сенсі. Однак, часто може знадобитися використання еліпсоїда, який буде мати іншу масу, і відповідно інше значення потенціалу сили тяжіння. Зокрема, при використанні висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей Землі для реалізації методу GNSS-нівелювання асоціацією IAG рекомендовано використовувати екіпотенціальний еліпсоїд GRS80 [62], як опорний. Однак, традиційні системи висот за своїм визначенням є регіонального масштабу, тобто

теоретично вони повинні бути пов’язані із певними референц-еліпсоїдами. У першому і другому випадку, виникає різниця між масою й потенціалом глобальної моделі геоїда/квазігеоїда та обраним еліпсоїдом. Така різниця буде проявлятися у вигляді систематичного зміщення та відобразить різницю в масштабі між глобальною моделлю та обраним (референц) еліпсоїдом [79]. Цю різницю називають ондуляцією геоїда нульового порядку (“zero-degree term”). Для визначення цієї величини застосовують узагальнену теорему Брунса, що дає наближену формулу ондуляції:

$$\zeta_{00} = \frac{GM_W - GM_U}{r\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma} \quad (3.3)$$

де ζ_{00} – ондуляція геоїда нульового порядку; GM_W – добуток гравітаційної сталої Землі та маси відповідної глобальної моделі геоїда; GM_U – добуток гравітаційної сталої Землі та маси опорного еліпсоїда; r – радіус опорного еліпсоїда; γ – нормальна сила тяжіння на поверхні опорного еліпсоїда; W_0 – значення потенціалу сили тяжіння на геоїді; U_0 – значення сили тяжіння на опорному еліпсоїді.

Ондуляцію геоїда нульового порядку можна розрахувати за формулою (3.3), якщо знати який саме (референц) еліпсоїд покладено в основу національної (або традиційної) системи висот. Традиційні системи висот зазвичай не ув’язували з жодними референц-еліпсоїдами, тому наближене значення ондуляції можна знайти застосувавши певні математичні розрахунки. З наукових досліджень відомо, що різниця висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей Землі між опорним еліпсоїдом WGS84 та GRS80 складає 0.93 м [111, 39]. Ондуляція геоїда нульового порядку для EGM2008, як моделі геоїда та для WGS84, як опорного еліпсоїда складає - 0.41 м для системи припливів “tide-free” [115, 106]. З відси випливає, що ондуляцію геоїда нульового порядку для зіставлення EGM2008-GRS80 можна знайти з простих математичних обчислень: 0.93 м – 0.41 м = 0.52 м [39]. Таким чином, ондуляція для опорного еліпсоїда GRS80 буде складати

+0.52 м. На рисунку 3.3, графічно зображено принцип наближеного обчислення величини ондуляції.

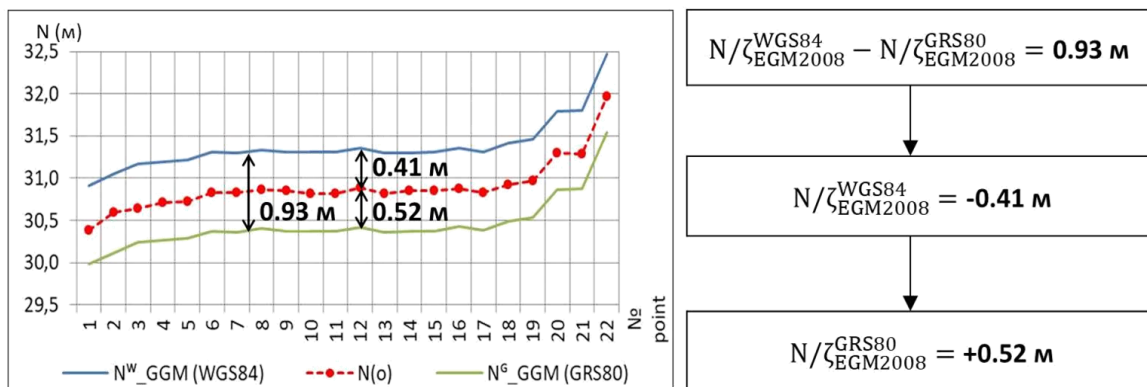


Рисунок 3.3 – Графічне зображення величини ондуляції геоїда нульового порядку

Оскільки різниця в 0.93 м для висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей є величиною сталою для всіх систем припливів, то ондуляцію величиною в -0.41 м відносно WGS84, та +0.52 м відносно GRS80 можна також прийняти, як константу для всіх систем припливів. При використанні висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для реалізації методу GNSS-нівелювання, величину ондуляції геоїда нульового порядку необхідно враховувати (алгебраїчно додати до модельних висот) для можливості локального масштабування цих висот у національну (традиційну) систему.

3.2.3. Гравітаційні аномалії глобальних моделей Землі

При обчисленні поверхні геоїда основними даними є гравітаційні аномалії. Кожна глобальна модель містить свій набір гравітаційних аномалій, які отримують від різних джерел даних. Від кількості та якості використаних гравітаційних аномалій залежить точність висот геоїда/квазігеоїда отриманих із відповідної моделі. Для реалізації запропонованої у цій роботі методики локального коригування висот глобальних моделей Землі було використано дані гравітаційних аномалій взяті із моделі WGM2012 (World Gravity Map). WGM2012 являє собою модель гравітаційних аномалій високої роздільної здатності обчислених у глобальному масштабі на основі доступних еталонних моделей геопотенціалу (GGM) та інформації про висоту рельєфу

[11]. Гравітаційні аномалії цієї моделі надаються користувачам у вигляді сітки з кроком $2' \times 2'$. Модель WGM2012 містить набори даних із трьох видів аномалій:

- сферичні гравітаційні аномалії Буге (spherical Bouguer gravity anomaly);
- сферичні ізостатичні гравітаційні аномалії (spherical Isostatic gravity anomaly);
- гравітаційні аномалії у вільному повітрі, тобто на поверхні Землі відповідно до теорії Молоденського (Molodenski Free-air gravity anomaly).

Автори моделі WGM2012 отримали наведені вище набори гравітаційних аномалій на основі комбінування даних глобальної моделі EGM2008, глобальної моделі океанічних припливів DTU10 та доповнені поправками за рельєф, обчисленими із глобальної моделі ETOPO1 [11, 8]. Загалом, дані WGM2012 – це перший набір глобальних гравітаційних аномалій, які враховують реалістичну модель Землі та вплив більшості поверхневих мас (атмосфери, суші, океанів, внутрішніх морів, озер, льодовиків тощо) [11]. Дані WGM2012 базуються на строгих обчисленнях, які узгоджені з геодезичними та геофізичними представленнями гравітаційних аномалій, що забезпечує надання однорідної інформації про статичне гравітаційне поле Землі в регіональному та глобальному масштабах.

Для практичної реалізації запропонованої у цій роботі методики було залучено саме гравітаційні аномалії у вільному повітрі взяті із моделі WGM2012 (див. розділ 4.1). Вибір саме цього виду аномалій пов'язаний з тим, що для території України офіційною є система нормальних висот, яка невід'ємно пов'язана із поверхнею квазігеоїда та його висотами (аномаліями висоти). В цьому випадку, суть застосування гравітаційних аномалій моделі WGM2012 полягала у тому, щоб знайти різниці гравітаційних аномалій ($\delta\Delta g$) щодо гравітаційних аномалій кожної залученої для експерименту глобальної моделі геоїда, тобто EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159. Також тут слід зазначити, що отримані у такий спосіб різниці гравітаційних

аномалій оцінено стандартними відхиленнями на кожен обрану для експерименту територію (див. розділ 4.3). Для першої території стандартні відхилення різниць гравітаційних аномалій склали 1.7 мГал, 1.7 мГал, 1.9 мГал та 2.7 мГал, відповідно для моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159. Для другої території ці значення дорівнюють 0.2 мГал, 0.7 мГал, 0.7 мГал, 2.5 мГал також для аналогічних моделей. Отримані у такий спосіб різниці слугували для знаходження вагових коефіцієнтів похибок висот геоїда/квазігеоїда щодо традиційної системи висот. Графічний розподіл різниць гравітаційних аномалій глобальних моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 щодо даних моделі WGM2012 на локальні тестові території наведено у Додатках А.1-А.2, а розподіл вагових коефіцієнтів у Додатках Б.1-Б.2.

3.3. Моделі геоїда та квазігеоїда регіонального/локального масштабу

Довгий час моделювання геоїда та квазігеоїда у регіональному та локальному масштабі мало пріоритет в порівнянні із моделюванням у глобальному масштабі. В наслідок цього, у 1992 році було створено спеціальну службу для збору даних про всі наявні регіональні моделі, яка сьогодні відома, як Міжнародна служба геоїда – ISG. Служба ISG надає вільний доступ до бази даних світових моделей геоїда та квазігеоїда через свій вебсайт. В архіві служби ISG є вільно доступними, як останні випуски найбільш важливих і добре відомих моделей геоїда та квазігеоїда, так і старіші версії або менш відомі [70]. Основними завданнями служби ISG є збір, аналіз і розповсюдження локальних і регіональних моделей геоїда та квазігеоїда. Це уможливило надання технічної підтримки користувачам, які займаються дослідженнями, пов'язаними з моделюванням поверхні геоїда і квазігеоїда та використанні моделей для різноманітних освітніх і дослідницьких цілей. Відповідно до інформації наданої [126] станом на 2021 рік база даних ISG налічувала:

- 158 гравіметричних моделей, тобто змодельованих на основі лише гравітаційних даних;
- вісім геометричних моделей, змодельованих виключно за даними GNSS-нівелювання;
- 60 гібридних моделей, отриманих, як за гравітаційними, так і за даними GNSS-нівелювання.

Серед всіх регіональних моделей є такі, що стосуються безпосередньо дисертаційних досліджень, як-от PL-quasi-geoid2021, та зокрема, території України, як-от модель УКГ2012 (англ. UQG2012) та EGG2015 (European Gravimetric (Quasi)Geoid). Коротко розглянемо основні аспекти цих моделей.

3.3.1. Моделі регіонального масштабу

Модель PL-quasi-geoid2021 має роздільну здатність $0.01^\circ \times 0.01^\circ$ та розрахована для території Польщі на основі наземних гравіметричних даних, даних глобальної моделі геопотенціалу SGG-UGM-2 та цифрової моделі рельєфу SRTM_v4.1. Для цієї моделі відліковим еліпсоїдом є GRS80, а висоти, визначені від цієї поверхні, належать до системи нульових припливів. Методика створення моделі PL-quasi-geoid2021 полягала у тому, що спочатку вона була змодельована на основі виключно гравіметричних даних, а потім шляхом додаткових обчислень перетворена у гібридну модель квазігеоїда [53]. Для такого перетворення автори знаходили різниці висот між гравіметричними та геометричними значеннями висот на однойменних пунктах GNSS-нівелювання. Для отриманих різниць підбирали оптимальні математичні функції, щоб створити поле поправок на всю територію Польщі з кроком $0.01^\circ \times 0.01^\circ$. Кінцеву точність моделі оцінено на незалежних пунктах GNSS-нівелювання стандартним відхиленням на рівні 1.9 см. Висоти моделі PL-quasi-geoid2021 мають прямий зв'язок із нормальними висотами системи PL-EVRF2007-NH на основі використання еліпсоїдних висот у системі PL-ETRF2000-GRS80h. Це означає, що модель створена спеціально для можливості застосування GNSS-нівелювання. При цьому, головною

умовою є те, що дані GNSS-спостережень повинні бути опрацьовані в системі просторових геоцентричних координат ETRF2000 та перетворені у систему еліпсоїдних координат GRS80. Враховуючи досить високу точність моделі PL-quasi-geoid2021, та зокрема те, що вона охоплює західну частину території України, висоти цієї моделі було залучено для реалізації запропонованої у цій роботі методики (див. розділ 4).

Модель квазігеоїда EGG2015 являє собою одну із найбільших гравіметричних моделей регіонального рівня, що охоплює всю територію Європи та деякі прилеглі країни, зокрема повністю територію України. В основу побудови EGG2015 покладено глобальну модель геопотенціалу GOCO05S (280 ступінь/порядок), супутникові та наземні гравітаційні дані. Модель EGG2015 має повну роздільну здатність $1.0' \times 1.0'$ [25], однак у вільному доступі для користувачів модель надано на сітці $10' \times 15'$ [70]. Для отримання доступу до більшої роздільної здатності необхідно офіційно надати запит до генерального секретаря IAG з детальним роз'ясненням щодо мети використання даних моделі EGG2015. Висоти квазігеоїда EGG2015 надаються обчисленими відносно відлікового еліпсоїда GRS80 з урахуванням поправок системи нульових припливів, тобто “zero-tide” (як рекомендовано IAG), та є повністю сумісними із системою висот EVRF2007 [24, 25].

У цілях виявлення властивостей та певних характеристик висот квазігеоїда моделі EGG2015, їх доцільно порівняти із висотами геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку, як-от: EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159. Для можливості порівняння, всі висоти моделей необхідно привести до однієї роздільної здатності, а саме на сітку з більшим кроком ніж роздільна здатність регіональної моделі, наприклад $15' \times 15'$. Таким чином, оцінювання стосуватиметься 169 значень висот кожної моделі. Крім того, всі висоти моделей слід обчислити відносно еліпсоїда GRS80 та в системі припливів “zero-tide”, яка буде спільною для цих моделей. В цьому випадку, оцінювання стосуватиметься локальної території в межах $48^\circ - 51^\circ$ по

широті та $22^{\circ} - 25^{\circ}$ по довготі. Як незалежні дані візьмемо висоти квазігеоїда моделі PL-quasi-geoid2021, щоб знайти різниці висот моделей EGG2015, EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159. На рисунку 3.4, зображено різниці висот зазначених моделей щодо висот квазігеоїда PL-quasi-geoid2021, а в таблиці 3.3 наведено їхні статистичні характеристики.

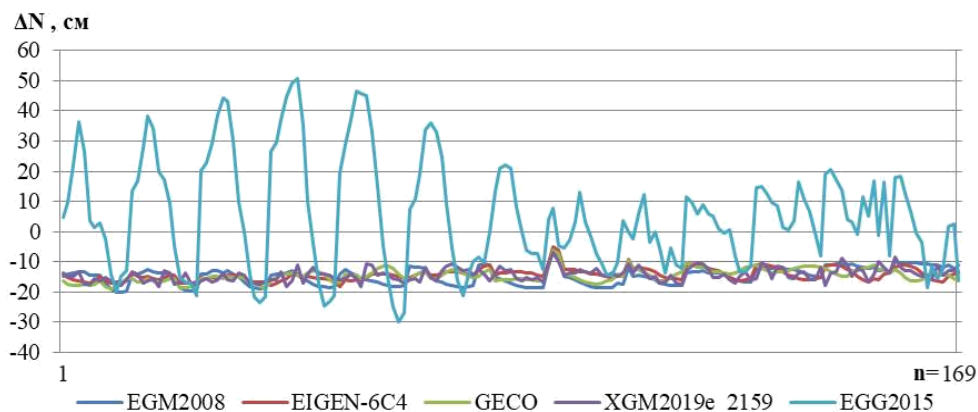


Рисунок 3.4 – Різниці висот моделей EGG2015, EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 щодо висот моделі PL-quasi-geoid2021

Таблиця 3.3

Статистичні характеристики різниць висот моделей EGG2015, EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159

Відхилення (см)	Модель				
	EGM2008	EIGEN-6C4	GECO	XGM2019e_2159	EGG2015
Середнє	-14.7	-14.2	-14.5	-14.3	5.5
Максимальне	-5.9	-4.9	-6.0	-7.0	50.8
Мінімальне	-20.1	-18.0	-18.8	-18.3	-29.7
Стандартне	2.8	2.0	2.1	2.2	18.3
Середнє квадратичне	15.1	14.5	14.8	14.6	19.2
Розмах значень	14.2	13.1	12.8	11.3	80.5

З рисунка 3.4 можна побачити, що різниці висот моделі EGG2015 мають дуже велику амплітуду коливань порівняно з глобальними моделями. При цьому, найбільші коливання проявляються у північному напрямку, оскільки дані відсортовано за принципом північ-південь. За даними таблиці 3.3 видно, що різниці висот глобальних моделей мають стандартне

відхилення на рівні 2-3 см, а для моделі EGG2015 ця величина складає 18.3 см. Для глобальних моделей середні квадратичні значення знаходяться на рівні 14-15 см, а значення моделі EGG2015 дорівнює 19.2 см. Крім того, розмах значень різниць висот глобальних моделей коливається від 11.3 см до 14.2 см, а розмах різниць моделі EGG2015 складає 80.5 см. Значення статистичних характеристик різниць висот моделі EGG2015 показують, що в тій роздільній здатності, в якій доступна ця модель користувачам, висоти моделі є непридатними для високоточного GNSS-нівелювання.

Модель УКГ2012 задекларована, як гібридна модель квазігеоїда для території України, що створена з роздільною здатністю $2' \times 3'$ [97]. Для її побудови використано наземні гравіметричні дані, дані цифрової моделі рельєфу SRTM_v3 та глобальної моделі геопотенціалу EGM2008 (720 ступеня/порядку). УКГ2012 є четвертою версією серії моделей квазігеоїда для території України, попередниками якої є УКГ2006, УКГ2007, УКГ2011.

Сьогодні вже існує і п'ята версія, яка називається УКГ2017, однак в даній роботі, ця версія розглядатися не буде, оскільки офіційної літератури щодо її опису немає у вільному доступі, як і самих даних. Висоти моделі УКГ2012 обчислені щодо відлікового еліпсоїда GRS80 в балтійській системі нормальних висот 1977 року. Модель УКГ2012 оцінено на пунктах GNSS-нівелювання стандартним відхиленням на рівні 1.5 см, і середньоквадратичним відхиленням менше ніж 4 см [97]. Згідно із [97], всі версії моделей серії УКГ створювалися для можливості визначення нормальних висот за допомогою методу GNSS-нівелювання, оскільки мають зв'язок із чинною традиційною системою висот України. Однак, висоти квазігеоїда, як і гравітаційні аномалії, моделі УКГ2012 (та інших версій) не надані для загального користування, тому для практичної реалізації GNSS-нівелювання їхнє використання є неможливим.

3.3.2. Локальне визначення висот геометричного геоїда та квазігеоїда за даними GNSS-нівелювання

Як зазначалося у розділі 3.1, одним із видів моделей регіонального/локального масштабу є геометричний геоїд та квазігеоїд. Як відомо, до появи систем глобального позиціонування, системи висот будували методом геометричного нівелювання шляхом розгортання нівелірних (висотних) мереж I – IV класу точності [187]. Такі мережі складаються із пунктів висот (вікових, фундаментальних, ґрунтових, стінних реперів тощо) і ходів (ліній) нівелювання. Всі висоти пунктів такої мережі є урівноваженими між собою, з урахуванням геодезичних та гравіметричних поправок, а числові значення висот занесено у спеціальні каталоги висот. В каталогах висот також зазначається нуль-пункт нівелірної мережі зафіксований на певну епоху та власне система висот до якої він відноситься (нормальна, ортометрична тощо). Висотна мережа України використовує систему нормальних висот, а висоти пунктів (станом на 2022 р.) визначені у Балтійській системі висот 1977 року, вихідним пунктом якої є Кронштадтський футшток. Однак, з 2019 року виконуються роботи для прив'язки висотної мережі України до нуля Амстердамського футштока [178].

Суть визначення висот геометричного геоїда або квазігеоїда базується на використанні пунктів висот традиційних нівелірних мереж. Для цього на пунктах високоточного геометричного нівелювання виконують GNSS-спостереження. Після чого, із даних GNSS-вимірів отримують еліпсоїдні висоти цих пунктів. Потім для однойменних пунктів знаходять висоти геометричного геоїда або квазігеоїда як різницю між еліпсоїдною висотою та каталоговими значеннями ортометричних або нормальних висот. Для системи нормальних висот, формули для обчислення висот геометричного квазігеоїда будуть мати вигляд:

- для ґрунтових (вікових, фундаментальних) реперів

$$\zeta_0 = H - H^y \quad (3.4)$$

– для стінних реперів

$$\zeta_0 = H + h - H^y \quad (3.5)$$

де ζ_0 – висота геометричного квазігеоїда; H – еліпсоїдна висота; H^y – каталогове значення нормальної висоти пункту; h – геометричне перевищення, що виникає при GNSS-спостереженнях на стінних реперах (див. розділ 1.2.2). Якщо у наведених формулах, замість нормальної висоти, використати каталогові значення ортометричної висоти (H^g), то в результаті обчислень отримують висоту геометричного геоїда (N_0).

Отримані за формулою 3.4-3.5 висоти, надалі використовують для математичного моделювання поверхні геометричного квазігеоїда на певну територію. Точність такої моделі здебільшого залежить від певних критеріїв, зокрема:

- від кількості залучених пунктів;
- від частоти та конфігурації взаємного розташування пунктів один відносно одного;
- від рельєфу місцевості на яку планується створення моделі;
- від якості GNSS-спостережень на пунктах високоточного геометричного нівелювання;
- від площі території на яку потрібно створити модель;
- від методики математичного моделювання тощо.

Однак, якщо правильно врахувати всі критерії впливу, то точність створення моделі геометричного квазігеоїда буде на рівні точності GNSS-спостережень. Зокрема, таку точність простіше забезпечити для локальних територій. Отримані висоти геометричного квазігеоїда на пунктах високоточного геометричного нівелювання будуть наближено відповідати поверхні відліку традиційної системи висот (відліковому квазігеоїду), що умовно проходить через вихідний нуль-пункт для певного регіону.

Одноименні пункти, на яких одночасно відомі значення висот з геометричного нівелювання, еліпсоїдних висот із даних GNSS-спостережень, і разом висот геометричного квазігеоїда (або геоїда) називають пунктами GNSS-нівелювання. Висоти геометричного геоїда або квазігеоїда використовують для оцінювання точності висот глобальних та регіональних моделей геоїда, або відповідно, моделей квазігеоїда.

3.3.3. Похибки модельних висот геоїда/квазігеоїда

Розглянемо детальніше методику оцінювання висот моделей геоїда та квазігеоїда на пунктах GNSS-нівелювання. Попри велику кількість переваг методу GNSS-нівелювання перед традиційним геометричним нівелюванням, цей метод має певний суттєвий недолік. Недоліком визначення ортометричних та нормальних висот методом GNSS-нівелювання можна вважати сам факт використання саме модельних значень висот геоїда та квазігеоїда, а не їхніх “вимірних” величин. Така заміна призводить до появи різниць висот між “реальною” та змодельованою поверхнею. Для можливості оцінювання висот моделей геоїда або квазігеоїда, за “вимірні” значення, приймають висоти геометричного геоїда або квазігеоїда, що отримані на пунктах GNSS-нівелювання. Таким чином, різниця висот між геометричним та модельним геоїдом або квазігеоїдом буде являти собою похибку висот обраної моделі щодо традиційної системи висот:

$$\Delta N_{mod} = N_0 - N_{mod} \quad (3.6)$$

$$\Delta \zeta_{mod} = \zeta_0 - \zeta_{mod} \quad (3.7)$$

де ΔN_{mod} – похибка висот моделі геоїда; $\Delta \zeta_{mod}$ – похибка висот моделі квазігеоїда.

У випадку оцінювання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, точність модельних висот геоїда глобального масштабу прирівнюється до точності модельних висот квазігеоїда, тобто $\Delta N_{mod} = \Delta \zeta_{mod}$. Власне тому

висоти визначені із глобальних моделей називають висотами геоїда/квазігеоїда. Це пов'язано з тим, що числові значення змодельованих висот, як геоїда, так і квазігеоїда, в глобальному сенсі є практично тотожними величинами $N_{mod} \approx \zeta_{mod}$, і можуть дещо відрізнятись в районах із вираженим гірським рельєфом, де $N \neq \zeta$. Суть обчислення висот геоїда та квазігеоїда із даних глобальних моделей Землі полягає у тому, що спочатку обчислюють аномалії висот за теорією Молоденського (грубе наближення геоїда), а потім їх перетворюють у висоти геоїда шляхом введення додаткових поправок [9]. В більшості випадків, основними є поправки за рельєф, які обчислюють із даних моделі топографії ETOPO1 або EARTH2014. Таким чином, формулу оцінювання точності висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей щодо традиційної системи нормальних висот математично можна записати як:

$$\Delta N_{mod} = \zeta_0 - N_{mod} \quad (3.8)$$

Величини, знайдені за формулою (3.8), являють собою похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей щодо їхніх “вимірних” значень, тобто в цьому випадку – щодо висот геометричного квазігеоїда. Схематично, принцип оцінювання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей зображено на рисунку 3.5.

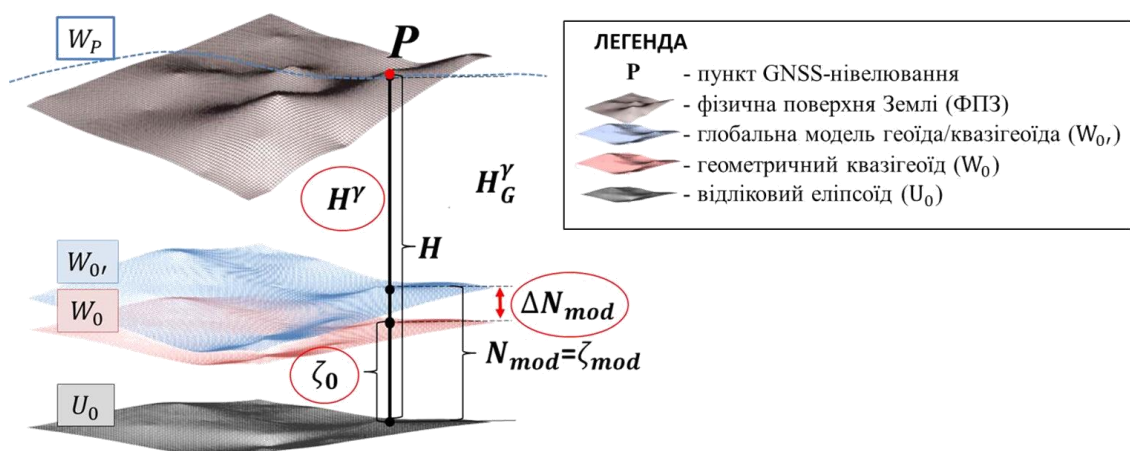


Рисунок 3.5 - Принцип оцінювання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

Стандартна методика оцінювання модельних висот геоїда/квазігеоїда полягає у тому, що поверхня геометричного квазігеоїда слугує у якості “істинного нуля” для модельних значень. З огляду властивостей та характеру зміни похибок модельних висот геоїда/квазігеоїда вони проявляються у вигляді “зсуву” щодо традиційних систем висот. Це своєю чергою свідчить про наявність систематичної складової у модельних значеннях висот. Для практичної реалізації методу GNSS-нівелювання з використанням висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей величина їхніх похибок має ключовий зміст. Найбільш точно систематичну складову можна виявити на локальних територіях, і якщо її величина не відповідає точності поставлених геодезичних завдань, то висоти геоїда/квазігеоїда глобальних моделей потрібно відкоригувати. Коригування модельних висот здійснюють на основі результатів різних методів інтерполяції та моделювання похибок за певними параметрами, після чого їх використовують, як поправки у нормальні (або ортометричні) висоти отримані із GNSS-нівелювання.

3.3. Локальна точність висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей на основі секторного аналізу

Детальний огляд та аналіз публікацій щодо перевірки точності висот моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 у різних країнах свідчить про те, що точність глобальних моделей може коливатися від кількох до десятків сантиметрів в межах одного регіону [85, 30, 82, 128, 161, 50, 77]. Звідси слідує, що фактичну точність висот глобальних моделей можна визначити лише на локальній території шляхом незалежного оцінювання на пунктах традиційних систем висот високих класів, які водночас є пунктами GNSS-нівелювання. Як зазначалося у розділі 3.2, важливими параметрами висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей є система припливів та ондуляція геоїда нульового порядку. При порівняльному аналізі точності висот між різними моделями потрібно, щоб вони були розраховані в одній системі припливів, наприклад “tide-free” та

зменшені або збільшені на параметр ондуляції (“zero-degree term”), величина та знак якого залежить від обраного відлікового еліпсоїда (див. розділ 3.2.2). Після врахування цих параметрів можна проаналізувати модельні висоти у відносній системі з вихідним пунктом посередині досліджуваної території, як зображено на рисунку 3.6. Це дасть можливість виявити грубі помилки моделювання висот глобальних моделей геоїда на територію досліджень та вилучити їх з подальшого аналізу. Відносна відлікова система також уможливує оцінювання всіх модельних висот та їхніх похибок, як один масив даних. У зв’язку з цим, на основі статистичних характеристик можна виконати аналіз тенденції просторової зміни цих величин. Крім того, аналіз у відносній системі доцільно здійснювати окремо для північної та південної частини досліджуваної території відносно вихідного пункту. Аналіз у різних напрямках необхідно виконувати, зокрема, якщо локальна територія охоплює різні форми рельєфу, тобто рівнинний-передгірський або передгірський-гірський.



Рисунок 3.6 - Територія досліджень з умовним вихідним пунктом відносної системи відліку

Для проведення практичного аналізу приймемо за початковий пункт станцію SULP (див. рис. 3.6). Від станції на північ розташовано 10 пунктів з

протяжністю близько 38 км, а на південь – 12 пунктів, що охоплюють територію приблизно 62 км. Знайдемо висоти геометричного квазігеоїда у відносній системі за такою формулою:

$$N_{\zeta_0}^{SULP-0} = N_{\zeta_0}^{SULP} - N_{\zeta_0}^P \quad (3.9)$$

де $N_{\zeta_0}^{SULP-0}$ – висота геометричного квазігеоїда у відносній системі; $N_{\zeta_0}^{SULP}$ – висота геометричного квазігеоїда станції SULP; $N_{\zeta_0}^P$ – висота геометричного квазігеоїда відповідного пункту висот. Заразом, підставивши у формулу 3.9, аналогічні значення модельних висот, отримаємо їх також у відносній системі. Похибки висот глобальних моделей також слід перевести у відносну систему відліку скориставшись формулою:

$$\Delta N_{mod}^{SULP-0} = \Delta N_{mod}^{SULP} - \Delta N_{mod}^P \quad (3.10)$$

З порівняння висот моделей з висотами геометричного квазігеоїда у відносній відліковій системі, серед обраних пунктів виявлено п'ять величин, де висоти геоїда/квазігеоїда всіх глобальних моделей відрізняються від геометричних значень за знаком та величиною, як наведено в таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Розбіжності висот геометричного квазігеоїда та висот глобальних моделей у відносній системі

Значення	Північні пункти (см)			Південні пункти (см)	
	NOVO3	700R	OPER2	HORO3	AVIA
$N_{\zeta_0}^{SULP-0}$	-1.8	-1.0	-3.6	-3.2	-3.1
N_{egm}^{SULP-0}	1.2	2.0	0.9	1.3	0.9
N_{eigen}^{SULP-0}	1.2	2.0	0.9	1.2	0.8
N_{geco}^{SULP-0}	1.4	2.1	1.0	1.0	0.5
N_{xgm}^{SULP-0}	0.6	1.6	0.7	1.4	1.0

На основі даних таблиці 3.4, для подальшого аналізу три пункти розташовані у північній частині та два пункти у – південній, потрібно вилучити із загального масиву даних. Таким чином, статистичний аналіз стосуватиметься 7 пунктів на півночі та 10 пунктів на півдні відносно станції SULP. У таблиці 3.5 наведено результати аналізу висот моделей на основі середнього (*avg.*), максимального (*max*), мінімального (*min*), стандартного відхилення (σ) і розмаху (*R*) значень, а в таблиці 3.6 наведено результати аналізу похибок висот моделей у відносній системі.

Таблиця 3.5

Статистики висот моделей для північної та південної території досліджень у відносній системі

Значення	<i>avg.</i> (м)	<i>max</i> (м)	<i>min</i> (м)	σ (м)	<i>R</i> (м)
$N_{north}^{SULP_0}$	0.14	0.40	-0.04	0.14	0.43
$N_{south}^{SULP_0}$	-0.25	0.02	-1.21	0.36	1.23

З даних таблиці 3.5 видно, що статистичні характеристики висот у північному напрямку значно менші, ніж у південному. Стандартне відхилення для північних висот моделі геоїда становить 0.14 м, а для південних даних – 0.36 м. Розмах значень на північ становить 0.43 м, а на південь 1.23 м, що майже втричі перевищує північні значення. Північні середні значення становлять 0.14 м, а південні – 0.25 м. Мінімальні та максимальні значення коливаються від -0.04 м до +0.40 м для північної частини та від -1.21 м до +0.02 м для південної частини. Такі результати свідчать про посилення хвилястості висот геоїда на південь. Північна територія лише на 24 км менша за південну, що вказує на те, що в загальному розумінні досліджувана територія знаходиться на стику значних перепадів висот “реального” геоїда.

Статистики похибок висот моделей в північному та південному напрямках у відносній системі

Значення	<i>avg.</i> (см)	<i>max</i> (см)	<i>min</i> (см)	σ (см)	<i>R</i> (см)
$\Delta N_{north}^{SULP.0}$	0.4	6.0	-3.9	2.9	9.9
$\Delta N_{south}^{SULP.0}$	0.0	7.0	-3.0	2.3	10.0

Результати в таблиці 3.6 показують, що похибкам моделей у відносній системі властивий більш систематичний характер зміни у двох напрямках. Середні значення дорівнюють нулю, мінімальне і максимальне значення відрізняються на 1 см, а розмах значень однаковий. Стандартне відхилення північних значень становить 2.9 см, а південних – 2.3 см. Це означає, що істотної просторової зміни похибок у двох напрямках не спостерігається та свідчить про наявність систематичної складової.

Після вилучення грубих похибок на основі аналізу у відносній системі потрібно провести порівняння висот кожної моделі з висотами геометричного квазігеоїда скориставшись формулою 3.8. Для візуального аналізу необхідно побудувати контурні графіки похибок, як показано на рисунку 3.7, де:

- похибки розраховані на основі висот геометричного квазігеоїда у Балтійській системі нормальних висот;
- відстань між ізолініями складає 1 см;
- підпис на картах ΔN^G , з індексом G , означає відліковий еліпсоїд GRS80;
- темніша градація означає, що значення похибок збільшуються зі знаком мінус;
- найсвітліша градація вказує лише на додатні значення;
- похибки стосуються виключно базових систем припливів відповідних моделей.

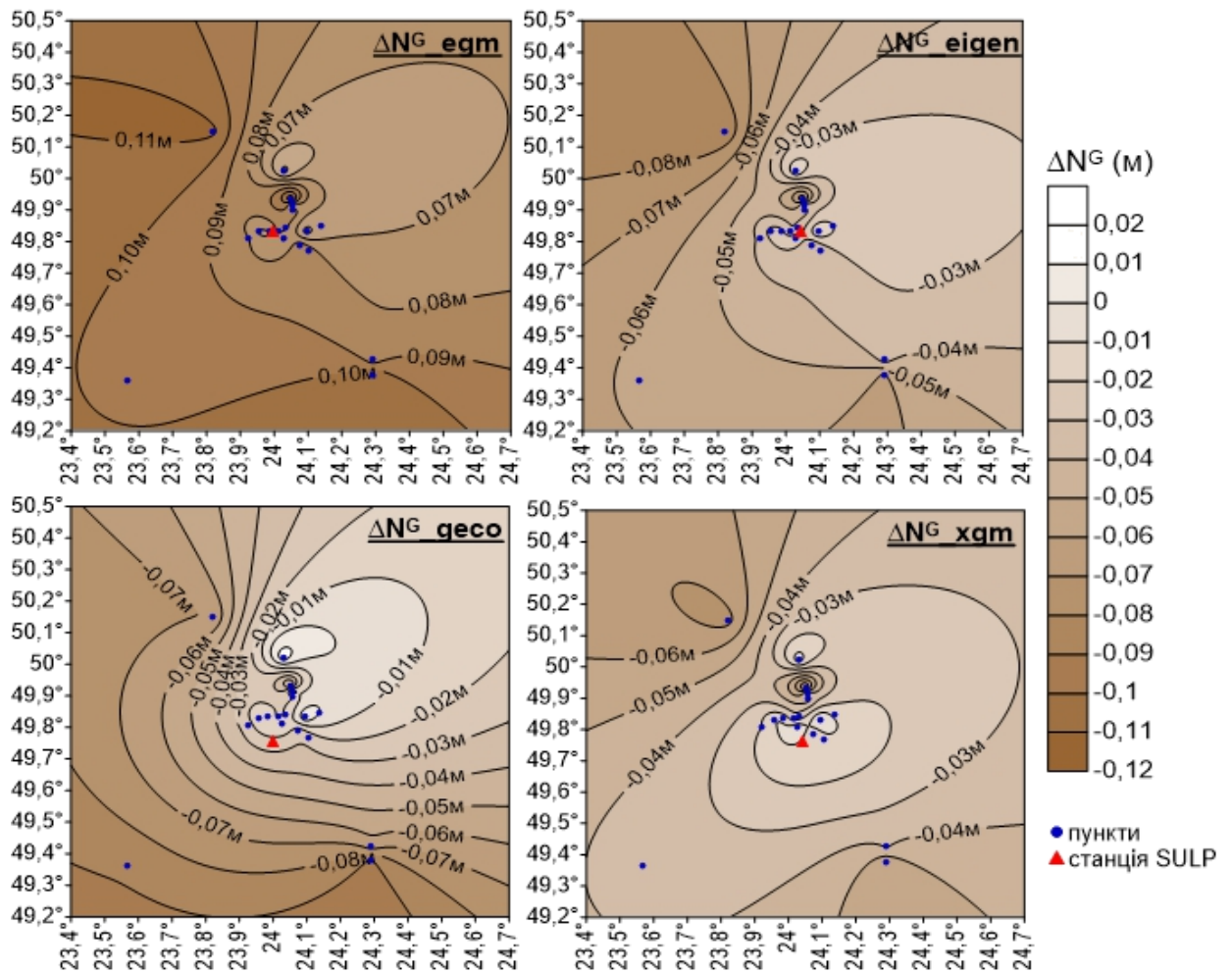


Рисунок 3.7 – Візуалізація похибок висот глобальних моделей

Як бачимо з рисунка 3.7, похибки моделі EGM2008 збільшуються з північного сходу на південний захід. Похибки моделі EIGEN-6C4 мають таку ж властивість зміни, однак є меншими за величиною. Діапазон значень похибок висот моделей GECO та XGM2019e_2159 майже однаковий, але має дещо різний просторовий характер зміни. Похибки моделі GECO змінюються з північно-східного напрямку у південно-західний з більш інтенсивною щільністю, а похибки XGM2019e_2159 мають більш пологі зміни. Похибки моделі EGM2008 є виключно від’ємними величинами, а для трьох інших моделей вони мають як додатні, так і від’ємні значення. Результати статистичних характеристик похибок представлено в таблиці 3.7.

Статистичні характеристики похибок глобальних моделей геоїда

Статистики (см)	ΔN_{egm}	ΔN_{eigen}	ΔN_{geco}	ΔN_{xgm}
Середнє (<i>avg.</i>)	-8.2	-3.9	-2.9	-2.8
Мінімальне (<i>min</i>)	-4.7	-1.0	1.7	0.2
Максимальне (<i>max</i>)	-12.1	-8.9	-9.2	-8.5
Розмах (<i>R</i>)	7.4	7.9	10.9	8.7
Стандартне відхилення (σ)	2.0	2.2	3.2	2.4
Середньоквадратичне відхилення (<i>m</i>)	8.6	4.6	4.4	3.8

Узагальнюючи статистичні характеристики кожної моделі, можна зробити висновок, що похибки, отримані з моделі XGM2019e, є найменшими. Однак слід також зазначити, що похибки моделей змінюються в межах кількох сантиметрів з додатними й від'ємними значеннями навіть між найближчими пунктами висот нівелірної мережі, на яких виконано GNSS-нівелювання. Теоретично така зміна різниці похибок не повинна проявлятися на відносно невеликій території.

Проаналізувавши таким чином отримані похибки моделей геоїда можна зробити висновок про те, що вони мають досить різнобічні властивості, що унеможлиблює пряме використання тієї чи іншої моделі геоїда в практичних цілях для більш високоточних геодезичних робіт. Тобто, при отриманні нормальної висоти методом GNSS-нівелювання в довільній точці досліджуваної території вона буде визначена з певною загальною похибкою, яка своєю чергою здебільшого буде залежати від похибки конкретної моделі геоїда у цій точці земної поверхні. Врахувати похибку висот моделі для невідомого пункту можна шляхом усереднення значень всіх похибок отриманих на пунктах GNSS-нівелювання. Однак, результати [217] свідчать про те, що такий спосіб доцільно використовувати лише для локальної території розміром приблизно 10-15 км. Якщо досліджувана територія в кілька разів більша, то для усереднення похибок висот моделей геоїда можна застосувати методику секторного аналізу [39]. Суть такого аналізу полягає в тому, щоб більш детально уточнити середню похибку

моделі геоїда навколо певного “початкового” пункту у заданому напрямку здійснивши поділ території на вісім секторів: North, North_East, East, South_East, South, South_West, West та North_West. Для кожного сектора розраховують середні значення похибок висот моделей геоїда на основі даних пунктів нівелювання які потрапляли у відповідний сектор. На рисунку 3.8 зображено принцип усереднення та розподілу похибок за методикою секторного аналізу.

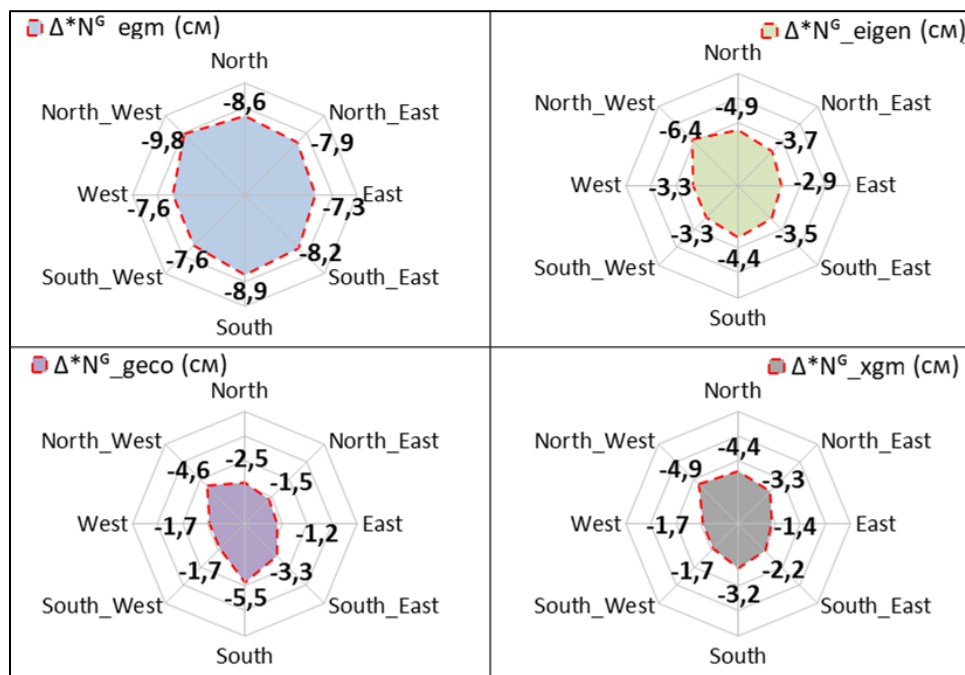


Рисунок 3.8 – Розподіл усереднених похибок висот моделей геоїда за методикою секторного аналізу відносно вихідного пункту

З рисунка 3.8, бачимо, що коливання середніх значень у секторах становить від -7.3 см до -9.8 см, від -2.9 см до -6.4 см, від -1.2 см до -5.5 см та від -1.4 до -4.9 см для моделей геоїда EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 відповідно. Стандартне відхилення середніх похибок за секторним аналізом становить ± 0.8 см для моделі геоїда EGM2008, ± 1.2 см для EIGEN-6C4, ± 1.6 см для GECO та ± 1.3 см для XGM2019e_2159. Тепер за результатами секторного аналізу похибок висот моделей геоїда на територію досліджень слід повторно побудувати контурні карти просторового розподілу усереднених значень, як зображено на рисунку 3.9.

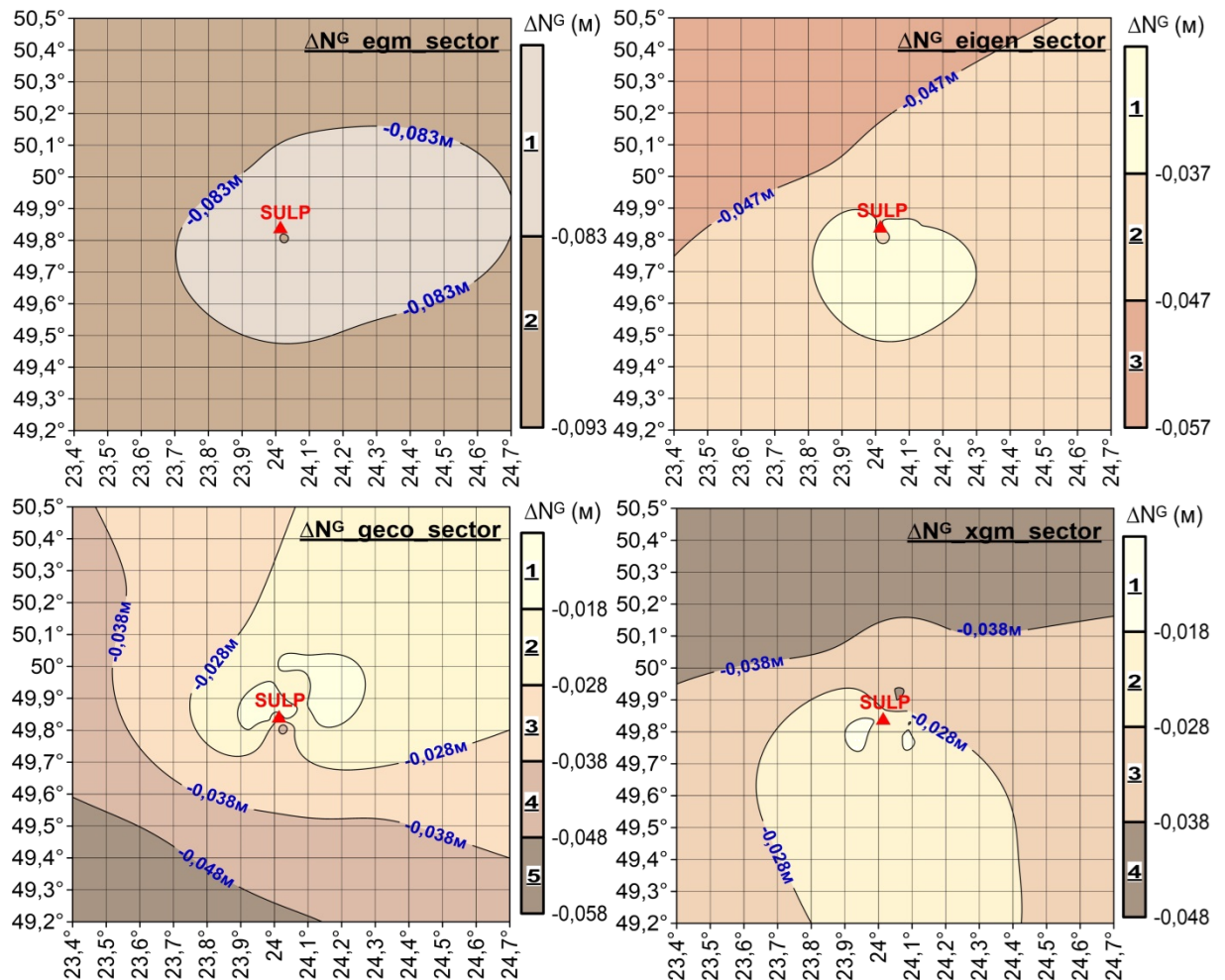


Рисунок 3.9 - Контурні карти усереднених похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 за методом секторного аналізу

З рисунка 3.9 видно, що контурна карта похибок висот моделі EGM2008 складається із двох секцій середніх значень похибок, моделі EIGEN-6C4 із трьох, GECO із п'яти, а модель XGM2019e_2159 із чотирьох секцій. Кожна секція відповідає 1 см просторової зміни усередненої похибки.

За даними таких контурних карт (див. рис. 3.9) необхідно виконати коригування модельних значень висот геоїда/квазігеоїда кожної моделі для відповідних пунктів GNSS-нівелювання за формулою:

$$N_{mod}^{sec} = N_{mod} + \Delta N_{mod}^{sec}(B, L) \quad (3.11)$$

де N_{mod}^{sec} – скоригована висота моделі геоїда за методикою секторного аналізу; N_{mod} – висота моделі геоїда/квазігеоїда відносно поверхні еліпсоїда GRS80 приведена до масштабу геометричного квазігеоїда; $\Delta N_{mod}^{sec}(B, L)$ – усереднена похибка відповідної секції в яку потрапляє шуканий пункт.

Після вилучення усередненої систематичної складової похибки висот моделей потрібно повторно провести оцінку точності щодо висот геометричного квазігеоїда, результати якої наведено в таблиці 3.8.

Таблиця 3.8

Статистичні характеристики залишкових похибок висот моделей геоїда після корегування за методикою секторного аналізу

Статистики (см)	ΔN_{egm}^{sec}	ΔN_{eigen}^{sec}	ΔN_{geco}^{sec}	ΔN_{xgm}^{sec}
Середнє (<i>avg.</i>)	0.4	0.4	0.1	0.3
Мінімальне (<i>min</i>)	-3.8	-3.4	-4.2	-3.7
Максимальне (<i>max</i>)	3.6	3.5	3.8	3.3
Розмах (<i>R</i>)	7.4	6.9	8.0	7.0
Стандартне відхилення (σ)	1.8	1.9	2.5	2.0
Середньоквадратичне відхилення (<i>m</i>)	1.9	2.0	2.5	2.0

З таблиці 3.8 бачимо, що стандартні відхилення залишкових похибок висот моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO і XGM2019e_2159 становлять ± 1.8 см, ± 1.9 см, ± 2.5 см та ± 2.0 см відповідно. Такий результат на 7-22% кращий за початкові відхилення похибок (див. табл. 3.7). Середньоквадратичні значення залишкових похибок після коригування висот моделей на основі секторного аналізу становлять ± 1.9 см, ± 2.0 см, ± 2.5 см та ± 2.0 см відповідно для кожної моделі, що на 42-78% краще, ніж первинні значення.

Методика секторного аналізу уможливорює вилучення систематичної складової похибок висот глобальних моделей до рівня точності їхнього стандартного відхилення. Однак, величина стандартного відхилення також може не задовольняти вимоги щодо точності визначення висот, тому для високоточних робіт таке коригування буде недостатнім.

Висновки до розділу 3

1. Розглянуто загальні особливості математичних моделей геоїда та квазігеоїда, що дало змогу проаналізувати відмінності та спільні характеристики між моделями різного масштабу. Точність висот глобальних моделей високого ступеня та порядку сягає точності деяких моделей регіонального/локального рівня, а для певних регіонів планети є навіть кращою. Висоти глобальних моделей можна використовувати, як альтернативу, менш точним регіональним моделям, при виконанні GNSS-нівелювання.

2. Показано, що пряме застосування висот глобальних моделей для реалізації методу GNSS-нівелювання є малоефективним. Для визначення нормальних чи ортометричних висот методом GNSS-нівелювання із використанням висот глобальних моделей необхідно враховувати основні параметри, що мають безпосередній вплив на точність. Для забезпечення належної точності необхідно обов'язково врахувати два основні параметри: 1) величину ондуляції геоїда нульового порядку та 2) оптимальну систему припливів при обчисленні висот із глобальних моделей.

3. З проведеного огляду моделей регіонального/локального масштабу встановлено, що:

- модель EGG2015 з роздільною здатністю $10' \times 15'$ є досить неточною для території України, оскільки стандартне відхилення різниць висот цієї моделі сягає 18.3 см навіть на локальній території;
- модель УКГ2012, створена спеціально для території України, однак використовуватися для реалізації GNSS-нівелювання також не може, оскільки її дані не є загальнодоступними;
- модель PL-quasi-geoid2021, створена для території Польщі, спеціально для можливості виконання високоточного GNSS-нівелювання на рівні 1-2 см, і вона може використовуватися, як еталонна модель у дослідницьких цілях;

- висоти геометричного квазігеоїда, отримані на пунктах GNSS-нівелювання можна використовувати, для виявлення похибок висот глобальних моделей;
- систематичні похибки модельних висот є основною характеристикою точності глобальних моделей та можуть бути використані для коригування висот.

4. Проведено коригування висот глобальних моделей на основі секторного аналізу, який уможливорює більш точно встановити систематичну складову похибок висот глобальних моделей порівняно зі звичайним алгебраїчним усередненням величин похибок для локальних територій. Крім того, такий підхід дозволяє зменшити вплив систематичної складової до рівня 2 см, що відповідає точності стандартного відхилення похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей. Для зменшення величини стандартного відхилення похибок, потрібно застосовувати складнішу методику коригування висот, яку власне представлено у четвертому розділі цієї роботи.

РОЗДІЛ 4. РОЗРОБЛЕННЯ МЕТОДИКИ ЛОКАЛЬНОГО КОРИГУВАННЯ ВИСОТ ГЛОБАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ

У попередніх розділах детально розглянуто різнобічні аспекти визначення ортометричних та нормальних висот за допомогою методу GNSS-нівелювання. Разом з тим, виділено, що для реалізації методу GNSS-нівелювання з вищою точністю потрібно використовувати високоточну модель висот геоїда або квазігеоїда. Попри стрімкий розвиток можливостей GNSS-систем питання створення таких моделей для деяких регіонів планети залишається відкритим, а наявні регіональні/локальні моделі не завжди відповідають високому рівню точності. Тому, у цій роботі пропонується використання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку з додатковим їх коригуванням. Точність висот отриманих із відповідної глобальної моделі залежить також від конкретного регіону, тому спочатку необхідно здійснити оцінку їхньої точності на пунктах високоточного геометричного нівелювання, які водночас є пунктами GNSS-нівелювання (див. розділ 3.3.2). Як показує практика, результати такого оцінювання уможливають виявлення систематичних похибок висот глобальних моделей, після чого з'являється можливість провести коригування висот обраної глобальної моделі для такого регіону.

Стандартним підходом щодо регіонального або локального розв'язання цієї проблеми є застосування різноманітних математичних функцій [80, 165, 15]. При цьому, класичні математичні підходи дещо обмежують можливості щодо високоточного коригування висот глобальних моделей для найкращого узгодження з офіційною системою висот. Крім того, невідомі коефіцієнти, що отримують у результаті використання математичних функцій необхідно підбирати індивідуально на кожну регіональну/локальну територію. Загалом існує багато досліджень на цю тему, однак, як показує практика пошук рішень щодо коригування висот обраної моделі геоїда/квазігеоїда залежить від чинників, які не мають спільного знаменника для різних географічних

територій [32, 91, 60, 125, 5]. В цілях підвищення точності методу GNSS-нівелювання на основі використання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку, у цій роботі представлено більш універсальну методику їхнього коригування.

4.1. Методика локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

Суть застосування будь-якої методики полягає у поєднанні певних способів та прийомів для доцільного отримання бажаних результатів. На рисунку 4.1 наведено загальну блок-схему методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей.

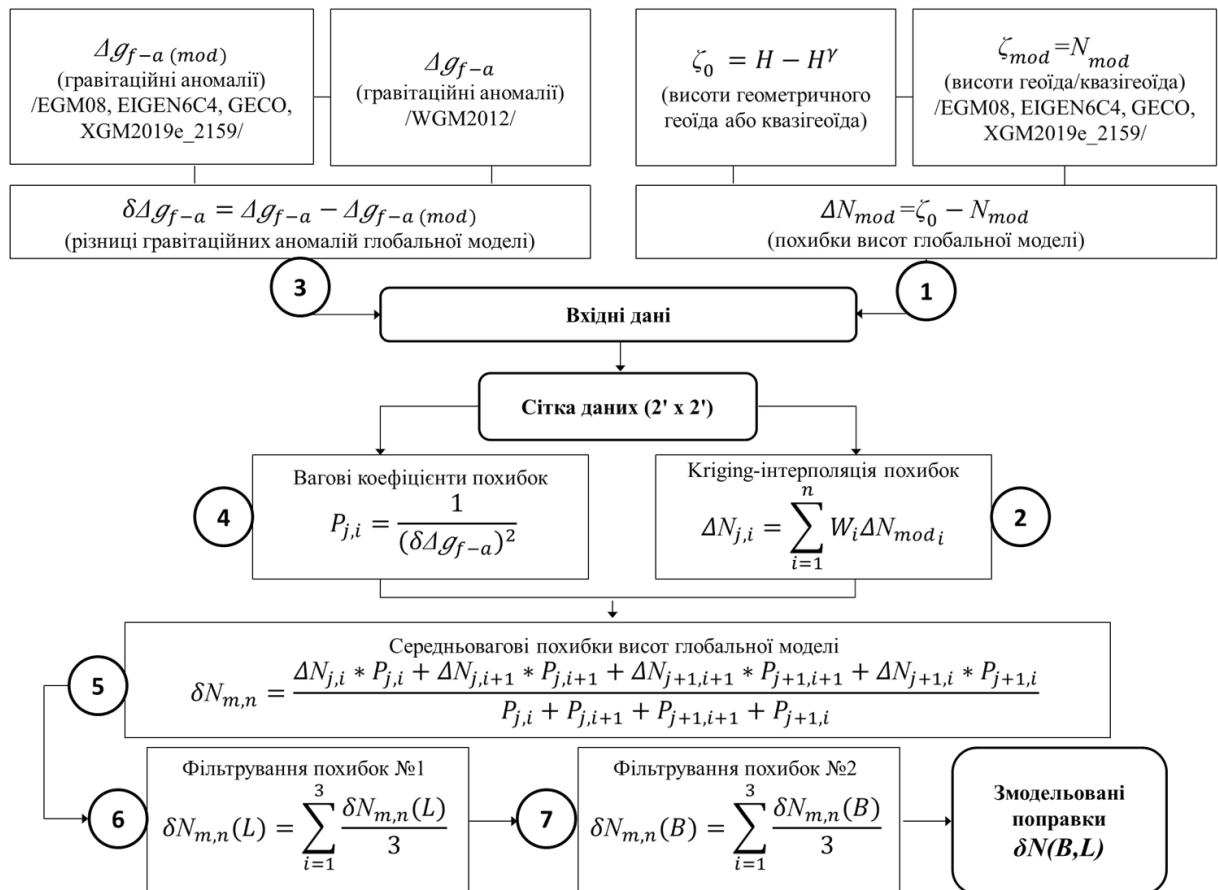


Рисунок 4.1 - Блок-схема методики локального коригування висот глобальних моделей геоїда

Реалізація методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей складається із наступних кроків:

- 1) на контрольних пунктах високоточного геометричного нівелювання виконують GNSS-нівелювання та за формулою (3.8) обчислюють похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей ΔN_{mod} ;
- 2) на основі похибок висот отриманих у контрольних пунктах створюють регулярну сітку з кроком $2' \times 2'$ та вузлами $\Delta N_{j,i}$ інтерполяційним Kriging-методом (рисунок 4.2 – суцільна чорна лінія);
- 3) для вузлів створеної сітки обчислюють різниці гравітаційних аномалій у вільному повітрі:

$$\delta\Delta g_{f-a} = \Delta g_{f-a} - \Delta g_{f-a(mod)} \quad (4.1)$$

де Δg_{f-a} – аномалії у вільному повітрі взяті з глобальної моделі гравітаційних аномалій Землі WGM2012, яка має високу роздільну здатність $2' \times 2'$ [159], $\Delta g_{f-a(mod)}$ – гравітаційні аномалії відповідної глобальної моделі геоїда/квазігеоїда обчислені з кроком $2' \times 2'$ через утиліту сайту ICGEM <Calculation Service>-<Regular grids>-<gravity anomaly> [63].

- 4) на основі різниць гравітаційних аномалій ($\delta\Delta g_{f-a}$) знаходять вагові коефіцієнти, щоб утворилася сітка з кроком $2' \times 2'$ та вузлами $P_{j,i}$, як у пунктах 1-2:

$$P_{j,i} = \frac{1}{(\delta\Delta g_{f-a})^2} \quad (4.2)$$

- 5) за даними пунктів 1 та 4 знаходять середньовагові похибки висот та створюють іншу сітку ($\delta N_{m,n}$) на основі значень вузлів сітки $\Delta N_{j,i}$ та відповідних їм вагових коефіцієнтів $P_{j,i}$ (рисунок 4.2 – синя штрихова лінія):

$$\delta N_{m,n} = \frac{\Delta N_{j,i} * P_{j,i} + \Delta N_{j,i+1} * P_{j,i+1} + \Delta N_{j+1,i+1} * P_{j+1,i+1} + \Delta N_{j+1,i} * P_{j+1,i}}{P_{j,i} + P_{j,i+1} + P_{j+1,i+1} + P_{j+1,i}} \quad (4.3)$$

де, утворена сітка $\delta N_{m,n}$ буде з властивостями:

- крок $2' \times 2'$ та розмірності $\Delta N_{j-1.i-1}$;
 - $\delta N_{m,n} \neq \delta N_{m,n+1} \neq \delta N_{m+1.n+1} \neq \dots \neq \delta N_{m+1.n}$
 - $\delta N_{m,n}(B, L) = \{\Delta N_{j,i} * P_{j,i}(B, L), \dots, \Delta N_{j+1.i} * P_{j+1.i}(B, L)\} = const$;
- б) проводять перше фільтрування значень $\delta N_{m,n}$ по довготі методом середнього ковзкого:

$$\delta N_{m,n}(L) = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta N_{m,n}(L)}{3} \quad (4.4)$$

- 7) виконують друге фільтрування значень $\delta N_{m,n}$ по широті також методом середнього ковзкого:

$$\delta N_{m,n}(B) = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta N_{m,n}(B)}{3} \quad (4.5)$$

Отримані значення за формулою (4.5) будуть відповідати інтерпольованим, врівноваженим та змодельованим поправкам коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей ($\delta N_{m,n}(B, L)$) щодо прийнятої системи відліку висот в межах обраної території. Таким чином, формули (1.8-1.9) для обчислення ортометричних або нормальних висот за даними методу GNSS-нівелювання набудуть вигляду:

$$H_G^O = H - N_{mod} + \delta N_{m,n}(B, L) \quad (4.6)$$

$$H_G^Y = H - \zeta_{mod} + \delta N_{m,n}(B, L) \quad (4.7)$$

На рисунку 4.2 схематично представлено методику створення сіток похибок висот глобальних моделей та принцип її використання для перетворення похибок у поправки висот. Утворені за методикою локального коригування висот сітки похибок та поправок мають наступні властивості:

- крок сітки інтерпольованих похибок має дорівнювати роздільній здатності отриманих різниць гравітаційних аномалій;

- сітка врівноважених похибок буде з ідентичним кроком, але розмірності $j - 1$ та $i - 1$;
- значення суміжних комірок неоднакові за величиною;
- середньовагові похибки є сталими величинами в межах відповідної комірки для всіх шуканих пунктів, що потрапляють в її межі.

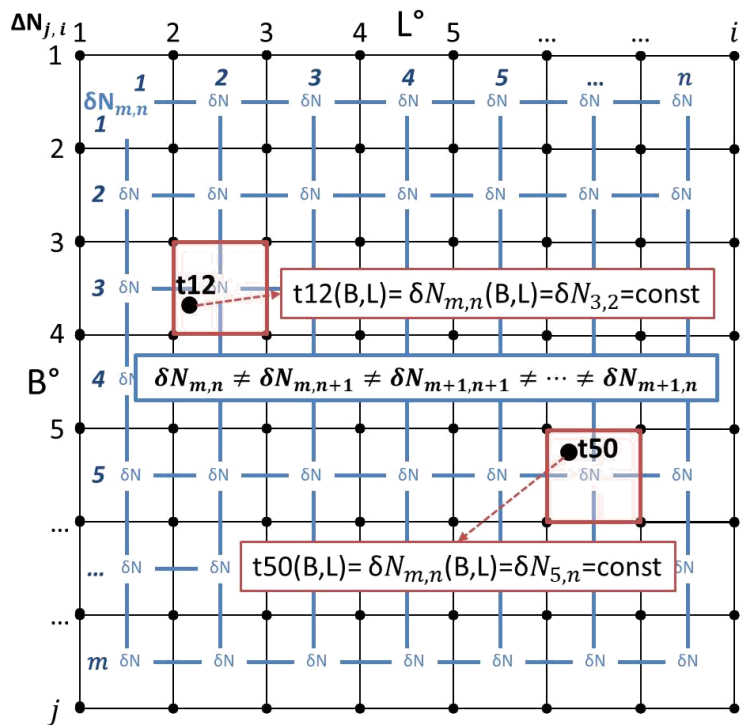


Рисунок 4.2 - Методика створення сіток значень похибок та принцип їх використання

Однією з характерних рис запропонованої методики є те, що для моделювання поправок коригування висот на задану територію, необхідно мати мінімум чотири відомих значення похибок висот глобальної моделі на однойменних контрольних пунктах високоточного геометричного нівелювання та GNSS-нівелювання. Всі інші величини необхідні для моделювання знаходяться у вільному доступі на сайтах служби ICGEM [63] та BGI (Bureau Gravimétrique International) [159]. Мінімальна кількість контрольних пунктів обумовлена необхідністю використання програмного забезпечення, що підтримує функції інтерполяції даних на регулярну сітку. Обчислені вагові коефіцієнти на основі різниць гравітаційних аномалій

уможливлюють врівноваження інтерпольованих похибок для невідомих пунктів. Фільтрування змодельованих похибок методом середнього ковзкого необхідно для мінімізації впливу випадкових “викидів” похідних від похибок визначення еліпсоїдних висот із даних GNSS-спостережень.

4.1.1. Аналіз основних параметрів локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

Для можливості практичної реалізації методики підвищення точності методу GNSS-нівелювання на основі локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, попередньо необхідно здійснити аналіз основних параметрів коригування модельних значень [224], а саме:

- 1) похибок висот глобальних моделей (ΔN_{mod}) отриманих у контрольних пунктах;
- 2) різниць гравітаційних аномалій у вільному повітрі ($\delta\Delta g_{f-a}$) для контрольних пунктів;
- 3) скоригованих похибок ($\Delta N(P)_{mod}$) за ваговими коефіцієнтами різниць гравітаційних аномалій.

Всі ці параметри потрібно проаналізувати з урахуванням різних систем припливів висот глобальних моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 як-от: “tide-free”, “zero-tide” та “mean-tide”. Отже, для цього необхідно отримати початкові висоти моделей геоїда/квазігеоїда та гравітаційні аномалії моделей в перелічених припливних системах через утиліту сайту ICGEM – *<User-Defined Points>*.

Похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей обчислюють за формулою (3.8), а різниці гравітаційних аномалій у вільному повітрі за формулою (4.1). Скориговані похибки висот для однойменних контрольних пунктів можна знайти з такого виразу:

$$\Delta N(P)_{mod} = \frac{\Delta N_{mod} * P}{2P} \quad (4.8)$$

При цьому, для розрахунку вагових коефіцієнтів необхідно використати значення гравітаційних аномалій у вільному повітрі з карти WGM2012 для відповідного пункту та значення гравітаційних аномалій глобальних моделей геоїда/квазігеоїда для цього ж пункту.

Основні параметри локального коригування слід оцінити з огляду середніх квадратичних відхилень (m) та стандартних відхилень (σ). Для похибок висот глобальних моделей числові значення цих статистик знайдемо з наступних формул:

$$m_{\Delta N} = \sqrt{\frac{\Delta N_{mod}^2}{n-1}} \quad (4.9)$$

$$\sigma_{\Delta N} = \sqrt{\frac{\overline{\Delta N_{mod}^2}}{n-1}} \quad (4.10)$$

де ΔN_{mod} – похибки висот моделей геоїда/квазігеоїда отримані за формулою (3.8); $\overline{\Delta N_{mod}^2} = \zeta_0 - (\zeta_0 + N_{mod})/2$ значення похибки висот без усередненої систематичної складової. Підставивши у формули (4.9) та (4.10) значення $\delta\Delta g_{f-a}$ та $\Delta N(P)_{mod}$ отримаємо статистики для різниць гравітаційних аномалій та скоригованих похибок висот за ваговими коефіцієнтами. Разом з тим, значення $\sigma_{\Delta N}$, $\sigma_{\delta\Delta g}$ та $m_{\Delta N}$, $m_{\delta\Delta g}$ покажуть характер зміни фактичної точності висот кожної глобальної моделі геоїда/квазігеоїда для різних припливних систем. Значення $\sigma_{\Delta N(P)}$ та $m_{\Delta N(P)}$ вказуватимуть на апріорну точність можливості коригування висот моделей геоїда/квазігеоїда за принципом середнього вагового для нерівномірно розташованих пунктів.

Для практичного аналізу візьмемо дані 14 пунктів висот високоточного геометричного нівелювання на яких виконано GNSS-нівелювання (рисунок 4.3). Оцінювання пунктів необхідно здійснити з огляду точності:

- 1) всіх пунктів (територія Т);
- 2) північних пунктів (територія N);

- 3) південних пунктів (територія S);
- 4) кожного пункту окремо.

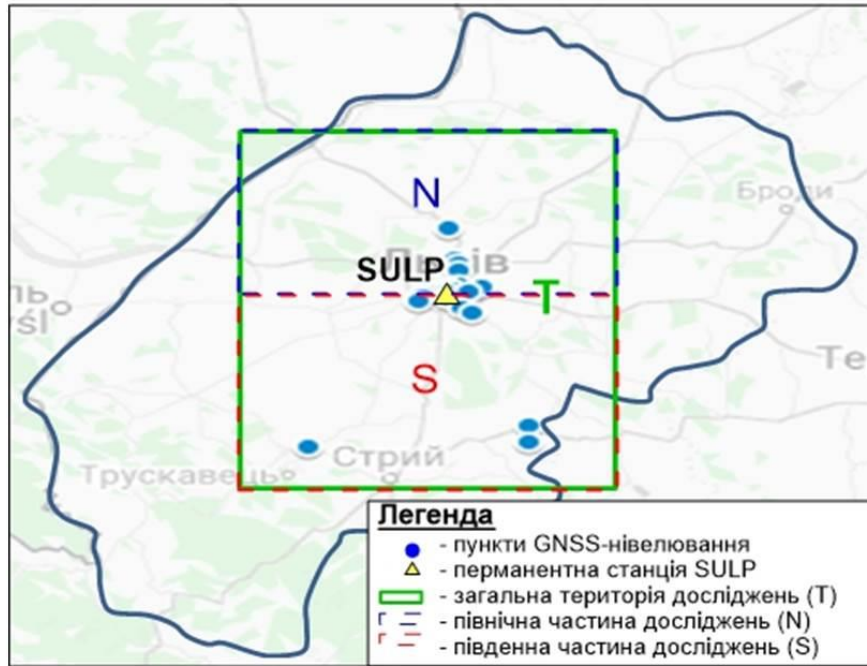


Рисунок 4.3 – Території оцінювання похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

В таблиці 4.1 наведено стандартні відхилення похибок висот та різниць гравітаційних аномалій моделей EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 в трьох системах припливів, а в таблиці 4.2 – їхні середні квадратичні відхилення.

Таблиця 4.1

Стандартні відхилення похибок висот та різниць гравітаційних аномалій

Система припливів		“tide-free”				“mean-tide”				“zero-tide”			
Назва моделі та територія		egm	eigen	geco	xgm	egm	eigen	geco	xgm	egm	eigen	geco	xgm
$\sigma_{\Delta N}$ (см)	T	2.0	2.3	3.1	2.5	2.1	2.3	3.2	2.5	2.1	2.3	3.2	2.5
	N	2.7	3.0	3.1	3.0	2.6	3.0	3.1	3.0	2.7	3.0	3.1	3.0
	S	1.4	1.4	3.3	1.5	1.5	1.6	3.5	1.6	1.4	1.5	3.4	1.5
$\sigma_{\delta\Delta g}$ (мГал)	T	0.1	0.1	0.7	1.4	0.1	0.1	0.7	1.4	0.1	0.1	0.7	1.4
	N	0.1	0.2	0.3	1.1	0.1	0.2	0.3	1.1	0.1	0.2	0.3	1.1
	S	0.1	0.1	0.9	1.0	0.1	0.1	0.9	1.0	0.1	0.1	0.9	1.0

Відповідно до даних таблиці 4.1. стандартні відхилення похибок висот та різниць гравітаційних аномалій майже однакові для однойменних моделей геоїда, незалежно від типу приливної системи. При цьому, існують різниці у значеннях між північними та південними пунктами, які становлять 1.6 см і 0.6 мГал відповідно. Це свідчить про чутливість зміни похибок висот глобальних моделей навіть в межах локальних територій.

Таблиця 4.2

**Середні квадратичні відхилення похибок висот
та різниць гравітаційних аномалій**

Система припливів		“tide-free”				“mean-tide”				“zero-tide”			
Назва моделі та територія		egm	eigen	geco	xgm	egm	eigen	geco	xgm	egm	eigen	geco	xgm
$m_{\Delta N}$ (см)	T	9.3	5.1	4.5	4.3	2.9	6.9	8.6	8.1	6.9	3.2	3.5	2.9
	N	11.4	6.9	4.7	6.4	3.7	7.8	10.7	8.4	8.6	4.7	3.8	4.3
	S	10.4	4.7	5.8	3.0	3.0	8.4	9.5	10.4	7.5	2.3	4.3	1.9
$m_{\Delta g}$ (мГал)	T	0.2	0.8	1.8	2.1	0.2	0.8	1.8	2.1	0.2	0.8	1.8	2.1
	N	0.2	0.8	2.4	1.4	0.2	0.9	2.4	1.4	0.2	0.9	2.4	1.4
	S	0.2	1.0	1.8	3.3	0.2	1.0	1.8	3.3	0.2	1.0	1.8	3.3

Результати таблиці 4.2 показують, що середні квадратичні відхилення похибок висот моделей геоїда/квазігеоїда суттєво відрізняються для різних приливних систем. Різниця похибок висот між системами припливів для моделі EGM2008 становить 2.4-6.4 см, для EIGEN-6C4 – 1.9 см, для GECO – 1-4.1 см, для XGM2019e_2159 – 1.4-3.8 см. Крім того, існують певні розбіжності у значеннях між північними та південними даними для кожної моделі, які становлять 0.8-1.1 см, 0.6-2.4 см, 0.5-1.2 см і 1.9-3.4 см відповідно. Для однойменних моделей середні квадратичні відхилення різниць гравітаційних аномалій однакові у всіх трьох приливних системах. Північні та південні значення моделі EGM2008 є однаковими, проте, для моделі EIGEN-6C4 вони різняться на 0.1 мГал, для GECO на 0.6 мГал та для моделі XGM2019e_2159 на 1.9 мГал.

Як зазначалося вище, аналіз точності основних параметрів коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей необхідно також провести для кожного пункту окремо. Отримані значення стандартних відхилень та середніх квадратичних відхилень потрібно проаналізувати за принципом кількісного відношення результатів оцінювання щодо зміни точності через 1 см для похибок висот, а також через 0.1 мГал – для різниць гравітаційних аномалій. Графічний результат кількісного розподілу статистичних характеристик похибок висот для систем припливів “tide-free”; “mean-tide”; “zero-tide” показано на рисунку 4.4 та 4.5, а різниць гравітаційних аномалій на рисунках 4.6-4.7.

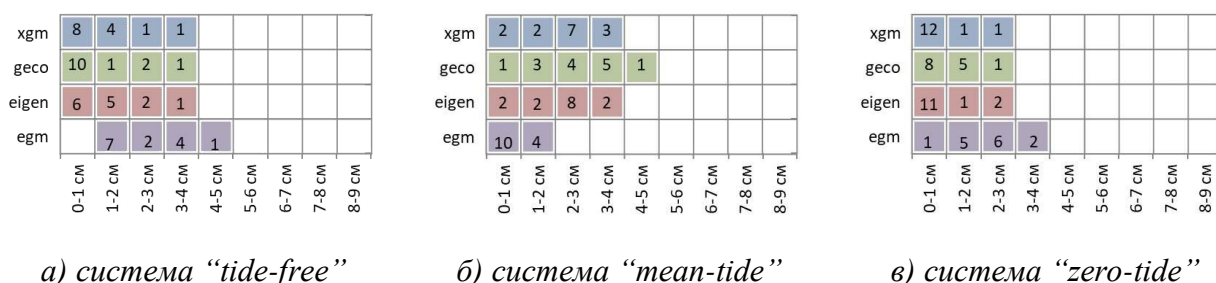


Рисунок 4.4 – Кількісний розподіл стандартних відхилень похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

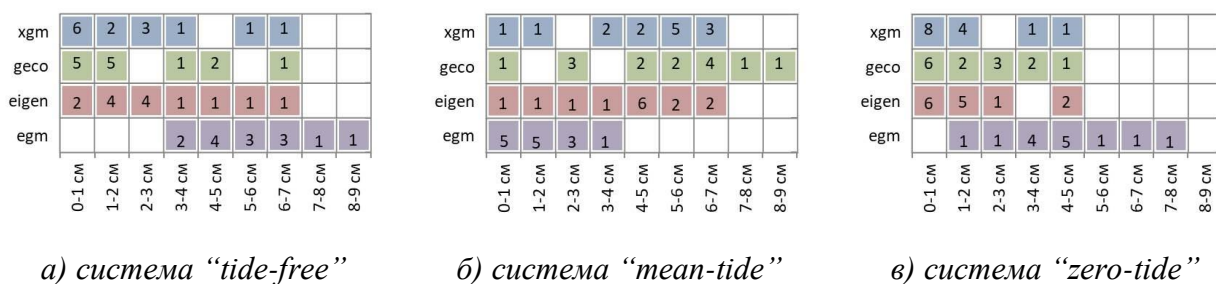


Рисунок 4.5 – Кількісний розподіл середніх квадратичних відхилень похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

З огляду стандартних відхилень, для моделі EGM2008 значення знаходяться в межах 5 см, 2 см, 4 см у системах припливів “free/mean/zero-tide”, (див. рис. 4.4). Цей результат може сягати 4 см, 4 см, 3 см для моделей EIGEN-6C4, XGM2019e_2159 та 4 см, 5 см, 3 см для моделі GECO. Значення

середньоквадратичних відхилень (див. рис. 4.5) мають загалом розсіяний характер зміни. Можна виділити більш згруповані значення для моделі EGM2008 у системі “mean-tide” з максимальним значенням 4 см та для моделей EIGEN-6C4, GECO, XGM2019e_2159 в системі “zero-tide” з максимальним значенням 5 см.

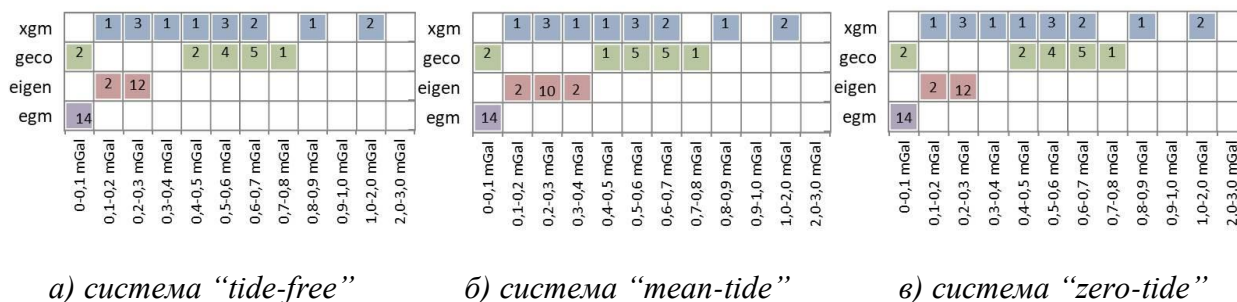


Рисунок 4.6 – Кількісний розподіл стандартних відхилень різниць гравітаційних аномалій глобальних моделей

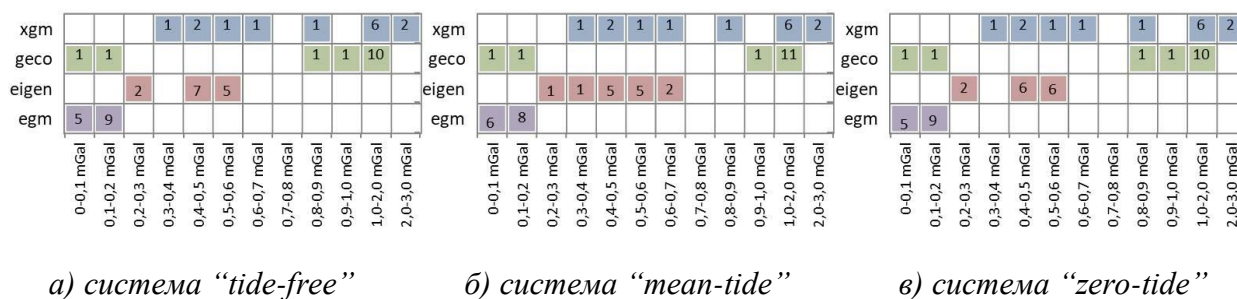


Рисунок 4.7 – Кількісний розподіл середніх квадратичних відхилень різниць гравітаційних аномалій глобальних моделей геоїда

З рисунка 4.6 бачимо, що мінімальні стандартні відхилення різниць гравітаційних аномалій моделі EGM2008 становлять 0.1 мГал для всіх систем припливів, а моделі EIGEN-6C4 – 0.3-0.4 мГал. Відповідно до результатів рисунка 4.7, різниці гравітаційних аномалій можуть коливатися від 0.3 мГал до 0.7 мГал для моделі EIGEN-6C4, від 0.4 мГал до 3 мГал для моделі XGM2019e_2159 та в межах 0-2 мГал для моделі GECO. Лише похибки моделі EGM2008 не перевищують 0.2 мГал для всіх параметрів.

Підсумовуючи результати з рисунків 4.4-4.7 можна спостерігати, що характер зміни стандартних відхилень для похибок висот однойменних

моделей більш рівномірний і не залежить від обраної системи припливів. Значення середніх квадратичних відхилень демонструють досить неоднозначні коливання точності у різних системах припливів. Така ситуація вказує на те, що використання конкретної системи припливів обраної глобальної моделі висот геоїда/квазігеоїда має значний вплив на кінцеву точність результатів методу GNSS-нівелювання. Таким чином, за умови врахування правильної системи припливів для висот моделей геоїда/квазігеоїда EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159 точність GNSS-нівелювання можна оптимізувати до 4-5 см з огляду середніх квадратичних відхилень та на рівні 2-3 см з огляду стандартних відхилень без додаткового моделювання величин. Скоригувати похибки висот глобальних моделей до менших значень можна на основі вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій. Статистичні характеристики похибок висот після коригування наведено в таблиці 4.3, а їхній кількісний розподіл – на рисунку 4.8.

Таблиця 4.3

Статистичні характеристики скоригованих похибок висот

Назва моделі	Система припливів	$\sigma_{\Delta N(P)}$ (см)			$m_{\Delta N(P)}$ (см)		
		T	N	S	T	N	S
egm (EGM2008)	“tide-free”	1.0	1.3	0.7	4.7	5.7	5.2
	“mean-tide”				1.4	1.9	1.5
	“zero-tide”				3.5	4.3	3.8
eigen (EIGEN-6C4)	“tide-free”	1.2	1.5	0.7	2.5	3.5	2.4
	“mean-tide”				3.5	3.9	4.2
	“zero-tide”				1.6	2.3	1.2
geco (GECO)	“tide-free”	1.6	1.6	1.7	2.3	2.4	2.9
	“mean-tide”				4.3	5.3	4.8
	“zero-tide”				1.7	1.9	2.2
xgm (XGM2019e_2159)	“tide-free”	1.3	1.5	0.7	2.1	3.2	1.5
	“mean-tide”				4.0	4.2	5.2
	“zero-tide”				1.4	2.2	0.9

Результати таблиці 4.3 показують, що стандартні відхилення для похибок висот всіх моделей не перевищують 2 см, а різниця між північними й південними пунктами становить до 1 см. Загалом модель EGM2008 має

найменше стандартне та середньоквадратичне відхилення в системі “mean-tide” на рівні 1 см та 1.4 см відповідно. Для моделей EIGEN-6C4, GECO і XGM2019e_2159 найменші статистики знаходяться в межах 1-3 см в системі припливів “zero-tide”.

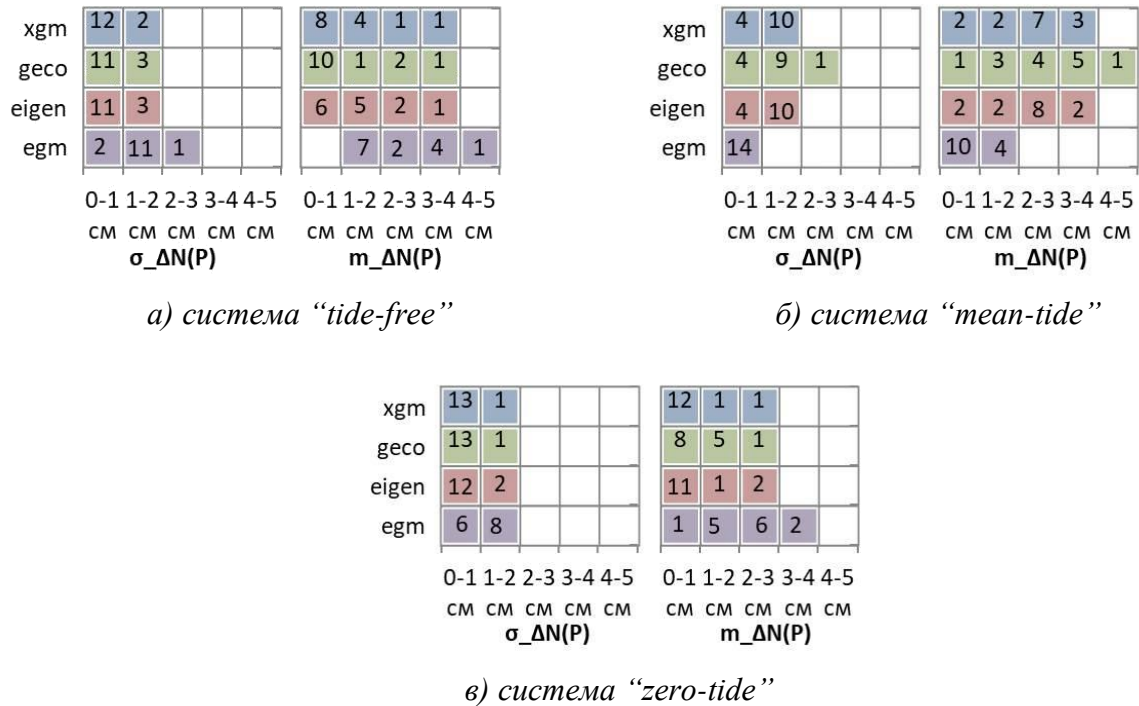


Рисунок 4.8 – Кількісний розподіл статистичних характеристик скоригованих похибок висот глобальних моделей

З рисунка 4.8 видно, що середні квадратичні відхилення скоригованих висот всіх моделей геоїда/квазігеоїда не перевищують 5 см, а стандартні відхилення 3 см. Висоти моделі EGM2008 в системі “mean-tide”, а моделі EIGEN-6C4 в системі “zero-tide” можна скоригувати за ваговими коефіцієнтами різниць гравітаційних аномалій для досягнення точності на рівні 1-2 см і 2-3 см відповідно.

У цілому, коригування висот одиничних пунктів за ваговими коефіцієнтами уможливорює вилучення систематичної складової похибки модельних висот геоїда/квазігеоїда на 50% та усуває ефект неоднозначності їхніх значень у будь-якій системі припливів. Однак, таким чином можна скоригувати похибки лише на пунктах висот, де відома нормальна (або

ортометрична) висота отримана методом геометричного нівелювання. Для будь-якого невідомого пункту належних результатів коригування можна досягти шляхом моделювання похибок висот глобальних моделей на регулярній сітці, як описано в розділі 4.1.

4.1.2. Аналіз точності інтерполяції похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей на локальних територіях

Як зазначено у розділі 4.1, запропонована у цій роботі методика локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей передбачає застосування методу інтерполяції даних. Тому для реалізації запропонованої методики необхідно підібрати певну функцію інтерполяції похибок висот глобальних моделей для невідомих пунктів. Серед чисельних методів інтерполяції даних, візьмемо до уваги саме Kriging-метод. Вибір цього методу інтерполяції обумовлений тим, що за результатами досліджень [214, 215, 218, 219, 221], для локальних територій властивості похибок висот глобальних моделей найбільше відповідають теорії регіоналізованої змінної, яка покладена в основу стандартного Kriging-методу [112], а саме:

- початковий набір даних має певне постійне середнє значення або тренд, тобто присутня систематична складова або загальна тенденція зміни у певному напрямку;
- початковий набір даних містить випадкові, але корельовані зміни, тобто присутні невеликі відхилення від тренду;
- початковий набір даних має випадкову, але некорельовану складову, тобто даним характерні залишкові похибки.

Для перевірки придатності Kriging-методу у цілях інтерполяції похибок висот глобальних моделей використаємо три різних набори даних. Перший набір даних складається з похибок висот моделей геоїда/квазігеоїда обчислених для восьми нівелірних пунктів I – II класу точності геометричного нівелювання. Для отриманих у такий спосіб похибок необхідно застосувати Kriging-інтерполяцію з довільним кроком

результативної сітки. Конкретно у цьому випадку візьмемо крок $0.75^\circ \times 1^\circ$, охопивши локальну ділянку розміром $1.5^\circ \times 2^\circ$. Еліпсоїдні координати території досліджень відповідають $49.0^\circ - 50.5^\circ$ по широті та $23.0^\circ - 25.0^\circ$ по довготі. Перевірку придатності інтерполяції Kriging-методом виконаємо для похибок висот чотирьох глобальних моделей високого ступеня/порядку, як-от: EGM2008, EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159.

Сітку інтерпольованих похибок перетворимо в контурні карти похибок для кожної моделі (ΔN_{egm}^{8N} , ΔN_{eigen}^{8N} , ΔN_{geco}^{8N} , ΔN_{xgm}^{8N}), як зображено на рисунку 4.9. При цьому, всі карти утворено шляхом лінійної інтерполяції стандартним Kriging-методом побудови в програмному забезпеченні Surfer [145], а ізолінії проведено через 0.5 см.

На рисунку 4.9. видно, що похибки висот моделей геоїда/квазігеоїда мають більшу властивість зміни з північно-східного напрямку на південно-західний, а меншу – з північно-західного у південно-східний. Для всіх моделей найменші значення похибок зосереджені в центральній частині території досліджень, що являє собою м. Львів та його околиці. Також, слід звернути увагу на те, що похибки моделі GECO мають більшу щільність зміни розподілу похибок порівняно з трьома іншими моделями.

За даними утворених карт першого набору даних (див. рис. 4.9) необхідно визначити похибки висот моделей геоїда/квазігеоїда для восьми референцних станцій, які розташовані в межах території досліджень (BRGN, MYKO, NEMR, SAMB, SOKA, STRY, SULP, ZOLH). Це дасть можливість виокремити другий незалежний набір даних. Після чого необхідно повторити методику інтерполяції похибок аналогічно, як застосовано до восьми нівелірних пунктів. На додаток, потрібно оцінити метод інтерполяції з урахуванням меншої кількості даних. Для реалізації інтерполяції Kriging-методом необхідно залучити мінімум чотири точки з відомими величинами. Тому третій набір даних створено на основі трьох нівелірних пунктів з першого набору даних та однієї референцної станції (SULP) з другого набору.

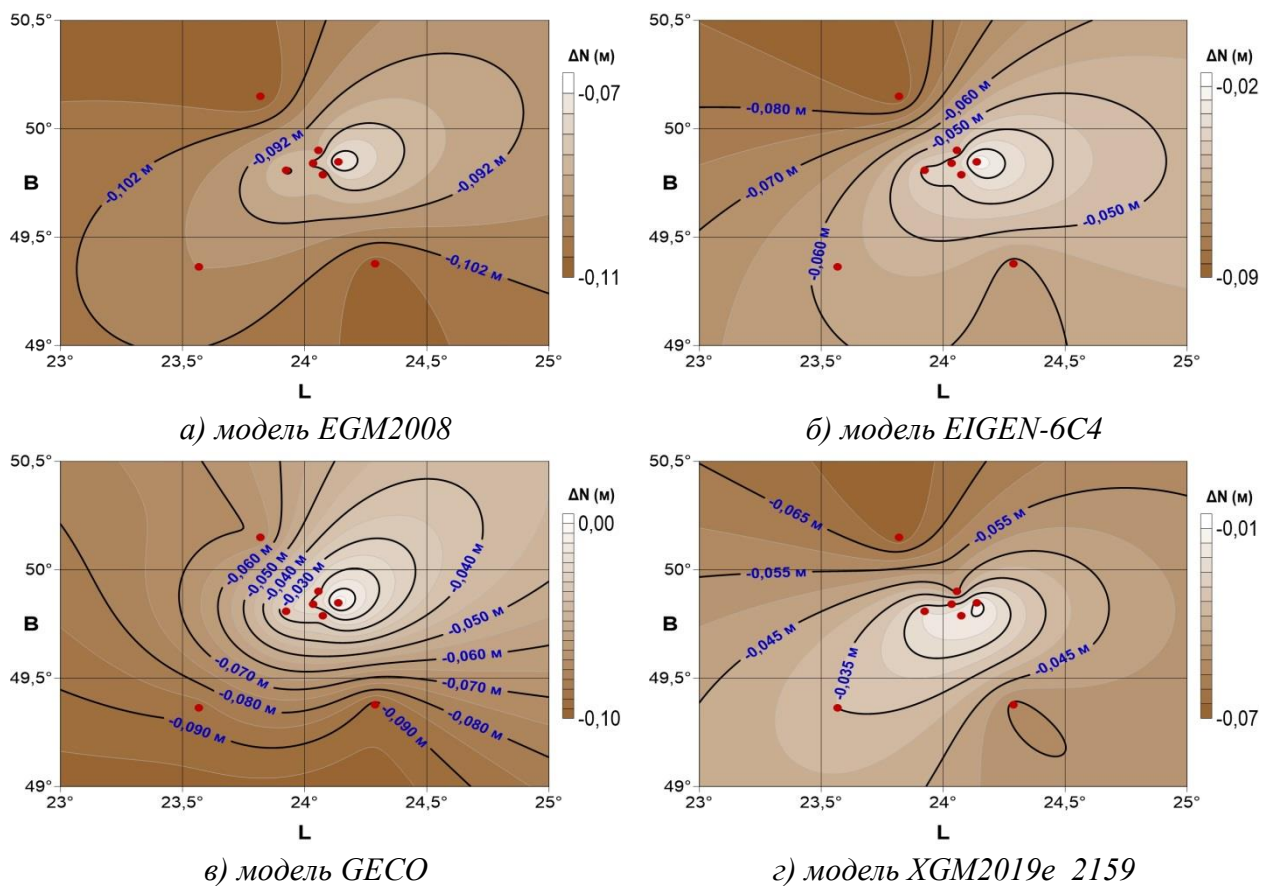


Рисунок 4.9 – Контурні карти похибок висот глобальних моделей на восьми пунктах геометричного та GNSS-нівелювання

Для виявлення характеру зміни інтерпольованих похибок другого та третього наборів даних побудуємо ще два типи контурних карт похибок, а саме:

- 1) карти на основі безпосередньо похибок отриманих для восьми референсних станцій з варіантом для кожної моделі – ΔN_{egm}^{8R} , ΔN_{eigen}^{8R} , ΔN_{geco}^{8R} , ΔN_{xgm}^{8R} ;
- 2) карти за даними похибок трьох пунктів геометричного нівелювання та референсної станції SULP для відповідних моделей (ΔN_{egm}^{3P} , ΔN_{eigen}^{3P} , ΔN_{geco}^{3P} , ΔN_{xgm}^{3P}).

Графічний результат двох типів карт представлено на рисунку 4.10 та 4.11, де ізолінії також проведено через 0.5 см.

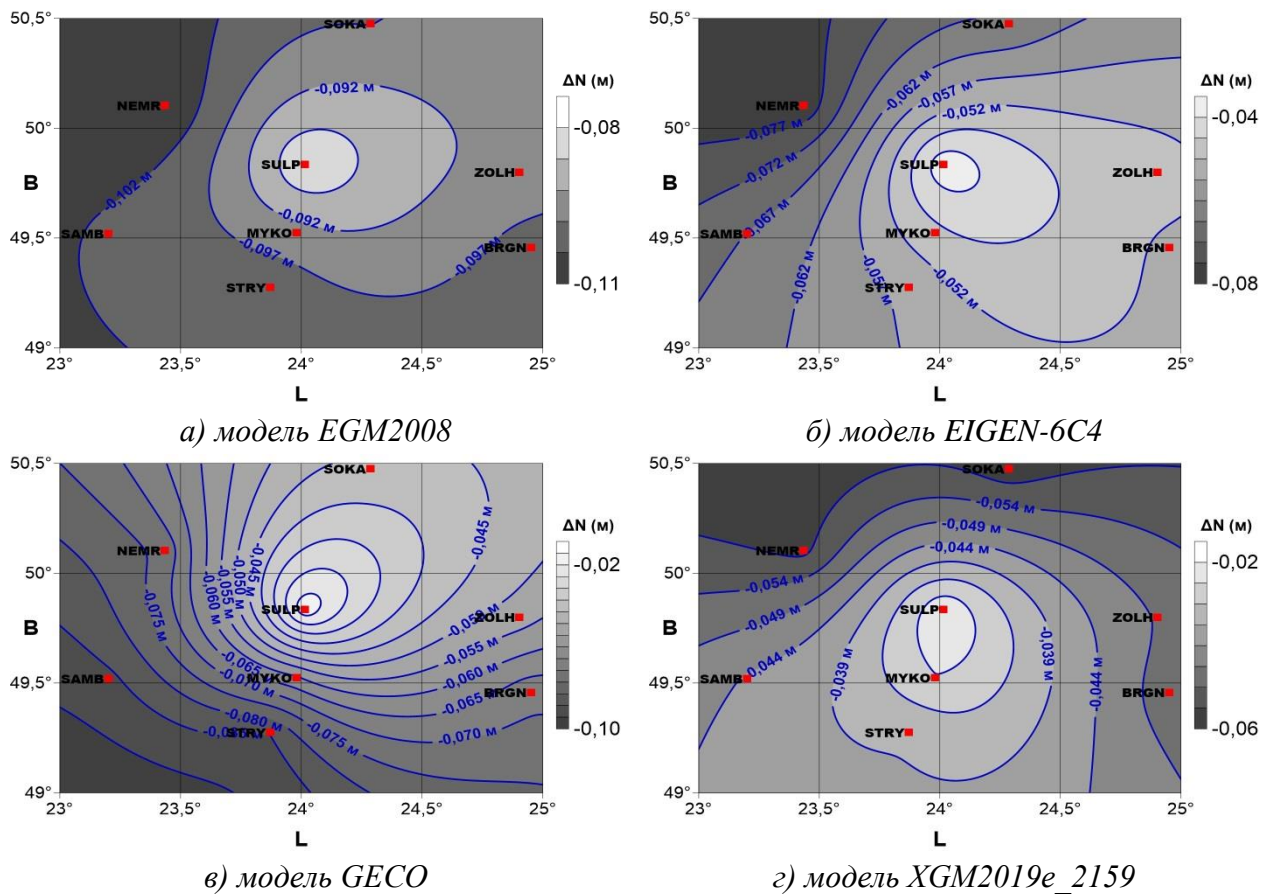


Рисунок 4.10 – Контурні карти похибок висот глобальних моделей для восьми референційних станцій

Карты похибок висот глобальних моделей для референційних станцій (див. рис. 4.10) уможливають дослідження просторової залежності зміни похибок, що пов'язана з віддаленістю станцій одна відносно одної. Карты похибок висот, утворені з трьох пунктів та однієї станції (див. рис. 4.11), відображають кількісну залежність між величиною похибок та частотою розміщення пунктів на яких виконано GNSS-нівелювання.

З рисунка 4.10, можна зауважити (сині ізолінії), що тенденція просторової залежності похибок стає більш вираженою та ділить територію досліджень на умовні секції зі зміною похибок в 0.5 см. Така ситуація уможливорює використання такого роду карт для наближеного врахування похибок глобальних моделей.

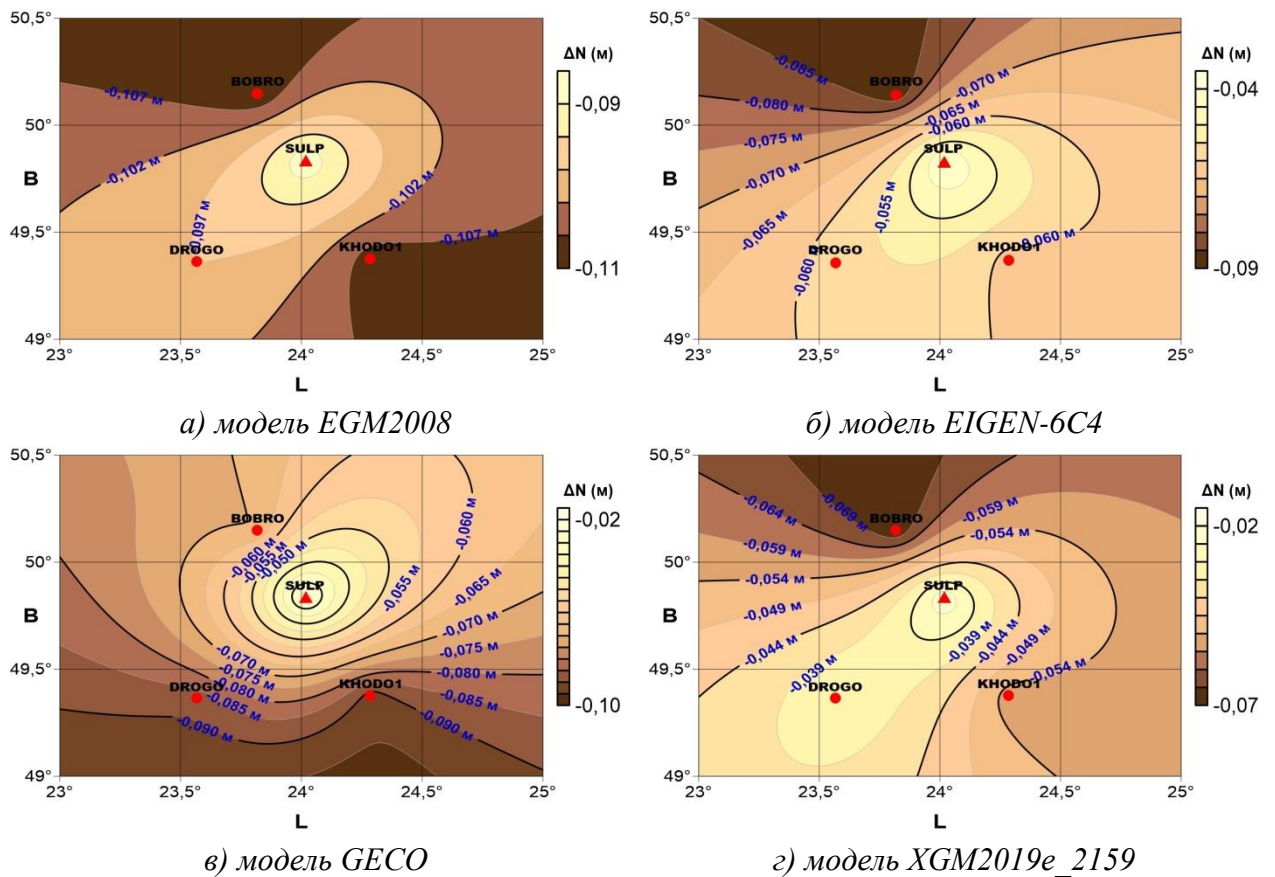


Рисунок 4.11 – Контурні карти похибок висот глобальних моделей для трьох нівелірних пунктів та референцної станції SULP

Карты похибок, зображені на рисунку 4.11, максимально відповідають первинним властивостям та характеристикам похибок карт типу ΔN_{egm}^{8N} , ΔN_{eigen}^{8N} , ΔN_{geco}^{8N} , ΔN_{xgmt}^{8N} (див. рис. 4.9). Це підтверджує припущення, що для коректної інтерполяції похибок висот глобальних моделей достатньо лише чотири нівелірних пункти I – II класу точності. Проте, в такому випадку важливим буде рівномірне розташування пунктів один відносно одного.

Статистичний аналіз точності кожної карти виконаємо за середніми значеннями похибок (Δ^*) та їхніми стандартними відхиленнями (σ). Графічний результат оцінювання інтерпольованих похибок зображено на рисунку 4.12.

$\Delta N^{8N}_{\text{egm, см}}$	$\Delta N^{8N}_{\text{eigen, см}}$	$\Delta N^{8N}_{\text{гесо, см}}$	$\Delta N^{8N}_{\text{хgm, см}}$
$\sigma = \pm 1,6$	$\sigma = \pm 2,1$	$\sigma = \pm 3,5$	$\sigma = \pm 2,1$
$\Delta^* = -9,0$	$\Delta^* = -4,9$	$\Delta^* = -4,3$	$\Delta^* = -3,6$

а) восьми нівелірних пунктів

$\Delta N^{8R}_{\text{egm, см}}$	$\Delta N^{8R}_{\text{eigen, см}}$	$\Delta N^{8R}_{\text{гесо, см}}$	$\Delta N^{8R}_{\text{хgm, см}}$
$\sigma = \pm 0,7$	$\sigma = \pm 1,3$	$\sigma = \pm 2,2$	$\sigma = \pm 1,3$
$\Delta^* = -9,7$	$\Delta^* = -5,7$	$\Delta^* = -6,1$	$\Delta^* = -4,5$

б) восьми референцих станцій

$\Delta N^{3P}_{\text{egm, см}}$	$\Delta N^{3P}_{\text{eigen, см}}$	$\Delta N^{3P}_{\text{гесо, см}}$	$\Delta N^{3P}_{\text{хgm, см}}$
$\sigma = \pm 1,3$	$\sigma = \pm 2,1$	$\sigma = \pm 3,2$	$\sigma = \pm 2,2$
$\Delta^* = -10,0$	$\Delta^* = -6,2$	$\Delta^* = -6,8$	$\Delta^* = -4,8$

в) трьох пунктів та станції SULP

Рисунок 4.12 – Статистики інтерпольованих похибок висот глобальних моделей для трьох різних наборів даних

Як бачимо з рисунка 4.12, результати статистик похибок між різними типами карт дещо відрізняються, що свідчить про необхідність врахування певних критеріїв при інтерполяції даних. З отриманих результатів можна виокремити основні критерії впливу на точність інтерполяції похибок висот глобальних моделей Kriging-методом, а саме:

- кількість контрольних пунктів для інтерполяції похибок;
- конфігурація взаємного розташування контрольних пунктів;
- щільність розподілу зміни похибок між контрольними пунктами.

Похибки висот глобальних моделей отримані з карт просторової та кількісної залежності (див. рис. 4.10-4.11) додатково перевіримо на основі незалежних пунктів. Для цього, з карт типу ΔN_{\dots}^{8R} необхідно визначити похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для восьми

однойменних нівелірних пунктів та порівняти їх із первинними значеннями карт $\Delta N_{...}^{8P}$. Для карт типу $\Delta N_{...}^{3P}$ перевірку можна здійснити лише для п'яти пунктів нівелювання, оскільки три інших пункти взято за основу їхньої побудови. Точність інтерполяції похибок висот глобальних моделей Kriging-методом наведено на рисунку 4.13.

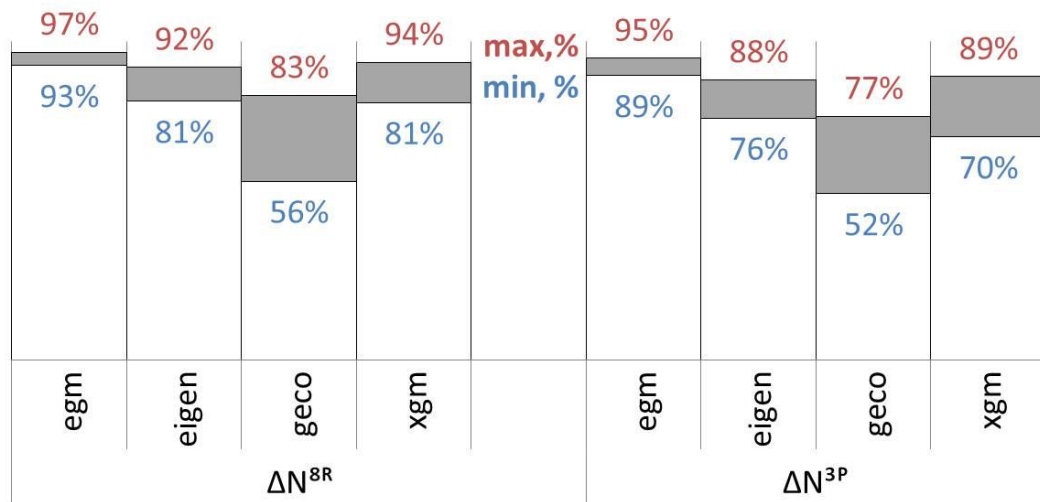


Рисунок 4.13 – Точність інтерполяції похибок висот глобальних моделей Kriging-методом

Як бачимо з рисунка 4.13, більш точно піддаються інтерполяції похибки моделі EGM2008 на рівні відтворення у 89-97% та EIGEN-6C4 на рівні 81-95% від загальної величини похибок. Похибки висот моделі XGM2019e_2159 можуть бути інтерпольовані для невідомих пунктів на рівні точності у 70-94%.

Результати аналізу точності інтерполяції Kriging-методом для похибок висот моделі GECO свідчать, що найвагоміший вплив має критерій щодо щільності розподілу похибок між відомими (контрольними) пунктами. Тобто, в такому випадку слід додати кількість контрольних пунктів за принципом згущення побудови традиційних геодезичних мереж. При неврахуванні цього критерію, результат точності інтерполяції похибок висот моделі GECO сягатиме лише 52-83%.

4.2. Реалізація методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей

4.2.1. Підготовка експериментальних даних для тестування методики

З огляду на те, що в силу різних причин автору не вдалося виконати широкомасштабні GNSS-спостереження на пунктах високоточного геометричного нівелювання, перевірка методики здійснювалась шляхом експерименту. Таким чином, результативність змодельованих поправок за методикою локального коригування висот, протестована з огляду експериментальних даних для різних географічних територій. При цьому, використано параметри тестування щодо методики з урахуванням різної розмірності площ областей досліджень ($\dots^\circ \times \dots^\circ$), різної кількості контрольних пунктів ($\dots k$) та оцінюваних точок ($\dots t$). На рисунках 4.14 та 4.15 зображено тестові території та їх класифікацію за площею, контрольними та оцінюваними даними.

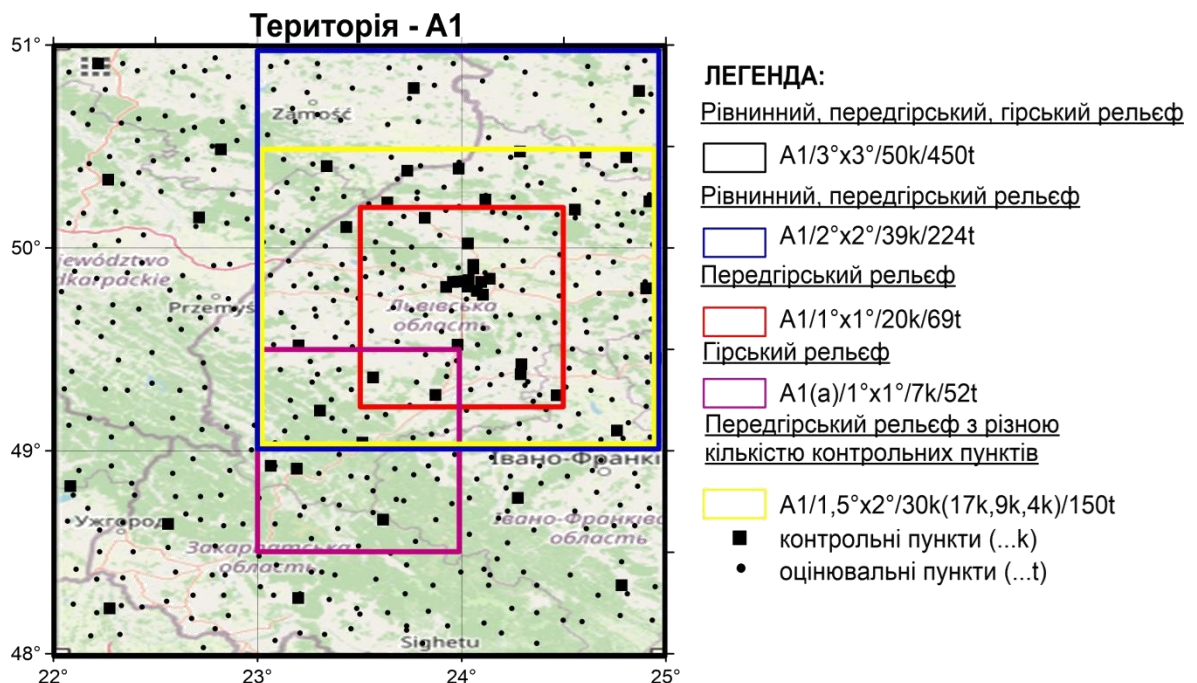


Рисунок 4.14 - Тестова територія А1 та її класифікація

З рисунка 4.14 видно, що тестова територія A1 включає область $3^\circ \times 3^\circ$ охоплюючи рівнинний, передгірський та гірський рельєф, область $2^\circ \times 2^\circ$ з рівнинним та передгірським рельєфом, область $1^\circ \times 1^\circ$ та $1.5^\circ \times 2^\circ$ з передгірським рельєфом та $1^\circ \times 1^\circ$ (A1(a)) з гірським рельєфом. Утворена для території A1 конфігурація контрольних точок відповідає розташуванню реальних пунктів високоточного геометричного нівелювання та деяких референцних станцій наявної GNSS-мережі.

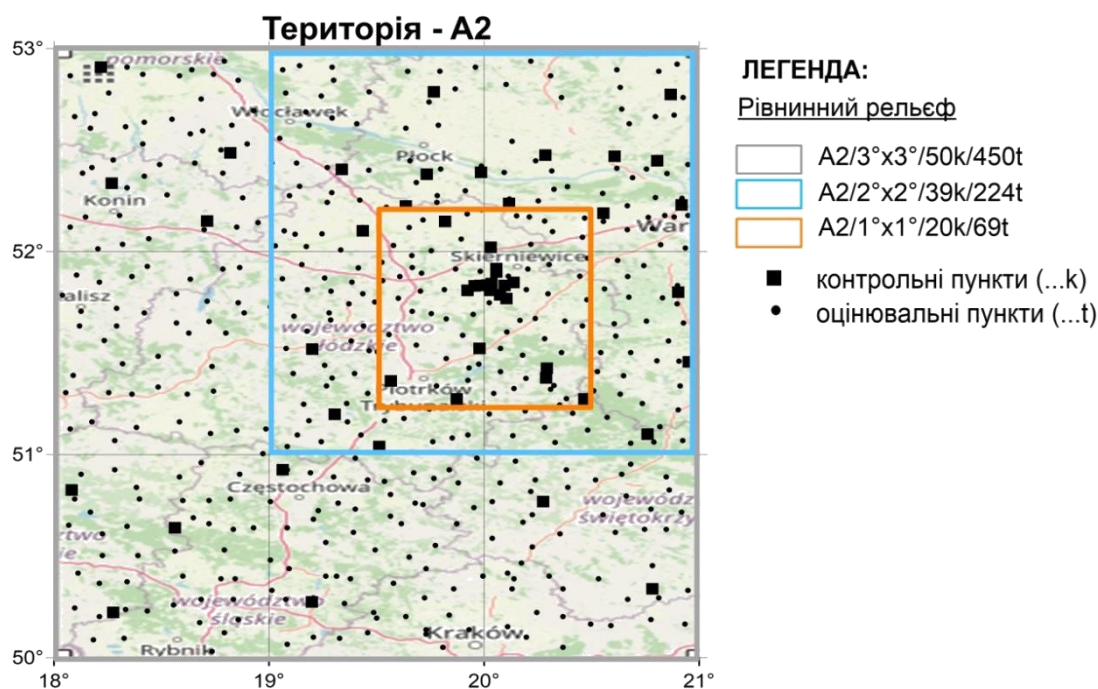


Рисунок 4.15 - Тестова територія A2 та її класифікація

З рисунка 4.15 бачимо, що тестова територія A2 охоплює область $3^\circ \times 3^\circ$, $2^\circ \times 2^\circ$ та $1^\circ \times 1^\circ$ розташовану суто у рівнинній місцевості з ідентичною конфігурацією контрольних та оцінюваних даних, які продубльовано з території A1. Співвідношення кількості контрольних точок до оцінюваних залежить виключно від площі території, яка тестується.

Для перевірки запропонованої у цій роботі методики в якості “виміряних” із GNSS-нівелювання висот геометричного квазігеоїда (ζ_0) взято висоти регіонального квазігеоїда PL-quasi-geoid2021. Тобто, у цьому випадку прийнято, що виконується умова $\zeta_0 = \zeta_{\text{PL-quasi-geoid2021}}$. Така ситуація

обумовлена тим, що висоти моделі PL-quasi-geoid2021 мають стандартне відхилення на рівні 1-2 см [53], що відповідає точності визначення еліпсоїдної висоти із даних GNSS-спостережень. Також слід зазначити, що модель PL-quasi-geoid2021 має роздільну здатність $0.01^\circ \times 0.01^\circ$, належить до системи припливів “zero-tide”, відлікового еліпсоїда GRS80 та в її основу покладено глобальну модель геопотенціалу SGG-UGM-2.

Усі висоти глобальних моделей геоїда/квазігеоїда отримано через утиліту сайту ICGEM *<Calculation Service>-<User-Defined Points>* з параметрами:

- *<Model selection>-<EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, XGM2019e_2159>*
- *<Functional selection>-<height anomaly>*;
- *<Reference System>-<GRS80>*;
- *<Tide system>-<1) “tide-free”, 2) “mean-tide”, 3) “zero-tide”>*.

Отримані у такий спосіб висоти геоїда/квазігеоїда глобальних моделей приведено у локальний масштаб шляхом збільшення їх на +0.52 м, що дорівнює величині ондуляції геоїда нульового порядку (“zero degree term”) для тестових територій [39]. Після чого за формулою (3.8) знайдено похибки висот між висотами квазігеоїда PL-quasi-geoid2021 та висотами геоїда/квазігеоїда кожної глобальної моделі у трьох припливних системах для всіх контрольних і оцінюваних точок. Для кожної тестової області здійснено моделювання поправок коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей за даними похибок висот відповідних контрольних точок на основі методики описаної у розділі 4.1, зокрема в пунктах 1-7. Залишкові похибки ($\delta\Delta N_{mod}$) оцінюваних точок знайдено, як різницю обчислених значень різниць висот (ΔN_{mod}) та змодельованих за методикою (δN_{mod}):

$$\delta\Delta N_{mod} = \Delta N_{mod} - \delta N_{mod} \quad (4.11)$$

Отримані у такий спосіб значення оцінено стандартним відхиленням (σ), середнім квадратичним відхиленням (m), середнім ($avg.$), максимальним (max) та мінімальним (min) значенням, розмахом (R) та коефіцієнтом кореляції ($cor.$) між обчисленими та модельними значеннями похибок ($\Delta N_{mod} \rightleftharpoons \delta N_{mod}$).

4.2.2. Аналіз результатів моделювання похибок за методикою локального коригування висот геоїда/квазігеоїда

На рисунку 4.16 зображено характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок оцінюваних точок для всіх областей територій $A1$ та $A2$ на прикладі моделі EGM2008 в системі “tide-free”. На графіках значення похибок наведено за зміною величин з півночі на південь по широті.

Як бачимо із даних рисунка 4.16(а) та 4.16(г), змодельовані значення найбільше відхиляються від обчислених та мають дещо розсіяний характер зміни. Така ситуація пояснюється тим, що тестова область досліджень $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$ охоплює три різні форми рельєфу (рівнинний, передгірський та гірський рельєф), а область $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$ – виключно гірський рельєф. Тому очевидно, що покращення моделювання можна досягти на менших територіях, наприклад, як на рисунку 4.15(в) та 4.15(и). У випадку суто гірського рельєфу (див. рис. 4.16(г)) навіть менша територія не буде давати такий самий результат, як у рівнинних районах з ідентичною площею (див. рис. 4.16(в,и)). Ще однією проблемою моделювання похибок висот у гірських районах є те, що реальна конфігурація ходів високоточного нівелювання часто не дозволяє опрацьовувати площу меншу ніж $1^\circ \times 1^\circ$. З рисунка 4.16(г,д,е,є) бачимо, що характер зміни похибок в межах території $1.5^\circ \times 2^\circ$ та змодельованих на основі різної кількості контрольних точок ($30k, 17k, 9k, 4k$) більш рівномірний.

Похибки моделі EGM2008 в системі “mean-tide” та “zero-tide” мають такий самий характер зміни, як для “tide-free”, але відрізняються за

величиною. Загалом, така ж ситуація притаманна і похибкам моделей EIGEN-6C4, GECO та XGM2019e_2159. Тобто в межах однакових територій характер зміни похибок для кожної моделі індивідуальний, але з огляду систем припливів – ідентичний для відповідної моделі та відрізняється лише за числовою величиною.

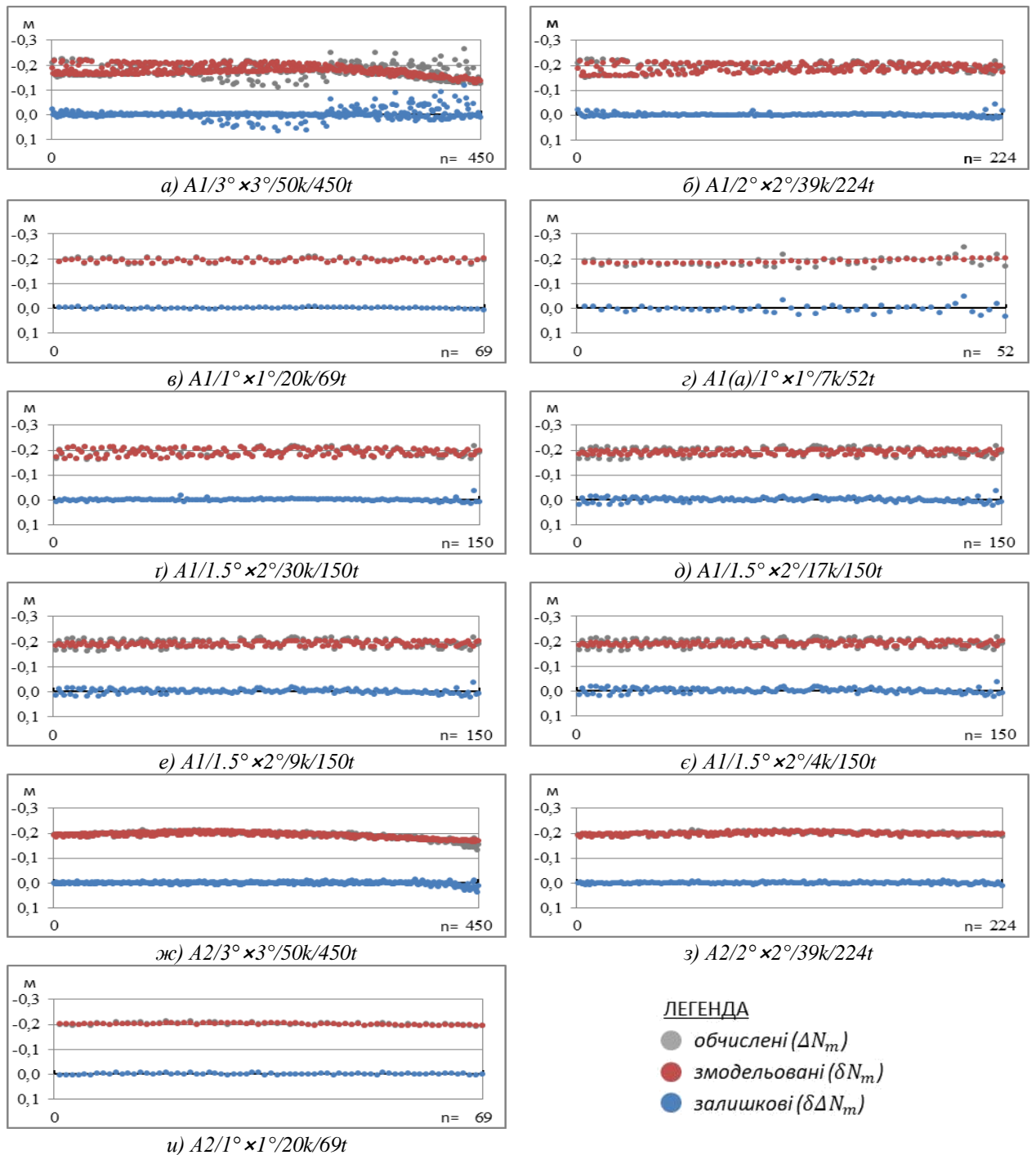


Рисунок 4.16 - Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EGM2008 в системі “tide-free” для територій A1, A2

Графічний результат характеру зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок оцінюваних точок для всіх решта варіантів моделей та систем припливів наведено у Додатках В.1- В.11.

4.2.3. Оцінка точності залишкових похибок висот глобальних моделей

Результати моделювання похибок висот глобальних моделей за методикою локального коригування необхідно оцінити з огляду залишкових похибок. В таблицях 4.4-4.9. наведено статистичні характеристики обчислених, змодельованих та залишкових похибок для кожної моделі, систем припливів та області досліджень.

Основними критеріями аналізу результатів статистичних характеристик похибок висот глобальних моделей є:

- стандартне відхилення повинно забезпечувати точність менше одного сантиметра ($\sigma < 1$ см);
- середнє квадратичне відхилення повинно забезпечувати точність менше одного сантиметра ($m < 1$ см);
- коефіцієнт кореляції повинен забезпечувати високий рівень зв'язку між обчисленими та змодельованими похибками ($cor. = 0.8 - 1$).

Також, слід звернути увагу, що у представлених таблицях значення залишкових похибок ($\delta\Delta N_{mod}$) наведено в одному варіанті, як підсумок за системами припливів “tide-free”, “mean-tide” та “zero-tide”. Це пов'язано з тим, що в кінцевому результаті ці значення є однаковими для кожної системи припливів відповідної моделі в межах тестової території. Тобто всі похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей мають певні властивості:

- для обчислених значень виконується умова, що статистики неоднакові у різних системах припливів, тобто:

$$1) \sigma_{\Delta N_m(\text{“tide free”})} \neq \sigma_{\Delta N_m(\text{“mean tide”})} \neq \sigma_{\Delta N_m(\text{“zero tide”})};$$

$$2) m_{\Delta N_m(\text{“tide free”})} \neq m_{\Delta N_m(\text{“mean tide”})} \neq m_{\Delta N_m(\text{“zero tide”})};$$

– для змодельованих значень виконується умова, що статистики також неоднакові у різних системах припливів, тобто:

$$1) \sigma_{\delta N_m(\text{“tide free”})} \neq \sigma_{\delta N_m(\text{“mean tide”})} \neq \sigma_{\delta N_m(\text{“zero tide”})};$$

$$2) m_{\delta N_m(\text{“tide free”})} \neq m_{\delta N_m(\text{“mean tide”})} \neq m_{\delta N_m(\text{“zero tide”})};$$

– для залишкових значень виконується умова, що статистики стають однаковими після процедури коригування у різних системах припливів, тобто:

$$1) \sigma_{\delta \Delta N_m(\text{“tide free”})} = \sigma_{\delta \Delta N_m(\text{“mean tide”})} = \sigma_{\delta \Delta N_m(\text{“zero tide”})};$$

$$2) m_{\delta \Delta N_m(\text{“tide free”})} = m_{\delta \Delta N_m(\text{“mean tide”})} = m_{\delta \Delta N_m(\text{“zero tide”})}.$$

Властивості залишкових похибок вказують на ефективність коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей на основі вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій. Також це свідчить про те, що запропонована методика уможливорює узгодження похибок висот глобальних моделей між різними системами припливів.

Скажімо, традиційні системи висот належать до середньої системи припливів (“mean-tide”), як і всі геодезичні вимірювання виконані на земній поверхні. Еквіпотенціальний еліпсоїд GRS80 належить до системи нульових припливів (“zero-tide”). Висоти геоїда/квазігеоїда глобальних моделей зазвичай використовують систему вільну від припливів (“tide-free”) або систему нульових припливів (“zero-tide”), як базову, хоча вони також надаються у всіх трьох припливних системах.

Теоретично, щоб узгодити ці всі дані між собою необхідно привести їх до якоїсь однієї системи припливів, щоб здійснювати математичні операції. Така ситуація призводить до залучення додаткових громіздких обчислень, що займає багато часу та технічних ресурсів. Запропонована у цій роботі методика дає змогу уникнути цих проблем, оскільки залишкові похибки будь-якої системи припливів, після коригування на основі вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій, стають одного рівня точності.

**Статистичні характеристики області досліджень A1 та A2 з
параметрами площі /3° × 3°, контрольних точок /50к/
та оцінюваних точок /450т/**

Статистики	Територія, площа та параметри															
	A1/3° × 3°/50к/450т							A2/3° × 3°/50к/450т								
	Система припливів															
	“free”		“mean”		“zero”		всі		“free”		“mean”		“zero”		всі	
	Тип похибок (см)															
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008																
σ	2.6	2.0	2.5	1.8	2.6	1.9	1.9	1.4	1.1	1.1	0.8	1.3	1.0	0.6		
m	18.0	17.8	8.8	8.5	15.9	15.7	1.9	19.2	19.3	8.5	8.5	16.7	16.8	0.6		
avg.	-17.8	-17.7	-8.4	-8.3	-15.6	-15.5	-0.1	-19.1	-19.2	-8.4	-8.4	-16.6	-16.7	0.1		
max	-11.1	-12.8	-1.7	-4.3	-8.9	-10.8	6.5	-13.2	-16.6	-3.5	-6.7	-11.0	-14.3	3.8		
min	-26.5	-22.0	-18.1	-11.8	-24.6	-19.6	-11.9	-21.3	-20.9	-10.3	-9.9	-18.8	-18.4	-1.3		
R	15.5	9.2	16.3	7.5	15.7	8.8	18.5	8.1	4.3	6.9	3.2	7.8	4.1	5.0		
cor.	0.7		0.7		0.7			0.9		0.9		0.9				
EIGEN-6C4																
σ	2.5	1.3	2.5	1.1	2.4	1.2	2.2	2.1	1.9	2.3	2.0	2.1	1.9	0.6		
m	17.1	16.5	7.9	7.1	14.9	14.4	2.3	19.2	19.1	8.6	8.4	16.7	16.6	0.6		
avg.	-16.8	-16.4	-7.5	-7.0	-14.7	-14.3	-0.4	-19.0	-18.9	-8.3	-8.2	-16.5	-16.4	-0.1		
max	-10.8	-13.1	-1.6	-4.6	-8.7	-11.2	5.6	-12.8	-14.1	-2.2	-3.6	-10.3	-11.7	1.4		
min	-30.0	-19.3	-21.6	-9.2	-28.1	-16.9	-13.9	-22.6	-22.1	-12.6	-12.2	-20.2	-19.8	-2.1		
R	19.2	6.1	20.0	4.6	19.4	5.8	19.5	9.8	8.0	10.4	8.6	9.8	8.1	3.5		
cor.	0.4		0.4		0.4			1.0		1.0		1.0				
GECO																
σ	2.2	1.5	2.1	1.3	2.1	1.5	1.7	1.9	1.4	2.0	1.4	1.9	1.4	1.0		
m	17.2	16.8	7.9	7.4	15.0	14.7	1.8	18.5	18.3	7.9	7.6	16.1	15.8	1.0		
avg.	-17.0	-16.7	-7.6	-7.3	-14.8	-14.5	-0.3	-18.4	-18.2	-7.6	-7.4	-15.9	-15.7	-0.2		
max	-11.3	-13.1	-2.5	-3.4	-9.3	-10.8	4.2	-13.2	-14.5	-2.1	-3.4	-10.8	-12.1	2.8		
min	-27.3	-20.6	-18.8	-10.3	-25.3	-18.2	-13.6	-23.5	-21.1	-13.6	-11.3	-21.2	-18.9	-4.2		
R	16.0	7.5	16.3	6.9	16.0	7.4	17.8	10.3	6.7	11.4	7.9	10.4	6.8	7.0		
cor.	0.6		0.6		0.6			0.9		0.9		0.9				
XGM2019e_2159																
σ	2.6	1.7	2.7	1.7	2.6	1.7	2.3	2.0	1.5	2.1	1.7	2.0	1.5	1.9		
m	17.1	16.7	7.9	7.4	14.9	14.5	2.3	18.7	18.8	8.1	8.1	16.2	16.3	2.0		
avg.	-16.8	-16.6	-7.5	-7.2	-14.7	-14.4	-0.3	-18.5	-18.6	-7.8	-7.9	-16.0	-16.2	0.1		
max	-10.8	-12.3	-1.4	-3.3	-8.8	-10.3	6.6	-13.0	-14.9	-2.3	-4.5	-10.5	-12.5	6.1		
min	-27.1	-20.9	-18.6	-10.6	-25.1	-18.6	-10.4	-26.5	-21.8	-16.4	-11.7	-24.2	-19.3	-7.3		
R	16.2	8.6	17.2	7.3	16.3	8.3	17.0	13.5	6.9	14.0	7.3	13.6	6.8	13.4		
cor.	0.5		0.5		0.5			0.4		0.5		0.4				

**Статистичні характеристики області досліджень A1 та A2 з
параметрами площі /2° × 2°, контрольних точок /39к/
та оцінюваних точок /224т/**

Статистики	Територія, площа та параметри													
	A1/2° × 2°/39к/224т							A2/2° × 2°/39к/224т						
	Система припливів													
	“free”		“mean”		“zero”		всі	“free”		“mean”		“zero”		всі
	Тип похибок (см)													
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008														
σ	1.8	1.7	1.9	1.8	1.8	1.7	0.6	0.6	0.6	0.8	0.7	0.7	0.6	0.3
m	19.2	19.1	9.6	9.4	17.0	16.8	0.6	19.9	20.0	8.9	8.9	17.4	17.4	0.3
avg.	-19.0	-18.9	-9.3	-9.2	-16.7	-16.6	-0.1	-19.8	-19.8	-8.8	-8.8	-17.3	-17.3	0.0
max	-15.1	-15.8	-4.8	-5.7	-12.7	-13.5	1.7	-18.2	-18.4	-6.8	-6.8	-15.7	-15.7	1.0
min	-22.4	-22.0	-12.7	-11.7	-20.0	-19.6	-4.3	-21.3	-20.9	-10.3	-9.9	-18.8	-18.3	-1.1
R	7.3	6.2	7.9	6.1	7.3	6.2	6.0	3.1	2.5	3.5	3.0	3.1	2.6	2.1
cor.	0.9		1.0		0.9			0.9		0.9		0.9		
EIGEN-6C4														
σ	1.5	1.3	1.3	1.1	1.4	1.3	0.6	2.3	2.1	2.3	2.2	2.3	2.1	0.5
m	16.6	16.5	6.9	6.8	14.3	14.3	0.6	18.7	18.7	7.9	7.9	16.2	16.2	0.5
avg.	-16.4	-16.3	-6.7	-6.7	-14.2	-14.1	-0.1	-18.5	-18.5	-7.5	-7.5	-15.9	-16.0	0.0
max	-13.2	-14.2	-4.0	-4.9	-11.0	-12.1	1.2	-12.8	-14.0	-2.2	-3.5	-10.3	-11.5	1.4
min	-19.5	-19.3	-9.8	-9.1	-17.1	-16.9	-4.3	-22.6	-22.1	-11.6	-11.0	-20.0	-19.5	-1.2
R	6.3	5.1	5.8	4.2	6.1	4.9	5.5	9.8	8.1	9.4	7.6	9.7	8.0	2.6
cor.	0.9		0.9		0.9			1.0		1.0		1.0		
GECO														
σ	1.8	1.5	1.8	1.5	1.8	1.5	0.7	1.8	1.5	1.9	1.5	1.8	1.5	0.6
m	17.2	17.2	7.6	7.6	15.0	15.0	0.7	18.1	18.2	7.2	7.2	15.6	15.6	0.6
avg.	-17.0	-17.0	-7.4	-7.4	-14.8	-14.8	0.0	-17.9	-18.0	-6.9	-7.0	-15.4	-15.5	0.1
max	-12.7	-13.1	-3.0	-3.4	-10.5	-10.8	1.6	-13.2	-14.3	-2.1	-3.4	-10.8	-11.9	2.7
min	-21.1	-20.5	-11.4	-10.3	-18.8	-18.1	-3.6	-21.5	-21.0	-10.6	-10.0	-19.0	-18.4	-1.3
R	8.4	7.4	8.4	6.9	8.3	7.3	5.3	8.3	6.7	8.5	6.6	8.2	6.5	4.0
cor.	0.9		0.9		0.9			1.0		0.9		0.9		
XGM2019e_2159														
σ	2.1	2.0	2.0	1.8	2.1	1.9	1.5	2.0	1.3	2.0	1.3	2.0	1.3	1.6
m	16.5	16.3	6.9	6.7	14.3	14.1	1.5	18.4	18.3	7.5	7.3	15.8	15.8	1.7
avg.	-16.3	-16.1	-6.6	-6.4	-14.0	-13.9	-0.2	-18.1	-18.2	-7.1	-7.2	-15.6	-15.6	0.0
max	-11.1	-12.7	-1.4	-3.2	-8.8	-10.5	4.0	-13.0	-14.9	-2.3	-4.4	-10.5	-12.5	4.8
min	-21.9	-20.9	-11.5	-10.8	-19.5	-18.6	-4.3	-22.3	-21.9	-11.4	-10.9	-19.8	-19.4	-4.5
R	10.8	8.2	10.2	7.5	10.7	8.0	8.3	9.3	7.0	9.0	6.5	9.3	6.9	9.4
cor.	0.7		0.7		0.7			0.6		0.6		0.6		

**Статистичні характеристики області досліджень A1 та A2 з
параметрами площі /1° × 1°, контрольних точок /20k/
та оцінюваних точок /69t/**

Статистики	Територія, площа та параметри															
	A1/1° × 1°/20k/69t							A2/1° × 1°/20k/69t								
	Система припливів															
	“free”		“mean”		“zero”		всі		“free”		“mean”		“zero”		всі	
	Тип похибок (см)															
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008																
σ	0.9	0.7	0.9	0.8	0.9	0.7	0.3	0.5	0.3	0.4	0.3	0.5	0.3	0.3		
m	19.8	19.6	10.0	9.9	17.5	17.4	0.3	20.6	20.5	9.5	9.4	18.1	18.0	0.3		
avg.	-19.3	-19.2	-9.8	-9.7	-17.1	-17.0	-0.1	-20.2	-20.1	-9.3	-9.2	-17.7	-17.6	-0.1		
max	-17.7	-18.1	-7.9	-8.5	-15.4	-15.9	0.7	-19.2	-19.4	-8.4	-8.7	-16.8	-16.9	0.6		
min	-21.1	-20.3	-11.6	-10.9	-18.9	-18.1	-0.8	-21.3	-20.7	-10.3	-9.8	-18.8	-18.2	-0.9		
R	3.4	2.1	3.7	2.4	3.5	2.2	1.4	2.1	1.3	2.0	1.1	2.0	1.3	1.4		
cor.	1.0		1.0		1.0			0.7		0.6		0.7				
EIGEN-6C4																
σ	0.8	0.6	0.7	0.5	0.7	0.6	0.3	2.0	1.5	1.9	1.4	2.0	1.5	0.7		
m	15.7	15.6	5.9	5.8	13.4	13.3	0.3	19.6	19.5	8.6	8.4	17.1	16.9	0.7		
avg.	-15.3	-15.2	-5.8	-5.7	-13.1	-13.0	-0.1	-19.1	-19.0	-8.2	-8.1	-16.6	-16.5	-0.1		
max	-13.8	-14.2	-4.6	-4.9	-11.7	-12.1	0.5	-14.8	-15.2	-4.3	-4.6	-12.4	-12.7	1.1		
min	-17.4	-16.2	-7.6	-6.5	-15.1	-13.9	-1.2	-22.4	-20.8	-11.4	-9.8	-19.8	-18.3	-1.7		
R	3.6	2.0	2.9	1.6	3.4	1.9	1.7	7.5	5.6	7.1	5.2	7.4	5.5	2.8		
cor.	0.9		0.9		0.9			1.0		0.9		1.0				
GECO																
σ	1.8	1.6	1.9	1.8	1.8	1.7	0.5	1.3	0.9	1.2	0.8	1.3	0.9	0.6		
m	16.0	15.8	6.5	6.3	13.8	13.6	0.5	18.6	18.4	7.6	7.3	16.1	15.8	0.7		
avg.	-15.6	-15.4	-6.0	-5.9	-13.4	-13.2	-0.2	-18.2	-17.9	-7.3	-7.1	-15.7	-15.4	-0.2		
max	-12.7	-13.0	-3.0	-3.4	-10.5	-10.8	0.9	-15.6	-15.9	-5.1	-5.3	-13.2	-13.5	0.8		
min	-18.6	-18.6	-9.3	-9.4	-16.4	-16.5	-1.1	-20.7	-19.1	-9.7	-8.1	-18.2	-16.6	-1.7		
R	5.9	5.6	6.3	6.0	6.0	5.7	2.0	5.1	3.2	4.6	2.8	5.0	3.1	2.5		
cor.	1.0		1.0		1.0			0.9		0.9		0.9				
XGM2019e_2159																
σ	1.4	1.0	1.4	1.0	1.4	1.0	1.1	1.7	1.3	1.7	1.2	1.7	1.3	1.2		
m	15.3	14.9	5.7	5.3	13.0	12.7	1.2	19.3	19.8	8.3	8.7	16.7	17.2	1.4		
avg.	-14.9	-14.6	-5.4	-5.1	-12.7	-12.4	-0.3	-18.8	-19.3	-7.9	-8.4	-16.3	-16.8	0.5		
max	-12.2	-12.4	-2.6	-3.0	-10.0	-10.3	1.7	-14.9	-15.9	-4.2	-5.3	-12.4	-13.4	3.5		
min	-18.0	-16.5	-8.3	-7.1	-15.8	-14.3	-2.9	-22.3	-21.9	-11.4	-11.0	-19.8	-19.4	-2.4		
R	5.8	4.0	5.7	4.1	5.8	4.0	4.6	7.5	6.1	7.2	5.7	7.4	6.0	5.9		
cor.	0.6		0.6		0.6			0.7		0.7		0.7				

Таблиця 4.7

**Статистичні характеристики області досліджень A1 з параметрами
площі /1,5° × 2°, контрольних точок /30к та 17к/
та оцінюваних точок /150т/**

Статистики	Територія, площа та параметри															
	A1/1.5° × 2°/30k/150t							A1/1.5° × 2°/17k/150t								
	Система припливів															
	“free”		“mean”		“zero”		всі		“free”		“mean”		“zero”		всі	
	Тип похибок (см)															
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008																
σ	1.5	1.4	1.5	1.5	1.5	1.4	0.5	1.5	0.9	1.5	1.0	1.5	0.9	0.8		
m	19.4	19.3	9.8	9.7	17.2	17.1	0.5	19.4	19.3	9.8	9.7	17.2	17.1	0.8		
avg.	-19.1	-19.1	-9.6	-9.5	-16.9	-16.9	-0.1	-19.1	-19.1	-9.6	-9.6	-16.9	-16.9	0.0		
max	-16.2	-16.4	-6.3	-6.4	-13.9	-14.1	1.7	-16.2	-17.8	-6.3	-8.2	-13.9	-15.6	2.2		
min	-21.8	-21.3	-12.7	-11.7	-19.7	-19.0	-3.8	-21.8	-20.3	-12.7	-10.9	-19.7	-18.1	-3.8		
R	5.6	4.9	6.4	5.3	5.8	5.0	5.5	5.6	2.5	6.4	2.7	5.8	2.5	6.0		
cor.	0.9		0.9		0.9			0.9		0.9		0.9				
EIGEN-6C4																
σ	1.3	1.2	1.2	1.0	1.3	1.2	0.5	1.3	0.6	1.2	0.5	1.3	0.6	0.9		
m	16.3	16.3	6.7	6.7	14.1	14.1	0.5	16.3	15.5	6.7	5.9	14.1	13.3	1.2		
avg.	-16.1	-16.1	-6.5	-6.6	-13.9	-13.9	0.1	-16.1	-15.3	-6.5	-5.8	-13.9	-13.1	-0.7		
max	-13.2	-14.2	-4.0	-4.9	-11.0	-12.1	1.2	-13.2	-14.2	-4.0	-4.9	-11.0	-12.1	1.1		
min	-19.1	-19.1	-9.8	-9.1	-16.8	-16.8	-4.0	-19.1	-16.3	-9.8	-6.5	-16.8	-14.0	-4.6		
R	6.0	4.8	5.8	4.1	5.8	4.7	5.1	6.0	2.0	5.8	1.6	5.8	1.9	5.7		
cor.	0.9		0.9		0.9			0.8		0.8		0.8				
GECO																
σ	1.6	1.2	1.7	1.3	1.6	1.3	0.7	1.6	1.5	1.7	1.7	1.6	1.5	1.4		
m	16.9	16.9	7.4	7.3	14.7	14.7	0.7	16.9	15.9	7.4	6.5	14.7	13.7	1.7		
avg.	-16.6	-16.7	-7.1	-7.1	-14.4	-14.5	0.1	-16.6	-15.7	-7.1	-6.2	-14.4	-13.5	-0.9		
max	-12.7	-13.2	-3.0	-3.6	-10.5	-11.0	1.6	-12.7	-13.0	-3.0	-3.4	-10.5	-10.8	2.4		
min	-20.5	-20.1	-11.4	-10.1	-18.4	-17.8	-3.6	-20.5	-18.6	-11.4	-9.3	-18.4	-16.5	-5.6		
R	7.8	6.8	8.4	6.5	7.9	6.8	5.2	7.8	5.6	8.4	6.0	7.9	5.7	8.0		
cor.	0.9		0.9		0.9			0.6		0.7		0.6				
XGM2019e_2159																
σ	2.0	1.5	2.0	1.5	2.0	1.5	1.3	2.0	1.4	2.0	1.4	2.0	1.4	1.8		
m	16.2	16.2	6.7	6.6	14.0	14.0	1.3	16.2	14.4	6.7	4.9	14.0	12.2	2.5		
avg.	-15.9	-16.0	-6.4	-6.4	-13.7	-13.8	0.1	-15.9	-14.2	-6.4	-4.6	-13.7	-12.0	-1.7		
max	-11.1	-13.1	-1.4	-3.7	-8.8	-10.9	3.3	-11.1	-12.0	-1.4	-2.6	-8.8	-9.8	2.2		
min	-20.4	-19.9	-11.3	-10.7	-18.3	-17.8	-3.6	-20.4	-16.2	-11.3	-6.6	-18.3	-13.9	-8.3		
R	9.3	6.8	9.9	7.0	9.4	6.8	6.9	9.3	4.2	9.9	3.9	9.4	4.1	10.5		
cor.	0.8		0.8		0.8			0.5		0.4		0.5				

**Статистичні характеристики області досліджень A1 з параметрами
площі /1,5° × 2°, контрольних точок /9k/ та /4k/
та оцінюваних точок /150t/**

Статистики	Територія, площа та параметри															
	A1/1.5° × 2°/9k/150t							A1/1.5° × 2°/4k/150t								
	Система припливів															
	“free”		“mean”		“zero”		всі		“free”		“mean”		“zero”		всі	
	Тип похибок (см)															
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008																
σ	1.5	0.9	1.5	0.9	1.5	0.9	0.9	1.5	0.8	1.5	0.9	1.5	0.8	0.9		
m	19.4	19.3	9.8	9.7	17.2	17.1	0.9	19.4	19.2	9.8	9.6	17.2	17.0	0.9		
avg.	-19.1	-19.1	-9.6	-9.5	-16.9	-16.9	-0.1	-19.1	-19.0	-9.6	-9.5	-16.9	-16.8	-0.1		
max	-16.2	-17.9	-6.3	-8.2	-13.9	-15.7	2.3	-16.2	-17.9	-6.3	-8.3	-13.9	-15.7	2.3		
min	-21.8	-20.2	-12.7	-10.8	-19.7	-18.0	-3.8	-21.8	-20.1	-12.7	-10.8	-19.7	-18.0	-3.7		
R	5.6	2.3	6.4	2.6	5.8	2.4	6.0	5.6	2.2	6.4	2.5	5.8	2.3	6.0		
cor.	0.9		0.9		0.9			0.8		0.9		0.8				
EIGEN-6C4																
σ	1.3	0.6	1.2	0.5	1.3	0.5	1.0	1.3	0.5	1.2	0.4	1.3	0.5	1.0		
m	16.3	15.5	6.7	5.9	14.1	13.2	1.2	16.3	15.5	6.7	5.9	14.1	13.3	1.3		
avg.	-16.1	-15.3	-6.5	-5.8	-13.9	-13.1	-0.8	-16.1	-15.3	-6.5	-5.8	-13.9	-13.1	-0.8		
max	-13.2	-14.2	-4.0	-4.9	-11.0	-12.1	1.1	-13.2	-14.2	-4.0	-4.9	-11.0	-12.1	1.1		
min	-19.1	-16.2	-9.8	-6.4	-16.8	-13.9	-4.6	-19.1	-16.1	-9.8	-6.3	-16.8	-13.8	-4.6		
R	6.0	1.9	5.8	1.4	5.8	1.8	5.7	6.0	1.9	5.8	1.4	5.8	1.8	5.7		
cor.	0.8		0.7		0.8			0.8		0.7		0.7				
GECO																
σ	1.6	1.5	1.7	1.6	1.6	1.5	1.4	1.6	1.4	1.7	1.6	1.6	1.4	1.3		
m	16.9	16.0	7.4	6.5	14.7	13.7	1.7	16.9	16.1	7.4	6.6	14.7	13.9	1.5		
avg.	-16.6	-15.7	-7.1	-6.2	-14.4	-13.5	-0.9	-16.6	-15.9	-7.1	-6.4	-14.4	-13.7	-0.8		
max	-12.7	-13.1	-3.0	-3.5	-10.5	-10.9	2.4	-12.7	-13.7	-3.0	-4.0	-10.5	-11.4	2.5		
min	-20.5	-18.6	-11.4	-9.3	-18.4	-16.5	-5.5	-20.5	-18.6	-11.4	-9.3	-18.4	-16.4	-5.1		
R	7.8	5.5	8.4	5.9	7.9	5.6	7.9	7.8	4.9	8.4	5.3	7.9	5.0	7.5		
cor.	0.6		0.7		0.6			0.6		0.7		0.6				
XGM2019e_2159																
σ	2.0	1.2	2.0	1.2	2.0	1.2	1.8	2.0	0.9	2.0	0.9	2.0	0.9	1.8		
m	16.2	14.2	6.7	4.7	14.0	12.0	2.7	16.2	14.1	6.7	4.5	14.0	11.9	2.7		
avg.	-15.9	-14.0	-6.4	-4.5	-13.7	-11.8	-1.9	-15.9	-13.9	-6.4	-4.4	-13.7	-11.7	-2.0		
max	-11.1	-12.0	-1.4	-2.7	-8.8	-9.8	2.2	-11.1	-12.0	-1.4	-2.7	-8.8	-9.9	2.3		
min	-20.4	-15.8	-11.3	-6.1	-18.3	-13.5	-8.3	-20.4	-15.0	-11.3	-5.6	-18.3	-12.8	-8.3		
R	9.3	3.8	9.9	3.4	9.4	3.7	10.5	9.3	3.0	9.9	2.9	9.4	3.0	10.6		
cor.	0.4		0.4		0.4			0.4		0.4		0.4				

**Статистичні характеристики області досліджень A1 з параметрами
площі /1° × 1°, контрольних точок /7k/ та оцінюваних точок /52t/
для гірського рельєфу**

Статистики	Територія, площа та параметри															
	A1(a)/1° × 1°/7k/52t															
	Система припливів															
	“free”		“mean”		“zero”		всі		“free”		“mean”		“zero”		всі	
	Тип похибок (см)															
	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN	ΔN	δN
EGM2008							GECO									
σ	1.6	0.8	1.7	0.9	1.7	0.8	1.4	1.6	0.9	1.8	1.0	1.7	0.9	1.3		
m	19.2	19.4	10.0	10.1	17.1	17.3	1.5	18.5	18.6	9.3	9.2	16.4	16.4	1.3		
<i>avg.</i>	-18.6	-18.8	-9.5	-9.8	-16.5	-16.7	0.2	-17.9	-18.0	-8.9	-8.9	-15.8	-15.9	0.1		
<i>max</i>	-16.2	-17.8	-7.2	-8.6	-14.2	-15.6	3.2	-15.8	-16.8	-6.8	-7.6	-13.7	-14.7	2.8		
<i>min</i>	-24.5	-20.2	-15.7	-11.4	-22.4	-18.1	-4.9	-23.8	-19.8	-15.0	-10.9	-21.8	-17.7	-4.4		
R	8.2	2.4	8.4	2.8	8.3	2.5	8.1	8.0	2.9	8.2	3.3	8.1	3.0	7.2		
<i>cor.</i>	0.5		0.5		0.5			0.6		0.7		0.6				
EIGEN-6C4							XGM2019e_2159									
σ	2.8	2.0	2.9	2.1	2.8	2.0	1.5	3.1	3.0	3.3	3.1	3.2	3.0	2.0		
m	17.1	16.9	8.1	7.8	15.0	14.8	1.5	18.3	18.3	9.3	9.3	16.2	16.2	2.0		
<i>avg.</i>	-16.4	-16.3	-7.4	-7.3	-14.3	-14.2	-0.1	-17.5	-17.6	-8.4	-8.5	-15.4	-15.5	0.0		
<i>max</i>	-13.2	-14.0	-4.0	-4.7	-11.0	-11.8	2.3	-11.9	-12.7	-2.6	-3.4	-9.8	-10.5	4.7		
<i>min</i>	-25.3	-20.2	-16.5	-11.4	-23.3	-18.2	-6.3	-25.6	-22.5	-16.8	-13.6	-23.5	-20.4	-4.6		
R	12.2	6.3	12.5	6.7	12.3	6.4	8.5	13.6	9.8	14.1	10.3	13.7	9.9	9.3		
<i>cor.</i>	0.9		0.9		0.9			0.8		0.8		0.8				

За результатами таблиці 4.4. бачимо, що для території з площею A1/3° × 3°/50k/450t під задані критерії аналізу не підпадає жодна модель. Це означає, що для територій з різним рельєфом моделювання похибок слід проводити на менших площах. Для площі A2/3° × 3°/50k/450t під критерії підпадають значення моделей EGM2008 та EIGEN-6C4, що уможливило коригування висот геоїда/квазігеоїда цих моделей з точністю 0.6 см для рівнинних територій розмірністю 3° × 3°.

З таблиці 4.5 видно, що для території A1/2° × 2°/39k/224t заданим критеріям відповідає точність коригування висот геоїда/квазігеоїда моделей

EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO на рівні 0.6 см, 0.6 см та 0.7 см, а для території $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$ – 0.3 см, 0.5 см та 0.6 см відповідно.

З таблиці 4.6 бачимо, що для території $A1$ з параметрами площі $/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$ точність залишкових похибок висот геоїда/квазігеоїда моделей EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO складає 0.3 см, 0.3 см та 0.5 см. Для території $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$ під критерії підпадає лише глобальна модель EIGEN-6C4 та GECO на рівні точності 0.7 см та 0.6 см відповідно.

За результатами таблиці 4.7 бачимо, що для області $1.5^\circ \times 2^\circ$ при моделюванні похибок на основі 30 контрольних значень заданим критеріям відповідають моделі EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO з точністю 0.5 см, 0.5 см та 0.7 см відповідно. При 17 контрольних значеннях критерії задовольняють лише дані моделі EGM2008 на рівні точності 0.8 см.

З таблиці 4.8 бачимо, що при моделюванні похибок за даними дев'яти або чотирьох контрольних значень лише модель EGM2008 відповідає заданим критеріям з точністю 0.9 см для обох випадків.

Результати таблиці 4.9 вказують на те, що точність залишкових похибок жодної моделі не задовольняє вимоги поставлених критеріїв. Однак, з огляду на те, що дана область охоплює суто гірський рельєф з приблизним перепадом висот від 255 м до 1365 м, то критерій точності стандартного відхилення та середнього квадратичного відхилення можна збільшити до 2 см. Таким чином, можна вважати, що для гірських районів висоти геоїда/квазігеоїда моделі EIGEN-6C4 можна скоригувати на рівні точності 1.5 см за даними мінімум семи контрольних пунктів.

Проаналізувавши всі відібрані варіанти територіального поділу за площами, формами рельєфу, а також за кількістю контрольних та оцінюваних точок необхідно підбити підсумки щодо отриманих результатів. Це дасть змогу виділити, ті глобальні моделі, які найбільш придатні для локального коригування висот на основі запропонованої методики. Узагальнений підсумок щодо відповідності результатів коригування обраним критеріям наведено в таблиці 4.10.

Відповідність залишкових похибок обраним критеріям

Опис параметрів території дослідження			Контрольні пункти	Назва моделі та відповідність критерію			
				EGM2008	EIGEN-6C4	GECO	XGM2019e_2159
1	3°×3°	з рівнинним, передгірським та гірським рельєфом	50	-	-	-	-
2	2°×2°	з рівнинним та передгірським рельєфом	39	+	+	+	-
3	1°×1°	з передгірським рельєфом	20	+	+	+	-
4	1°×1°	з гірським рельєфом ($\sigma, m < 2 \text{ cm}$)	7	-	+	-	-
5	3°×3°	з рівнинним рельєфом	50	+	+	+	-
6	2°×2°	з рівнинним рельєфом	39	+	+	+	-
7	1°×1°	з рівнинним рельєфом	20	+	+	+	-
8	1.5°×2°	з передгірським рельєфом	30	+	+	+	-
9	1.5°×2°	з передгірським рельєфом	17	+	-	-	-
10	1.5°×2°	з передгірським рельєфом	9	+	-	-	-
11	1.5°×2°	з передгірським рельєфом	4	+	-	-	-

Дані таблиці 4.10 вказують, що висоти моделі EGM2008, лише за виключенням параметра 1 та 4, можна скоригувати з точністю до 1 см з параметрами території дослідження 2-11. Таку ж точність можна забезпечити на основі коригування висот моделі EIGEN-6C4 з урахуванням параметрів території моделювання 2-8. Для висот моделі GECO точність менше ніж 1 см можна отримати для територій з параметрами 2-3 та 5-8. Висоти моделі XGM2019e_2159 не задовольняють жоден заданий критерій, оскільки здебільшого мають середній та низький коефіцієнти кореляції.

4.3. Практична значимість та додаткові рекомендації щодо впровадження запропонованої методики на регіональному рівні

Отримані експериментальні результати коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей показують, що відповідно до запропонованої методики можна досягти підвищення точності методу GNSS-нівелювання для локальних територій. При моделюванні похибок

висот глобальних моделей за даною методикою важливими критеріями, що впливають на точність кінцевого результату є:

- розмірність території на яку планується моделювання;
- форма рельєфу території;
- кількість та конфігурація розташування контрольних пунктів на основі яких буде проведено моделювання.

Результати коригування висот глобальних моделей свідчать, що оптимальний розмір території для моделювання похибок відповідає $1^\circ \times 1^\circ$. Така розмірність приблизно дорівнює ділянці у 111×85 км на фізичній поверхні Землі. Територія України розташована в межах $44^\circ \times 53^\circ$ по широті та $22^\circ \times 41^\circ$ по довготі, що дорівнює загальній ділянці $9^\circ \times 19^\circ$, або 171 локальна ділянка $1^\circ \times 1^\circ$. Разом з тим, щоб покрити повністю територію України в межах її кордону необхідно загалом 99 локальних ділянок розміром $1^\circ \times 1^\circ$. Однак, мережа пунктів високоточного геометричного нівелювання не покриває повністю всі 99 ділянок, а всього лиш 93. Для повноцінного моделювання похибок глобальних моделей на всю територію України необхідно спочатку виокремити всі ділянки розміром $1^\circ \times 1^\circ$, щоб вони максимально охоплювали територію в межах її кордону. Після цього, потрібно підібрати ділянки розміром $1^\circ \times 1.5^\circ$ (або $1.5^\circ \times 1^\circ$), щоб вони покрили решту територій в прикордонних зонах, та при цьому охоплювали мінімальну кількість нівелірних пунктів. Описану ситуацію зображено на рисунку 4.17. З використанням такого підходу, потенційне моделювання похибок стосуватиметься 60 локальних ділянок розміром $1^\circ \times 1^\circ$ та 12 ділянок розміром $1^\circ \times 1.5^\circ$ або $1.5^\circ \times 1^\circ$.

Для забезпечення точності коригування висот глобальних моделей на рівні 1 см потрібно 4-20 пунктів (в залежності від форм рельєфу) для однієї локальної ділянки. Загальна кількість всіх пунктів нівелювання I – II класу приблизно складає 17 070 (за інформацією, яка доступна автору). Таким чином, щоб виконати коригування висот обраної моделі для всієї території

України необхідно залучити від 372 до 1860 пунктів високоточного геометричного нівелювання. Така кількість пунктів в середньому відповідає 2-11% від всіх пунктів I – II класу. На цих пунктах слід провести GNSS-спостереження, щоб отримати висоти геометричного квазігеоїда, і після чого ці пункти стануть контрольними пунктами GNSS-нівелювання. Звідси слідує, що за допомогою методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей можна побудувати сітку поправок висот на регіональному рівні шляхом об'єднання суміжних локальних ділянок між собою.

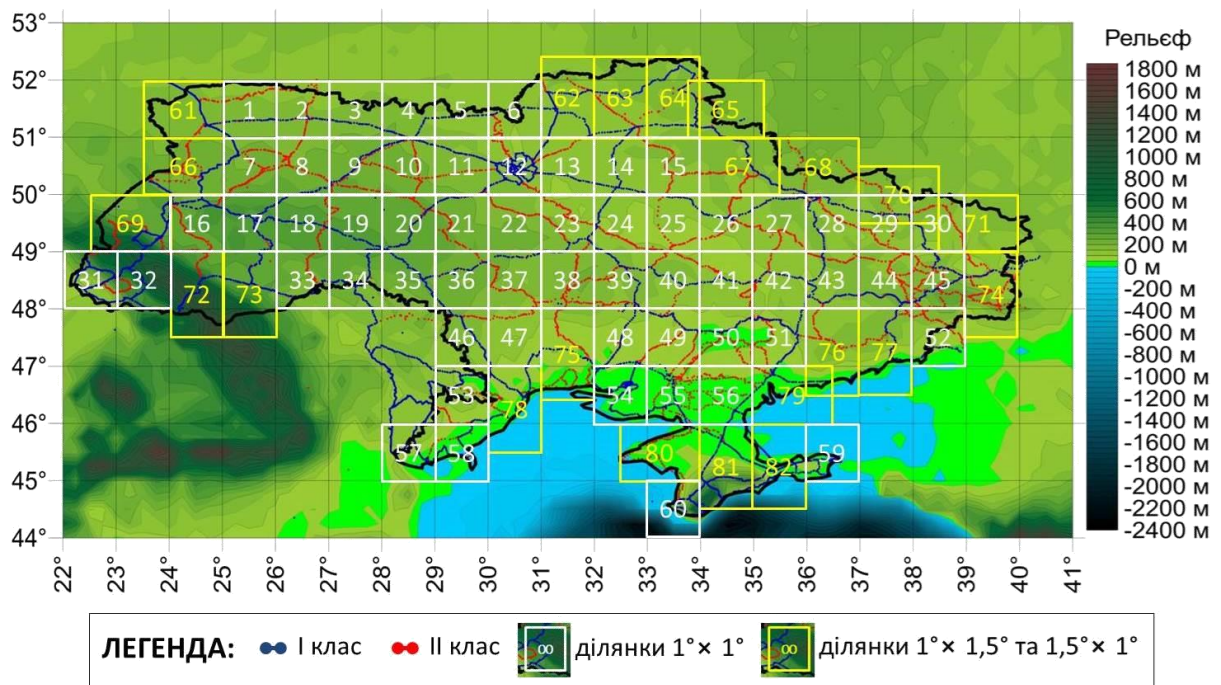


Рисунок 4.17 – Принцип розграфлення території України на локальні ділянки

Відповідно до результатів оцінювання залишкових похибок (див. розділ 4.2.3) найбільш придатними моделями для коригування висот є EGM2008 та EIGEN-6C4. Принцип переходу від локального до регіонального масштабу можна показати на прикладі двох основних територій, що використані для тестування методики (див. розділ 4.2.1). Таким чином, нехай ділянки A1 та A2 розміром 3° × 3° мають регіональний масштаб, і на ці території необхідно виконати моделювання похибок висот глобальних

моделей з використанням запропонованої методики. Для цього, необхідно розграфити кожну ділянку на локальні території розміром $1^\circ \times 1^\circ$, як зображено на рисунку 4.18. Як зазначалося, якщо якась з утворених локальних ділянок не охоплює мінімальної кількості пунктів геометричного нівелювання, то її необхідно збільшити до розмірності $1^\circ \times 1.5^\circ$ або $1.5^\circ \times 1^\circ$ та виконати індивідуальний підбір вигідного розташування такої ділянки (див. рис. 4.17). Проте, у запропонованому випадку, аналіз стосуватиметься лише розграфлення $1^\circ \times 1^\circ$, тобто без врахування цього критерію, що дасть змогу продемонструвати якість коригування, якщо знехтувати ним.

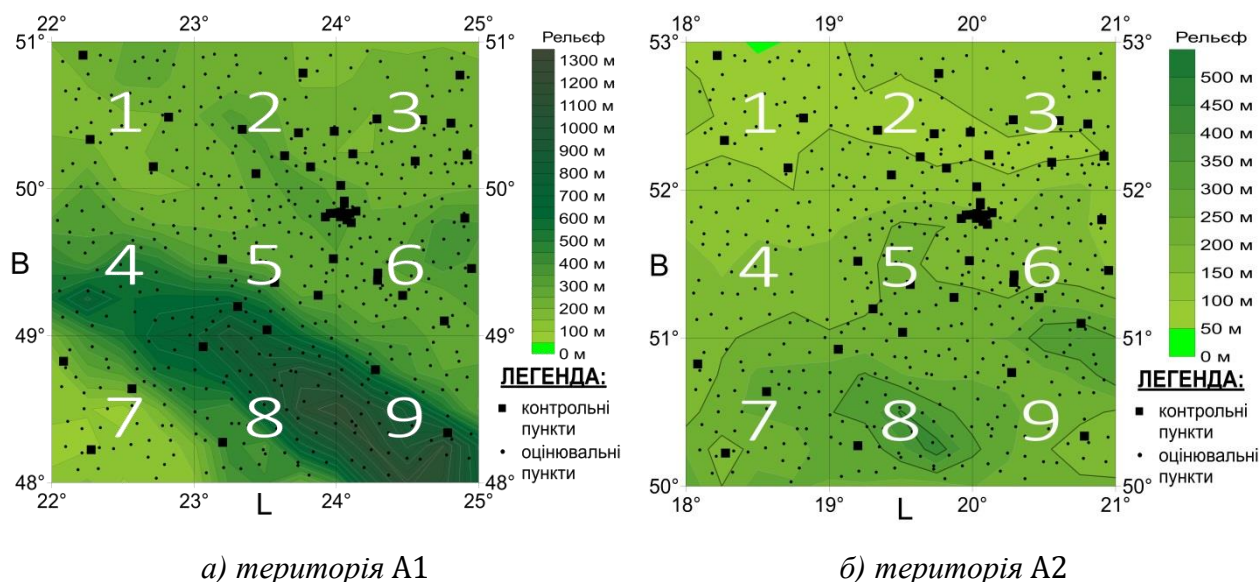


Рисунок 4.18 – Розграфлення “регіональних” територій на локальні ділянки

Після розграфлення, на кожну локальну ділянку слід змодельювати похибки висот глобальних моделей на основі запропонованої методики з урахуванням оптимальних параметрів (див. табл. 4.10). В таблиці 4.11 наведено статистичні характеристики оцінювання залишкових похибок висот на ділянках розміром $1^\circ \times 1^\circ$ за принципом переходу від локального до регіонального масштабу. Дані таблиці 4.11 наведено на основі загального моделювання похибок “регіональних” територій А1 та А2 розміром $3^\circ \times 3^\circ$, які були розграфлені на менші ділянки вже після процедури моделювання. В

таблиці 4.11 дані відповідають розграфленню “регіональної” території на локальні ділянки з нумеруванням із заходу на схід по довготі за принципом: №1, №2, №3, №4, №5, №6, №7, №8, №9 (див. рис. 4.18). При цьому, градація кольорів представлена в таблиці 4.11 відповідає: а) найсвітліша – найменше значення; б) найтемніша – найбільше значення.

Таблиця 4.11

**Статистики залишкових похибок локальних ділянок
“регіональних” територій**

Статистичні характеристики (см)	Модель EGM2008						Модель EIGEN-6C4					
	“Регіональна” територія A1			“Регіональна” територія A2			“Регіональна” територія A1			“Регіональна” територія A2		
Середньоквадратичне відхилення обчислених похибок	17.1	17.4	21.5	20.5	20.6	19.9	19.1	17.6	18.9	20.2	19.9	17.8
	15.8	18.5	20.8	20.5	20.7	20.2	16.2	15.3	16.5	20.7	21.2	17.0
	16.4	18.3	18.6	18.3	18.1	18.5	15.3	19.3	19.9	20.7	21.0	18.5
Середньоквадратичне відхилення залишкових похибок	0.4	0.5	0.6	0.3	0.3	0.2	0.8	0.5	0.4	0.4	0.5	0.3
	3.7	0.6	0.2	0.4	0.4	0.4	2.8	0.6	0.2	0.5	0.5	0.5
	1.9	2.7	3.7	0.6	1.1	1.0	1.8	3.8	5.1	0.6	0.8	0.9

За даними таблиці 4.11, можна побачити, що в порівнянні із початковими даними (обчислені похибки), значення залишкових похибок коригуються на рівні 1 см. Винятком є локальні ділянки території A1 із передгірським та гірським рельєфом, а саме №4,5 та №7,8,9. Підвищити точність коригування висот глобальних моделей на такого роду локальних ділянках можна шляхом збільшення кількості контрольних пунктів, як у випадку ділянки №5. Ця ділянка охоплює частину передгірського та гірського рельєфу, але на її території розташовано дев’ять контрольних пунктів, що дало змогу змодельовати похибки на рівні 1 см. На ділянці №4 не розташовано жодного пункту, тобто змодельовані похибки на рівні 2.8-3.7 см є похідними від даних суміжних ділянок. Фактично, похибки на такій ділянці потрібно моделювати збільшивши її до розміру 1° × 1.5°, тоді вона охопить чотири контрольні пункти ділянки №5 (див. рис. 4.18а), і відповідно точність моделювання покращиться.

Щодо результатів точності локальних ділянок №7-9 ситуація є схожою, оскільки на них також розташовано всього 2-3 контрольні пункти. У такому випадку, підвищити точність моделювання похибок можна збільшивши кількість контрольних пунктів та/або розмір ділянок до $1^\circ \times 1.5^\circ$. Територія А2 (див. рис. 4.18б) має аналогічну конфігурацію та кількість контрольних пунктів, однак точність залишкових похибок для ділянок №4,5,7,8,9 (див. табл. 4.11) є значно кращою ніж у випадку території А1. Це пов'язано з тим, що всі локальні ділянки території А2 розташовані суто в рівнинній місцевості, тому результат моделювання похибок знаходиться на рівні до 1 см. Якщо говорити про реалізацію запропонованої методики на всю територію України, то при наведеному регіональному розграфленні (див. рис. 4.17), ділянки №31,32,60 та №69,72,73,81 охоплюють суто гірський та передгірський рельєф. Звідси слідує, що для цих ділянок повинно бути залучено в середньому від 10 до 20 пунктів GNSS-нівелювання для якісного моделювання похибок висот глобальних моделей.

У загальному, точність методу GNSS-нівелювання поняття не зовсім однозначне, оскільки вона залежить від двох складових:

- з однієї сторони вагомий вплив на загальну точність мають похибки залученої моделі висот геоїда чи квазігеоїда;
- з іншої сторони свій вплив мають похибки визначення еліпсоїдних висот за даними GNSS-спостережень.

Методика запропонована в даній роботі розв'язує проблему точності саме висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей. Такий підхід обґрунтовано тим, що скориговані висоти глобальних моделей високого ступеня та порядку можна використовувати для реалізації GNSS-нівелювання з вищою точністю, якщо:

- для території робіт відсутня регіональна/локальна модель висот геоїда чи квазігеоїда;

- наявна регіональна/локальна модель висот геоїда чи квазігеоїда для території робіт недостатньо точна;
- дані наявної високоточної регіональної/локальної моделі висот геоїда чи квазігеоїда недоступні для загального користування на територію робіт.

Всі перелічені аспекти реалізації методу GNSS-нівелювання можна усунути за допомогою методики локального коригування висот глобальних моделей геоїда. З огляду результатів коригування висот саме глобальних моделей, отримана точність на рівні 1 см буде абсолютною. Однак, у такому випадку, залишається відкритим питання точності визначення еліпсоїдних висот із даних GNSS-спостережень. У розділі 1 та 2 зазначалося, що так звана “польова” точність GNSS-спостережень у середньому складає 1-2 см для висотної складової (еліпсоїдної висоти) за умови проведення якісних вимірів. Проблема підвищення “польової” точності є випадком зовсім іншого роду досліджень, що стоять перед науковим товариством. Разом з тим, прийняті стандарти щодо оцінювання точності геометричного нівелювання не зовсім доцільно порівнювати із точністю GNSS-нівелювання. Встановлені згідно з інструкцією з нівелювання [186] допустимі нев’язки для I – IV класу точності геометричного нівелювання характеризують відносну точність визначення висот цим методом, оскільки стосуються не самих висот, а перевищень між відомим та невідомим пунктом. Разом з тим, точність геометричного нівелювання залежить від шляху прокладання ходів нівелювання, довжин ліній, кількості проміжних станцій тощо. При цьому “польова” точність GNSS-спостережень залежить від зовсім інших джерел помилок, які описано у другому розділі, і при сучасних технічних можливостях вона залишається на рівні кількох сантиметрів.

Висновки до розділу 4

1. Розроблено методику локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для підвищення точності GNSS-нівелювання, в якій ключовими даними є похибки модельних висот та вагові коефіцієнти різниць гравітаційних аномалій. Наведено методику аналізу основних складових локального коригування висот глобальних моделей для можливості попереднього оцінювання ефективності коригування висот на заплановані території. На реальних даних проаналізовано придатність Kriging-методу для інтерполяції похибок висот глобальних моделей, що дало змогу виявити основні критерії щодо точності інтерполяції даних, як-от:

- точність інтерполяції похибок безпосередньо залежить від кількості залучених контрольних пунктів;
- вагомий вплив на точність має конфігурація взаємного розташування між контрольними пунктами;
- точність інтерполяції найбільше залежить від щільності розподілу зміни похибок між контрольними пунктами.

2. На основі експериментальних даних здійснено тестування методики локального коригування для різних географічних територій, що дало змогу виявити ключові параметри моделювання похибок висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, а саме:

- оптимальна площа для моделювання відповідає локальній ділянці розміром $1^\circ \times 1^\circ$;
- середня кількість пунктів для моделювання при рівнинному рельєфі складає від 4 до 10;
- для гірського та передгірського рельєфу в середньому необхідно 10-20 пунктів;

- якщо мережа пунктів геометричного нівелювання не охоплює локальну ділянку розміром $1^\circ \times 1^\circ$, то її потрібно збільшити до $1^\circ \times 1.5^\circ$ або $1.5^\circ \times 1^\circ$ та індивідуально підібрати її більш вигідне розташування.

3. Показано, що моделювання похибок висот можна виконувати з урахуванням будь-якої системи припливів, оскільки запропонована методика демонструє ефективність коригування висот в однаковій мірі незалежно від системи припливів. Результати коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей свідчать, що за допомогою запропонованої методики можна підвищити точність висот глобальних моделей до рівня 1-2 см для локальних територій. Така точність відповідає сучасному рівню “польових” GNSS-спостережень у статичному режимі.

4. Наведено інструкційні рекомендації для можливості створення поверхні поправок висот глобальних моделей на регіональному рівні за принципом поступового моделювання похибок на локальних ділянках, а потім загального об'єднання даних суміжних локальних ділянок між собою. Такий підхід уможливорює збереження локальної точності моделювання похибок висот глобальних моделей та власне уможливорює коригування висот для територій регіонального масштабу. Перевагою запропонованої методики також є те, що для можливості отримання поправок на всю територію України необхідно використати в середньому всього 11% пунктів геометричного нівелювання від загальної кількості всієї традиційної висотної мережі I – II класу точності.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано ряд теоретичних, практичних та експериментальних досліджень з метою локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, що направлені на розв'язання важливої науково-практичної задачі щодо проблеми підвищення точності GNSS-нівелювання.

В рамках проведених досліджень отримано основні результати дисертаційної роботи:

1. Обґрунтовано можливість використання висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей високого ступеня та порядку для визначення висот точок фізичної поверхні Землі методом GNSS-нівелювання, як альтернативу регіональним моделям. При цьому первинними параметрами визначення висот геоїда/квазігеоїда з глобальних моделей є оптимальне врахування системи припливів, відлікового еліпсоїда та ондуляції геоїда нульового порядку.

2. Показано, що висоти глобальних моделей містять систематичні похибки, які проявляються у вигляді “зсуву” щодо прийнятої системи висот, а їхня первинна точність не задовольняє більшість геодезичних робіт вищих класів. Водночас результати різноманітних досліджень показують, що найточніше виявити систематичні похибки висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей можна лише на локальному рівні.

3. Досліджено точність похибок висот глобальних моделей отриманих на пунктах високоточного геометричного нівелювання шляхом секторного, просторового та кількісного аналізу з огляду стандартних та середньоквадратичних відхилень.

4. Встановлено залежність між похибками модельних висот геоїда/квазігеоїда та похибками гравітаційних аномалій однойменних глобальних моделей. Виявлено ефективність коригування висот глобальних моделей на основі вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій.

5. Розроблено методику коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей, де вперше використано вагові коефіцієнти різниць гравітаційних аномалій, що дозволяє істотно знизити вплив похибок модельних висот і, таким чином, підвищити точність методу GNSS-нівелювання. Отримано результати оптимального підбору параметрів для моделювання похибок висот глобальних моделей в локальному масштабі.

6. На основі експериментальних даних перевірено методику локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для різних географічних територій з різною розмірністю площі та формами рельєфу. Результати оцінювання вказують на можливість коригування висот глобальних моделей EGM2008, EIGEN-6C4 та GECO до 1 см в рівнинній та передгірській місцевості з урахуванням відповідних параметрів. В гірських районах висоти моделей EGM2008 та GECO менш придатні для коригування, але висоти моделі EIGEN-6C4 можуть бути скориговані на рівні 1.5 см. Ефективність коригування висот моделі XGM2019e_2159 значно менша для всіх форм рельєфу через недостатньо високий коефіцієнт кореляції між обчисленими та змодельованими похибками. Отримані результати свідчать, що за допомогою методики локального коригування висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей можна підвищити точність визначення нормальних або ортометричних висот методом GNSS-нівелювання для будь-якої локальної території.

7. Запропоновано підхід щодо створення поля поправок висот глобальних моделей для можливості їхнього коригування на регіональному рівні. Реалізація запропонованої методики локального коригування модельних висот геоїда/квазігеоїда з можливістю переходу до регіонального масштабу дасть змогу виконувати GNSS-нівелювання для всієї території України з вищою точністю.

8. Запропонована методика уможлиблює реалізацію GNSS-нівелювання із залученням скоригованих висот геоїда/квазігеоїда глобальних моделей для визначення нормальних (або ортометричних) висот

точок фізичної поверхні Землі на рівні 1-2 см. Отримана точність відповідає вимогам щодо багатьох видів геодезичних робіт, зокрема: побудова та оновлення нівелірних мереж III – IV класу точності, створення висотної основи для топографічних карт всіх масштабів, виконання технічного нівелювання, моніторинг небезпечних техногенних та природних явищ, реалізація 3-D кадастрових знімачів, забезпечення висотної основи у будівельній, транспортній, нафтогазовій, гірничодобувній, водогосподарській сферах, можливість прив'язки GNSS-станцій до традиційної нівелірної мережі або новітньої вертикальної референцної системи висот тощо.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Akcin, H., Celik, C. T. (2013). Performance of artificial neural networks on kriging method in modeling local geoid. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 19 (1), 84-97. DOI: [10.1590/S1982-21702013000100006](https://doi.org/10.1590/S1982-21702013000100006)
2. Albayrak, M., Özlüdemir, M. T., Aref, M. M., Halicioğlu, K. (2020). Determination of Istanbul geoid using GNSS/levelling and valley cross levelling data. *Geodesy and Geodynamics*, 11 (3), 163-173. DOI: [10.1016/j.geog.2020.01.003](https://doi.org/10.1016/j.geog.2020.01.003)
3. Altamimi, Z. (2018). EUREF Technical Note 1: Relationship and Transformation between the International and the European Terrestrial Reference Systems. EUREF Technical Note 1, Version June 28 (2018), 11. URL: <http://etrs89.ensg.ign.fr/pub/EUREF-TN-1.pdf>
4. Ampatzidis, D., Bitharis, S., Pikridas, C., Demirtzoglou, N. (2018). On the improvement of the orthometric heights via GNSS-levelling: The case of Drama area in Greece. *ZfV – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement*, 143 (3), 185-190. DOI: [10.12902/zfv-0204-2018](https://doi.org/10.12902/zfv-0204-2018)
5. Arana, D., Camargo, P. O., Guimaraes, G. N. (2017). Hybrid geoid model: theory and application in Brazil. *Engineering Sciences. Anais Da academia brasileira de ciências*, 89 (3), 1943-1959. DOI: [10.1590/0001-3765201720160802](https://doi.org/10.1590/0001-3765201720160802)
6. Araszkievicz, A., Bogusz, J., Figurski, M., Szafranek, K. (2010). Application of short-time GNSS solution geodynamical studies. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 7 (3/159), 295-302. URL: https://www.irsm.cas.cz/materialy/acta_content/2010_03/7_Araszkievicz.pdf
7. Ardalan A., Karimi R., Grafarend E. (2010). A New Reference Equipotential Surface, and Reference Ellipsoid for the Planet Mars. *Earth Moon and Planets*, 106, 1-13. DOI: [10.1007/s11038-009-9342-7](https://doi.org/10.1007/s11038-009-9342-7)
8. Balmino, G., Vales, N., Bonvalot, S., Briais, A. (2012). Spherical harmonic modelling to ultra-high degree of Bouguer and isostatic anomalies. *Journal of Geodesy*, 86 (7), 499-520. URL: [10.1007/s00190-011-0533-4](https://doi.org/10.1007/s00190-011-0533-4)
9. Barthelmes, F. (2013). Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by

the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Scientific Technical Report, 09/02, Potsdam: GFZ, 32. DOI: [10.2312/GFZ.b103-0902-26](https://doi.org/10.2312/GFZ.b103-0902-26)

10. Barthelmes, F. (2014). Global models. Encyclopedia of Geodesy, Springer International Publishing, 1-9. DOI: [10.1007/978-3-319-02370-0_43-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02370-0_43-1)

11. Bonvalot, S., Balmino, G., Briais, A., Kuhn, M., Peyrefitte, A., Vales, N., Biancale, R., Gabalda, G., Moreaux, G., Reinquin, F., Sarrailh, M. (2012). World Gravity Map. Bureau Gravimetrique International (BGI), map, CGMW-BGI-CNES-IRD Ed., Paris., 2012, 1-8. URL: https://www5.obs-mip.fr/wp-content/uploads/sites/46/2017/10/WGM_2012_explanatory_leaflet-1.pdf

12. Bruns, H. (1878). Die Figur der Erde: Ein Beitrag zur europäischen Gradmessung. Berlin, Druck und verlag von P. Stankiewicz buchdruckerei, 49.

13. Bruyninx, C., Legrand, J., Fabian, A., Pottiaux E. (2019). GNSS metadata and data validation in the EUREF Permanent Network. GPS Solut, 23 (106) 1-22. DOI: [10.1007/s10291-019-0880-9](https://doi.org/10.1007/s10291-019-0880-9)

14. Burša, M., Kouba, J., Kumar, M., Müller, A., Raděj, K., True, S. A., Vojtíšková, M. (1999). Geoidal geopotential and world height system. Studia Geophysica et Geodaetica, 43 (4), 327-337. DOI: [10.1023/A:1023273416512](https://doi.org/10.1023/A:1023273416512)

15. Cakir, L., Yilmaz, N. (2014). Polynomials, radial basis functions and multilayer perceptron neural network methods in local geoid determination with GPS/levelling. Measurement, 57, 148-153. DOI: [10.1016/j.measurement.2014.08.003](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2014.08.003)

16. Celms, A., Reķe, I., Kaminskis, J. (2017). Common Studies of National Height System in Latvia and Lithuania. International Scientific Conference “Research for environment and civil engineering development 17”, 64-69. DOI: [10.22616/ce.2018.009](https://doi.org/10.22616/ce.2018.009)

17. Celms, A., Rusiņš, J., Reķe, I. (2016). Research of National geodetic network using GNSS methods. Modern achievements of geodesic science and industry, 1 (31), 63-68. URL: <http://zgt.com.ua/wp-content/uploads/2016/04/A.Celms-J.Rusi%C5%86%C5%A1-I.Re%C4%B7e.pdf>

18. Ch, F., Bruinsma, S. L., Abrikosov, O., Lemoine, J. M., Schaller, T., Götze, H. J., Biancale, R. (2014). EIGEN-6C4 – The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. GFZ Data Services. DOI: [10.5880/icgem.2015.1](https://doi.org/10.5880/icgem.2015.1)
19. Chen, C. S., Chiu, Y. J., Lee, C. T., Lin, J. M. (2013). Calculation of weighted geometric dilution of precision. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 10. DOI: [10.1155/2013/953048](https://doi.org/10.1155/2013/953048)
20. Chivatsi J., Md D., Ami H., Pa'suya M. F. (2021). Computation of gravity field functionals with a localized level ellipsoid. *Journal of Information System and Technology Management*, 6 (24), 226-242. DOI: [10.35631/jistm.624022](https://doi.org/10.35631/jistm.624022)
21. Cong, L., Ahmed, I. A., Tan, Z. Z. (2006). Analysis and simulation of the GDOP of satellite navigation. *Acta Electronica Sinica*, 34 (12), 2204-2208. URL: <https://www.ejournal.org.cn/EN/Y2006/V34/I12/2204>
22. Corchete, V. (2013). The first high-resolution gravimetric geoid for Ukraine: UGG2013. *Server on Geodesy, Seismology and Environmental Sciences*, 1-5. URL: <https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/Ukraine/Ukraine.pdf>
23. Darbeheshti, N., Featherstone, W. E. (2010). Tuning a gravimetric quasigeoid to GPS-levelling by non-stationary least-squares collocation. *Journal of Geodesy*, 84 (7), 419-431. DOI: [10.1007/s00190-010-0377-3](https://doi.org/10.1007/s00190-010-0377-3)
24. Denker, H. (2013). *Regional Gravity Field Modeling: Theory and Practical Results*. In: Xu, G. (eds) *Sciences of Geodesy – II*, Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-28000-9_5](https://doi.org/10.1007/978-3-642-28000-9_5)
25. Denker, H. (2015). A new European gravimetric (quasi) geoid EGG2015. Poster presented at XXVI General Assembly of the International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG), Earth and Environmental Sciences for Future Generations, Prague, Czech Republic. URL: https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/IUGG_2015_EGG2015.pdf
26. Dong-feng R., Yun-peng L., Zhen-li M. (2009). Test and analysis on the errors of GPS observation in mining field. *Procedia Earth and Planetary Science*, 1 (1), 1233-1236. DOI: [10.1016/j.proeps.2009.09.189](https://doi.org/10.1016/j.proeps.2009.09.189)

27. Dow, J. M., Neilan, R. E., Rizos, C. (2009). The international GNSS service in a changing landscape of global navigation satellite systems. *Journal of geodesy*, 83 (3), 191-198. DOI: [10.1007/s00190-008-0300-3](https://doi.org/10.1007/s00190-008-0300-3)
28. Ekman, M. (1989). Impacts of geodynamic phenomena on systems for height and gravity. *Bulletin Géodésique*, 63 (3), 281-296. DOI: [10.1007/BF02520477](https://doi.org/10.1007/BF02520477)
29. EL-Hattab, A. I. (2013). Influence of GPS antenna phase center variation on precise positioning. *NRIAG Journal of Astronomy and Geophysics*, 2 (2), 272-277. DOI: [10.1016/j.nrjag.2013.11.002](https://doi.org/10.1016/j.nrjag.2013.11.002)
30. Ellmann, A., Kaminskis, J., Parseliunas, E., Jürgenson, H., Oja, T. (2009). Evaluation results of the Earth Gravitational Model EGM08 over the Baltic countries. *Newton's Bulletin*, 4, 110-121. URL: https://www.isgeoid.polimi.it/Newton/Newton_4/Report_EA2_Baltic.pdf
31. El-Mowafy, A. (2012). Precise real-time positioning using Network RTK. *Global navigation satellite systems: signal, theory and applications*, 7, 161-188. DOI: [10.5772/29502](https://doi.org/10.5772/29502)
32. Elshambaky, H. T. (2018). Application of neural network technique to determine a corrector surface for global geopotential model using GPS/levelling measurements in Egypt. *Journal of Applied Geodesy*, 12 (1), 29-43. DOI: [10.1515/jag-2017-0017](https://doi.org/10.1515/jag-2017-0017)
33. Erol B., Erol S. (2012). GNSS in Practical Determination of Regional Heights. *Global Navigation Satellite Systems: Signal, Theory and Applications*, Chapter 6, 127-160. DOI: [10.5772/28820](https://doi.org/10.5772/28820)
34. Eshagh, M., Zoghi, S. (2016). Local error calibration of EGM08 geoid using GNSS/levelling data. *Journal of Applied Geophysics*, 130, 209-217. DOI: [10.1016/j.jappgeo.2016.05.002](https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2016.05.002)
35. Falchi, U., Parente, C., Prezioso, G. (2018). Global geoid adjustment on local area for GIS applications using GNSS permanent station coordinates. *Geodesy and Cartography*, 44 (3), 80-88. DOI: [10.3846/gac.2018.4356](https://doi.org/10.3846/gac.2018.4356)

36. Fanos A., Tahir R., Mahmood M. (2018). Calculating of adjusted geoid undulation based on EGM08 and mean sea level for different regions in Iraq. MATEC Web of Conferences, 162, 03028. DOI: [10.1051/matecconf/201816203028](https://doi.org/10.1051/matecconf/201816203028)
37. Featherstone, W. E. (2008). GNSS-based heighting in Australia: Current, emerging and future issues. Journal of Spatial Science, 53 (2), 115-133. DOI: [10.1080/14498596.2008.9635153](https://doi.org/10.1080/14498596.2008.9635153)
38. Featherstone, W. E., Kuhn, M. (2006). Height systems and vertical datums: a review in the Australian context. Journal of Spatial Science, 51 (1), 21-41. DOI: [10.1080/14498596.2006.9635062](https://doi.org/10.1080/14498596.2006.9635062)
39. Fedorchuk A., (2022). The Potential Application of the GNSS Leveling Method in Local Areas by Means of Sector Analysis. Geomatics and environmental engineering, 16 (3), 41-55, DOI: [10.7494/geom.2022.16.3.41](https://doi.org/10.7494/geom.2022.16.3.41)
40. Foroughi, I. (2018). Accuracy of the classical height system (Doctoral dissertation, University of New Brunswick). URL: <http://www2.unb.ca/gge/Pubs/TR316.pdf>
41. Foroughi, I., Tenzer, R. (2017). Comparison of different methods for estimating the geoid-to-quasi-geoid separation. Geophysical journal international, 210 (2), 1001-1020. DOI: [10.1093/gji/ggx221](https://doi.org/10.1093/gji/ggx221)
42. Fotopoulos, G. (2005). Calibration of geoid error models via a combined adjustment of ellipsoidal, orthometric and gravimetric geoid height data. Journal of Geodesy, 79 (1-3), 111-123. DOI: [10.1007/s00190-005-0449-y](https://doi.org/10.1007/s00190-005-0449-y)
43. Fritsche, M., Dietrich, R., Knöfel, C., Rülke, A., Vey, S., Rothacher, M., Steigenberger, P. (2005). Impact of higher-order ionospheric terms on GPS estimates. Geophysical research letters, 32 (23), 1-5. URL: [10.1029/2005GL024342](https://doi.org/10.1029/2005GL024342)
44. Gauss C. F. (1902). General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Princeton: Princeton University Library, 126. URL: <https://jscholarship.library.jhu.edu/bitstream/handle/1774.2/34051/31151001225840.pdf>
45. Geiger, A. (1988). Modeling of phase center variation and its influence on GPS-positioning. In GPS-Techniques Applied to Geodesy and Surveying. Springer, Berlin, Heidelberg, 19, 210-222. DOI: [10.1007/BFb0011339](https://doi.org/10.1007/BFb0011339)

46. Gilardoni, M., Reguzzoni, M., Sampietro, D. (2016). GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 60 (2), 228-247. DOI: [10.1007/s11200-015-1114-4](https://doi.org/10.1007/s11200-015-1114-4)
47. GIS Resources. (2014). Free GPS Online Post Processing Services. URL: <https://gisresources.com/free-gps-online-post-processing-services/>
48. Główny Urząd Geodezji i Kartografii. Modele danych (Model_quasi-geoidy-PL-geoid2021-PL-EVRF2007-NH.txt) [online] Available at: http://www.gugik.gov.pl/data/assets/text_file/0008/236546/Model_quasi-geoidy-PL-geoid2021-PL-EVRF2007-NH.txt [Access: 12.03.2022]
49. Gruber, T. H., Gerlach, C., Haagmans, R. (2012). Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-levelling data. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), 270-280. DOI: [10.2478/v10156-012-0001-y](https://doi.org/10.2478/v10156-012-0001-y)
50. Gruber, T., Zingerle, P., Pail, R., Oikonomidou, X. (2019). High resolution gravity field models as global reference surface for heights. In *Simposio SIRGAS Sistema de Referencia Geocentrico para las Americas and 2019 GGOS Days*. Rio de Janeiro, 12.11.2019. URL: <https://mediatum.ub.tum.de/doc/1523939/file.pdf>
51. Guo, D. M., Xu, H. Z. (2015). Application of variance components estimation to calibrate geoid error models. *SpringerPlus*, 4 (1), 1-12. DOI: [10.1186/s40064-015-1210-5](https://doi.org/10.1186/s40064-015-1210-5)
52. Hayden, T., Amjadiparvar, B., Rangelova, E., Sideris, M. G. (2012). Estimating Canadian vertical datum offsets using GNSS/levelling benchmark information and GOCE global geopotential models. *Journal of Geodetic Science*, 2 (4), 257-269. DOI: [10.2478/v10156-012-0008-4](https://doi.org/10.2478/v10156-012-0008-4)
53. Head Office of Geodesy and Cartography. (2022). Opis techniczny obowiązującego modelu quasi-geoidy PL-geoid2021 w układzie PL-EVRF2007-NH. Raport techniczny (in Polish), Warszawa, Poland. URL: https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/Poland/TechnicalReportPL1_1.pdf
54. Hećimović, Ž. (2013). Relativistic effects on satellite navigation. *Technical Gazette*, 20 (1), 195-203. URL: <https://hrcak.srce.hr/file/143529>

55. Heiskanen, W. A., Moritz, H. (1993). *Physical Geodesy*. Graz, Austria: Institute of Physical Geodesy of Technical University of Graz, 375.
56. Hobiger, T., Jakowski, N. (2017). *Atmospheric Signal Propagation*. Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems, 165-193. DOI: [10.1007/978-3-319-42928-1_6](https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1_6)
57. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. (2008). *GNSS – Global Navigation Satellite Systems GPS, GLONASS, Galileo, and more*. Springer Wien, New York, 516.
58. Hofmann-Wellenhof B., Moritz H. (2005). *Physical Geodesy*. 2nd ed. Springer Wien, New York, 403.
59. Hoque, M. M., Jakowski, N. (2008). Estimate of higher order ionospheric errors in GNSS positioning. *Radio Science*, 43 (05), 1-15. DOI: [10.1029/2007RS003817](https://doi.org/10.1029/2007RS003817)
60. Hosseini-Asl, M., Amiri-Simkooei, A. R., Safari, A. (2022). Establishment of a corrective geoid surface by spline approximation of Iranian GNSS/levelling network. *Measurement*, 197, 111341. DOI: [10.1016/j.measurement.2022.111341](https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.111341)
61. Hosseini-Asl, M., Amiri-Simkooei, A., Safari, A. (2021). Combination of regional and global geoid models at continental scale: application to Iranian geoid. *Annals of Geophysics*, 64 (4), GD434. DOI: [10.4401/ag-8643](https://doi.org/10.4401/ag-8643)
62. IAG. (1984). Resolutions adopted by the International Association of Geodesy: The XVIIIth General Assembly, *Bulletin géodésique*, 58, 309-323. DOI: [10.1007/BF02519005](https://doi.org/10.1007/BF02519005)
63. ICGEM. (2022). Calculation Service: Regular grids. [online] Available at: <http://icgem.gfz-potsdam.de/calgrid> [Accessed 01/2022]
64. ICSM, GWG (2021). Australian Vertical Working Surface (AVWS). Technical Implementation Plan, Version 1.6. Commonwealth of Australia (Geoscience Australia), 1-24. URL: https://www.icsm.gov.au/sites/default/files/2021-09/AVWS%20Technical%20Implementation%20Plan_V1.6.pdf
65. Ihde, J., Adam, J., Gurtner, W., Harsson, B. G., Schlüter, W., Wöppelmann, G. (1998). The concept of the European Vertical GPS reference

network (EUVN). In Report on the Symposium of the IAG Subcommittee for Europe (EUREF) held in Bad-Neuenahr-Ahrweiler, 1-22. URL: <http://www.euref.eu/documentation/EUVN/EUVN.pdf>

66. Ihde, J., Augath, W., Sacher, M. (2002). The vertical reference system for Europe. International Association of Geodesy Symposia, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 345-350. DOI: [10.1007/978-3-662-04683-8_64](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04683-8_64)

67. Ince E. S., Barthelmes F., Reißland S., Elger K., Foerste C., Flechtner F., Schuh H. (2019). ICGEM – 15 years of successful collection and distribution of global gravitational models, associated services, and future plans. Earth System Science Data, 11, 647–674. DOI: [10.5194/essd-11-647-2019](https://doi.org/10.5194/essd-11-647-2019)

68. Ince, E. S., Reißland, S., Barthelmes, F. (2019). International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Report of the IAG – Travaux de l'AIIG 2015-2019, 41, 1-6. URL: https://iag.dgfi.tum.de/fileadmin/IAG-docs/Travaux2019/28_ICGEM_2015-2019.pdf

69. International Centre for Global Earth Models (ICGEM) [online] Available at: <http://icgem.gfz-potsdam.de/home> [Accessed 21.08.2020]

70. International Service for the Geoid (IGS) [online] Available at: <https://www.isgeoid.polimi.it/index.html> [Accessed 21.08.2020]

71. Irsigler, M., Hein, G. W., Eissfeller, B. (2004). Multipath performance analysis for future GNSS signals. In Proceedings of the 2004 National Technical Meeting of The Institute of Navigation, 2004, 225-238. URL: <https://www.ion.org/publications/abstract.cfm?articleID=5498>

72. Janssen, V., Watson, T. (2010). Improved AHD71 height determination from GNSS using AUSGeoid09 in New South Wales, Australia. Journal of Global Positioning Systems, 9 (2), 112-121. URL: http://www.dxkjs.com/CPGPS/publication/pdf/JoGPS_v9n2p112-121.pdf

73. Jeffreys, H. (1931). An application of the free-air reduction of gravity. Gerlands Beiträge zur Geophysik, 31, 378-386.

74. Jin, S., Cardellach, E., Xie, F. (2014). GNSS remote sensing: Theory, Methods and Applications. Springer Dordrecht Heidelberg, New York, London, ISBN 978-94-007-7482-7 (eBook), 286. DOI: [10.1007/978-94-007-7482-7](https://doi.org/10.1007/978-94-007-7482-7)

75. Karaim, M., Elsheikh, M., Noureldin, A., Rustamov, R. B. (2018). GNSS error sources. Multifunctional Operation and Application of GPS, 69-85. DOI: [10.5772/intechopen.75493](https://doi.org/10.5772/intechopen.75493)
76. Khazraei, S. M., Nafisi, V., Amiri-Simkooei, A. R., Asgari, J. (2017). Combination of GPS and leveling observations and geoid models using least-squares variance component estimation. Journal of Surveying Engineering, 143 (2), 04016023. DOI: [10.1061/\(asce\)su.1943-5428.0000205](https://doi.org/10.1061/(asce)su.1943-5428.0000205)
77. Kim, K. B., Yun, H. S., Choi, H. J. (2020). Accuracy evaluation of geoid heights in the national control points of south Korea using high-degree geopotential model. Applied sciences, 10 (4), 1466. DOI: [10.3390/app10041466](https://doi.org/10.3390/app10041466).
78. Kim, S. K., Park, J., Gillins, D., Dennis, M. (2018). On determining orthometric heights from a corrector surface model based on leveling observations, GNSS, and a geoid model. Journal of Applied Geodesy, 12 (4), 323-333. DOI: [10.1515/jag-2018-0014](https://doi.org/10.1515/jag-2018-0014)
79. Kirby, J. F., Featherstone, W. E. (1997). A study of zero- and first-degree terms in geopotential models over Australia. Geomatics Research Australasia, 66, 93-108. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=29cc1d5892b096c202e84564a66caa0aa76092e4>
80. Klees, R., Prutkin, I. (2010). The combination of GNSS-levelling data and gravimetric (quasi-) geoid heights in the presence of noise. Journal of Geodesy, 84 (12), 731-749. DOI: [10.1007/s00190-010-0406-2](https://doi.org/10.1007/s00190-010-0406-2)
81. Knight, M. F., Finn, A., Cervera, M. (1998). Ionospheric effects on global positioning system receivers. Defence Science and Technology Organisation Canberra (Australia), 96. URL: <https://apps.dtic.mil/sti/pdfs/ADA342594.pdf>
82. Kostelecky, J., Klokocník, J., Bucha, B., Bezdek, A., Förste, C. (2015). Evaluation of gravity field model EIGEN-6C4 by means of various functions of gravity potential, and by GNSS/levelling. Geoinformatics FCE CTU, 14 (1), 7-28. DOI: [10.14311/gi.14.1.1](https://doi.org/10.14311/gi.14.1.1)

83. Kotsakis, C., Katsambalos, K., Ampatzidis, D., Gianniou, M. (2010). Evaluation of EGM08 Using GPS and Leveling Heights in Greece. Gravity, Geoid and Earth Observation, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 481-488. DOI: [10.1007/978-3-642-10634-7_64](https://doi.org/10.1007/978-3-642-10634-7_64)
84. Kouba, J. (2009). A guide to using International GNSS Service (IGS) products. URL: https://files.igs.org/pub/resource/pubs/UsingIGSProductsVer21_cor.pdf
85. Kryński J., Kloch-Główka G. (2009). Evaluation of the Performance of the New EGM2008 Global Geopotential Model over Poland. Geoinformation Issues, 1 (1), 7–17. DOI: [10.34867/gi.2009.1](https://doi.org/10.34867/gi.2009.1)
86. Langley, R. B. (1997). GPS receiver system noise. GPS world, 8 (6), 40-45. URL: <http://gauss2.gge.unb.ca/papers.pdf/gpsworld.june97.pdf>
87. Lau, L., Cross, P. (2007). Development and testing of a new ray-tracing approach to GNSS carrier-phase multipath modelling. Journal of Geodesy, 81(11), 713-732. DOI: [10.1007/s00190-007-0139-z](https://doi.org/10.1007/s00190-007-0139-z)
88. Lee, S. B., Auh, S. C. (2015). Accuracy analysis of GPS ellipsoidal height determination in accordance with the surveying conditions. Journal of Korean Society for Geospatial Information Science, 23 (4), 67-74. DOI: [10.7319/kogsis.2015.23.4.067](https://doi.org/10.7319/kogsis.2015.23.4.067)
89. Li, X., Götze, H. J. (2001). Ellipsoid, geoid, gravity, geodesy, and geophysics. Geophysics, 66 (6), 1660-1668. DOI: [10.1190/1.1487109](https://doi.org/10.1190/1.1487109)
90. Liang, W., Li, J., Xu, X., Zhang, S., Zhao, Y. (2020). A high-resolution Earth's gravity field model SGG-UGM-2 from GOCE, GRACE, satellite altimetry, and EGM2008. Engineering, 6 (8), 860-878. DOI: [10.1016/j.eng.2020.05.008](https://doi.org/10.1016/j.eng.2020.05.008)
91. Lin, L. S. (2014). Orthometric height improvement in Tainan City using RTK GPS and local geoid corrector surface models. Journal of Surveying Engineering-asce, 140 (1), 35-43. DOI: [10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000114](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000114)
92. Listing, J. B. (1873). Ueber unsere jetzige Kenntniss von der Gestalt und Grösse der Erde. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen, 3, 33-98.

93. Liu, X., Wu, X. (2015). Construction of Earth's gravitational field model from CHAMP, GRACE and GOCE data. *Geodesy and Geodynamics*, 6 (4), 292-298. DOI: [10.1016/j.geog.2015.06.001](https://doi.org/10.1016/j.geog.2015.06.001)
94. Łyszkowicz, A. (2019). Realization of the International Height Reference System – state of art. *Modern achievements of geodesic science and industry*, 1, 51-56. DOI: [10.33841/1819-1339-2019-1-37-51-56](https://doi.org/10.33841/1819-1339-2019-1-37-51-56)
95. Maciuk, K. (2019). Satellite clock stability analysis depending on the reference clock type. *Arabian Journal of Geosciences*, 12 (2), 1-7. DOI: [10.1007/s12517-018-4069-2](https://doi.org/10.1007/s12517-018-4069-2)
96. Mäkinen, J. (2021). The permanent tide and the International Height Reference Frame IHRF. *Journal of Geodesy*, 95 (106), 1-19. URL: [10.1007/s00190-021-01541-5](https://doi.org/10.1007/s00190-021-01541-5)
97. Marchenko, A. N., Kucher, O. V., Marchenko D. A. (2015). Regional quasigeoid solutions for the Ukraine area. *JGD*, 19 (2), 7-14. DOI: [10.23939/jgd2015.02.007](https://doi.org/10.23939/jgd2015.02.007)
98. Marchenko, A., Kucher, O. (2008). On the quasigeoid solutions for the Ukraine and Moldova area. *EUREF2008 Symposium*, June 2008, Brussels, Belgium. URL: https://www.isgeoid.polimi.it/Geoid/Europe/Ukraine/Marchenko_Kucher.pdf
99. Marjańska, D., Olszak, T., Piętka, D. (2019). Validation of European Gravimetric Geoid models in context of realization of EVRS system in Poland. *Geodesy and Cartography*, 68 (2), 329–347. DOI: [10.24425/gac.2019.128461](https://doi.org/10.24425/gac.2019.128461)
100. Marti, U. (2002). Modelling of differences of height systems in Switzerland. *Gravity and geoid*, 379-383. URL: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.483.7416&rep=rep1&type=pdf>
101. McCarthy, D. D., Petit, G. (2004). IERS conventions (2003). *IERS Technical Note*, 32, 127. URL: <https://iers-conventions.obspm.fr/archive/2003/tn32.pdf>
102. Moritz H. (1980). *Advanced physical geodesy*. Abacus Press, Tunbridge Wells, 500.
103. Moritz, H. (1988). Geodetic reference system 1980. *Bulletin Géodésique*, 62 (3), 348-358. DOI: [10.1007/bf02520722](https://doi.org/10.1007/bf02520722)

104. Nahavandchi, H., Soltanpour, A. (2006). Improved determination of heights using a conversion surface by combining gravimetric quasi-geoid/geoid and GPS-levelling height differences. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 50 (2), 165-180. DOI: [10.1007/s11200-006-0010-3](https://doi.org/10.1007/s11200-006-0010-3)
105. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). (1984). Standardization Document “Department of Defense, World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems”. Version 1.0.0. 208. URL: <https://nsgreg.nga.mil/doc/view?i=4085>
106. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). EGM2008-WGS84 Version. [online] Available at: <https://www.nga.mil/index.html> [Access: 22.01.2021]
107. Natural Resources Canada. (2020). Height Reference System Modernization. Version: 2.0 (2020-10-21), CGS2020-002, 1-24. URL: [https://www.nrcan.gc.ca/sites/nrcan/files/files/pdf/Height_reference_system_modernization_\(EN\).pdf](https://www.nrcan.gc.ca/sites/nrcan/files/files/pdf/Height_reference_system_modernization_(EN).pdf)
108. Newton, I. (1687). *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater, Prostat apud plures bibliopolas. URL: [10.5479/sil.52126.39088015628399](https://doi.org/10.5479/sil.52126.39088015628399)
109. Novák, P., Klokocník, J., Kostelecký, J., Zeman, A. (2009). Testing EGM08 using Czech GPS/leveling data. *Newton’s Bull*, 4, 126-132. URL: https://www.isgeoid.polimi.it/Newton/Newton_4/Report_EA4_Czech.pdf
110. Odera, P. A., Fukuda, Y., Kuroishi, Y. (2012). A high-resolution gravimetric geoid model for Japan from EGM2008 and local gravity data. *Earth, Planets and Space*, 64 (5), 361-368. DOI: [10.5047/eps.2011.11.004](https://doi.org/10.5047/eps.2011.11.004)
111. Odumosu, J. O., Onuigbo, I. C., Nwadiakor, I. J., Elegbede, D., Kemiki, O. A. (2017). Analysis of some factors that affect accuracy in long wavelength geoid determination using GrafLab. Project: Geoid Modelling, 1, 91-103. URL: <http://repository.futminna.edu.ng:8080/jspui/handle/123456789/10381>
112. Olea, R. A. (1974). Optimal contour mapping using universal kriging. *Journal of Geophysical Research*, 79 (5), 695-702. DOI: [10.1029/JB079i005p00695](https://doi.org/10.1029/JB079i005p00695)
113. Ollikainen, M., Ollikainen, M. (2004). The finnish coordinate reference systems. Finnish Geodetic Institute and the National Land Survey, 1-18.

URL:

https://www.maanmittauslaitos.fi/sites/maanmittauslaitos.fi/files/old/Finnish_Coordinate_Systems.pdf

114. Pail, R., Goiginger, H., Schuh, W.-D., Höck, E., Brockmann, J. M., Fecher, T., Gruber, T., Mayer-Gürr, T., Kusche, J., Jäggi, A., Rieser, D. (2010). Combined satellite gravity field model GOCO01S derived from GOCE and GRACE. *Geophysical Research Letters*, 37 (20). DOI: [10.1029/2010GL044906](https://doi.org/10.1029/2010GL044906)

115. Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical*, 117 (B4). DOI: [10.1029/2011jb008916](https://doi.org/10.1029/2011jb008916)

116. Penna, N., Dodson, A., Chen, W. (2001). Assessment of EGNOS tropospheric correction model. *The Journal of Navigation*, 54 (1), 37-55. DOI:[10.1017/S0373463300001107](https://doi.org/10.1017/S0373463300001107)

117. Petit G., Luzum B. (2010). IERS Conventions – 2010. IERS Technical Note, 36, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, 179. URL: <https://iers-conventions.obspm.fr/content/tn36.pdf>

118. Pini, M., Falco, G., Presti, L. L. (2012). Estimation of satellite-user ranges through GNSS code phase measurements. *Global Navigation Satellite Systems: Signal, Theory and Applications*, Chapter 5, 107-126. DOI: [10.5772/28492](https://doi.org/10.5772/28492)

119. Poutanen, M., Vermeer, M., Mäkinen, J. (1996). The permanent tide in GPS positioning. *Journal of Geodesy*, 70 (8), 499-504. DOI: [10.1007/BF00863622](https://doi.org/10.1007/BF00863622)

120. Qinsky. (2022). Geoid Model Glossary. [online] Available at: <https://confluence.qps.nl/qinsky/8.0/en/geoid-model-glossary-10748619.html> [Accessed 21.08.2020]

121. Qinsky. (2022). Permanent Tide Systems [online] Available at: <https://confluence.qps.nl/qinsky/latest/permanent-tide-systems-238783779.html> [Accessed 25.11.2022]

122. Raizner, C. (2008). A regional analysis of GNSS-levelling (Master's thesis). URL: <https://elib.uni-stuttgart.de/bitstream/11682/3782/1/raizner.pdf>

123. Rapp, R. H. (1968). Gravitational potential of the Earth determined from a combination of satellite, observed, and model anomalies. *Journal of Geophysical Research*, 73 (20), 6555-6562. DOI: [10.1029/JB073i020p06555](https://doi.org/10.1029/JB073i020p06555)

124. Rapp, R.H. (1998). Past and Future Developments in Geopotential Modeling. In: Forsberg, R., Feissel, M., Dietrich, R. (eds) *Geodesy on the Move*. Springer, Berlin, Heidelberg, International Association of Geodesy Symposia, 119. DOI: [10.1007/978-3-642-72245-5_9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-72245-5_9)
125. Raufu, I. O., Tata, H. (2022). Comparison of Two Corrector Surface Models of Orthometric Heights from GPS/Levelling Observations and Global Gravity Model. *JGISE: Journal of Geospatial Information Science and Engineering*, 5 (1), 15-20. DOI: [10.22146/jgise.72531](https://doi.org/10.22146/jgise.72531)
126. Reguzzoni, M., Carrion, D., De Gaetani, C. I., Albertella, A., Rossi, L., Sona, G., Batsukh, K., Toro Herrera, J. F., Elger, K., Barzaghi, R., Sansó, F. (2021). Open access to regional geoid models: the International Service for the Geoid. *Earth System Science Data*, 13, 1653–1666. DOI: [10.5194/essd-13-1653-2021](https://doi.org/10.5194/essd-13-1653-2021)
127. Reķe, I., Celms, A., Reiniks, M. (2017). National height system testing using GNSS measurements in Latvia and Lithuania. *Research for Rural Development*, 2017. DOI: [10.22616/rrd.23.2017.029](https://doi.org/10.22616/rrd.23.2017.029)
128. Reķe, I., Celms, A., Rusiņš, J. (2016). Latvian normal height system testing using GNSS measurements. *Research For Rural Development*, 1. URL: https://www2.llu.lv/research_conf/proceedings2016_vol_1/docs/LatviaResRuralDev_22nd_vol1-164-169.pdf
129. Rockville, M. D. (1986). *Geodetic glossary*. Penerbit National Geodetic Survey, 274. URL: <https://repository.library.noaa.gov/view/noaa/2827>
130. Saari, T., Poutanen, M., Saaranen, V., Kaartinen, H., Kukko, A., Lahtinen, S. (2015). Height determination techniques for the next national height system of Finland-a case study. *Geodesy and Cartography*, 41 (4), 145-155. DOI: [10.3846/20296991.2015.1120387](https://doi.org/10.3846/20296991.2015.1120387)
131. Sacher, M. (2019). The European Vertical Reference System (EVRS) – development and latest results. In *Geophysical Research Abstracts*, 21, 15. URL: https://presentations.copernicus.org/EGU2019/EGU2019-1811_presentation.pdf
132. Sacher, M., Liebsch, G., Ihde, J., Mäkinen, J. (2009). EVRF2007 as realization of the European Vertical Reference System. In *AGU Spring Meeting Abstracts*, 2009, CG71A-06. URL:

https://evrs.bkg.bund.de/SharedDocs/Downloads/EVRS/EN/Publications/EVRF2007AsRealOfEVRS.pdf?__blob=publicationFile&v=1

133. Samama, N. (2012). Indoor positioning with GNSS like local signal transmitters. *Global Navigation Satellite Systems: Signal, Theory and Applications*, 299-338. DOI: [10.5772/30567](https://doi.org/10.5772/30567)

134. Sánchez, L., Sideris, M. G. (2017). Vertical datum unification for the international height reference system (IHRM). *Geophysical Journal International*, 209 (2), 570-586. DOI: [10.1093/gji/ggx025](https://doi.org/10.1093/gji/ggx025)

135. Seeber G. (2003). *Satellite Geodesy: 2nd completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter, New York, 592.

136. Sideris, M. (2015). Geodetic world height system unification. In: Freeden, W., Nashed, M., Sonar, T. (eds) *Handbook of Geomathematics*, Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: [10.1007/978-3-642-27793-1_83-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-27793-1_83-1)

137. Sjöberg, L. E. (2003). A general model for modifying Stokes' formula and its least-squares solution. *Journal of Geodesy*, 77 (7), 459-464. DOI: [10.1007/s00190-003-0346-1](https://doi.org/10.1007/s00190-003-0346-1)

138. Sjöberg, L. E. (2013). The geoid or quasigeoid—which reference surface should be preferred for a national height system? *Journal of Geodetic Science*, 3 (2), 103-109. DOI: [10.2478/jogs-2013-0013](https://doi.org/10.2478/jogs-2013-0013)

139. Sjöberg, L. E. (2014). On the topographic effects by Stokes' formula. *Journal of Geodetic Science*, 4 (1), 130-135. DOI: [10.2478/jogs-2014-0014](https://doi.org/10.2478/jogs-2014-0014)

140. Sjöberg, L. E. (2018). Topographic effects in geoid determinations. *Geosciences*, 8 (4), 143. DOI: [10.3390/geosciences8040143](https://doi.org/10.3390/geosciences8040143)

141. Smith D. (1997). Permanent Tide Systems [online] Available at: <https://www.ngs.noaa.gov/GEOID/tidepot.html> [Accessed 25.11.2022]

142. Soycan, M. (2014). Improving EGM2008 by GPS and leveling data at local scale. *Boletim de Ciências Geodésicas*, 20 (1), 3-18. DOI: [10.1590/s1982-21702014000100001](https://doi.org/10.1590/s1982-21702014000100001)

143. Stepniak, K., Baryla, R., Wielgosz, P., Kurpinski, G. (2013). Optimal data processing strategy in precise GPS leveling networks. *Acta Geodynamica et Geomaterialia*, 10, 443-452. DOI: [10.13168/agg.2013.0044](https://doi.org/10.13168/agg.2013.0044)

144. Stokes, G. G. (1849). On the variation of gravity on the surface of the Earth. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 8, 672-695. URL: <https://play.google.com/books/reader?id=yWQSAAAIAAJ&pg=GBS.PA130>
145. Surfer, Golden Software, LLC. (2021). User's Guide. URL: <https://downloads.goldensoftware.com/guides/Surfer20UserGuide.pdf>
146. TERSUS Geomatics Office. (2018). Post Processing Software. 2018-06-14, Version: 1.0. URL: <https://www.tersus-gnss.com/software/software>
147. Tersus GNSS Inc. (2017). User Manual Tersus Geomatics Office. Version V1.0-20171024, 123. URL: <https://www.tersus-gnss.com/assets/upload/file/20181128161423355.pdf>
148. Teunissen, P. J., Montenbruck, O. (2017). Signals and Modulation. Springer handbook of global navigation satellite systems, Springer International Publishing, New York, 10, 1272 (978-3). DOI: [10.1007/978-3-319-42928-1_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1_4)
149. Teunissen, P.J., Montenbruck, O. (2017). Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems. Springer International Publishing, New York, 1327. DOI: [10.1007/978-3-319-42928-1](https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1)
150. Tsui, J. B. Y. (2000). Fundamentals of global positioning system receivers: A software approach. New York: John Wiley and Sons, 238.
151. Tziavos, I. N., Vergos, G. S., Grigoriadis, V. N., Andritsanos, V. D. (2012). Adjustment of collocated GPS, geoid and orthometric height observations in Greece. Geoid or orthometric height improvement? Geodesy for Planet Earth, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 481-488. DOI: [10.1007/978-3-642-20338-1_58](https://doi.org/10.1007/978-3-642-20338-1_58)
152. US Army Corps of Engineer. (2003). Engineering and design – NAVSTAR global positioning system surveying. Number EM 1110-1-1003. URL: <http://www.creaf.uab.es/master/intranet/MaterialsProfessors/GeodesiaSistPosicionament/GPS-ebook-%20en%20usace.army.mil/entire.pdf>
153. Vanicek P., Krakiwsky E. J.(1986). Geodesy: The Concepts (2nd Edition). Elsevier Science Pub. Co, 714.
154. Vaníček, P., Kingdon, R., Santos, M. (2012). Geoid versus quasigeoid: a case of physics versus geometry. Contributions to Geophysics and Geodesy, 42 (1), 101-118. DOI: [10.2478/v10126-012-0004-9](https://doi.org/10.2478/v10126-012-0004-9)

155. Vening Meinesz F. A. (1928). A formula expressing the deflection of the plumb-line in the gravity anomalies and some formulae for the gravity-field and the gravity-potential outside the geoid. Koninklijke akademie van wetenschappen te Amsterdam, 3, 315-331.
156. Villiger, A., Dach, R. (2018). International GNSS Service Technical Report 2017 (IGS Annual Report). IGS Central Bureau and University of Bern, Bern Open Publishing. URL: https://files.igs.org/pub/resource/pubs/2017_techreport.pdf
157. Weaver, B., Gillins, D. T., Dennis, M. (2018). Hybrid survey networks: Combining real-time and static GNSS observations for optimizing height modernization. *Journal of Surveying Engineering*, 144 (1), 05017006. DOI: [10.1061/\(asce\)su.1943-5428.0000244](https://doi.org/10.1061/(asce)su.1943-5428.0000244)
158. Weiss, J.P., Steigenberger, P., Springer, T. (2017). Orbit and Clock Product Generation. In: Teunissen, P.J., Montenbruck, O. (eds) *Springer Handbook of Global Navigation Satellite Systems*, Springer Handbooks, 983–1010. DOI: [10.1007/978-3-319-42928-1_34](https://doi.org/10.1007/978-3-319-42928-1_34)
159. WGM2012. (2022). Maps visualization/extraction: Anomaly map. [online] Available at: <http://bgi.obs-mip.fr/data-products/outils/wgm2012-maps-visualizationextraction/> [Accessed 01/2022]
160. Wu, Q., Kang, J., Li, S., Zhen, J., Li, H. (2015). GNSS positioning by CORS and EGM2008 in Jilin province, China. *Sensors*, 15 (12), 30419-30428. DOI: [10.3390/s151229806](https://doi.org/10.3390/s151229806)
161. Wu, Y., Luo, Z., Mei, X., Lu, J. (2017). Normal Height Connection across Seas by the Geopotential-Difference Method: Case Study in Qiongzhou Strait, China. *Journal of Surveying Engineering*, 143 (2), 05016011. DOI: [10.1061/\(ASCE\)SU.1943-5428.0000203](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SU.1943-5428.0000203)
162. Xi, R. (2003). Establishment of a high accuracy geoid correction model and geodata edge match. ProQuest Dissertations And Theses, (Thesis Ph.D.), Iowa State University, 279. DOI: [10.31274/rtd-180813-12584](https://doi.org/10.31274/rtd-180813-12584)
163. Yahya, M. H., Kamarudin, M. N. (2008). Analysis of GPS visibility and satellite-receiver geometry over different latitudinal regions. In *Proceedings of*

the International Symposium on Geoinformation (ISG 2008), Kuala Lumpur, Malaysia, 1-8. URL: <https://core.ac.uk/download/pdf/11783684.pdf>

164. Yao, Y. B., He, C. Y., Zhang, B., Xu, C. Q. (2013). A new global zenith tropospheric delay model GZTD. Chinese Journal of Geophysics, 56 (7), 2218-2227. DOI:[10.1007/s11434-012-5010-9](https://doi.org/10.1007/s11434-012-5010-9)

165. Zaletnyik, P., Völgyesi, L., Kirchner, I. Paláncz, B. (2007). Combination of GPS/leveling and the gravimetric geoid by using the thin plate spline interpolation technique via finite element method. Journal of Applied Geodesy, 1 (4), 233-239. DOI: [10.1515/jag.2007.025](https://doi.org/10.1515/jag.2007.025)

166. Zeman, A. (2002). Central European vertical and kinematic systems. In: Drewes, H., Dodson, A.H., Fortes, L.P.S., Sánchez, L., Sandoval, P. (eds) Vertical Reference Systems. International Association of Geodesy Symposia. Springer, Berlin, Heidelberg, 124, 72-74. DOI: [10.1007/978-3-662-04683-8_15](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04683-8_15)

167. Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., Oikonomidou, X. (2020). The combined global gravity field model XGM2019e. Journal of Geodesy, 94 (7), 1-12. DOI: [10.1007/s00190-020-01398-0](https://doi.org/10.1007/s00190-020-01398-0)

168. Zumberge, J. F., Heflin, M. B., Jefferson, D. C., Watkins, M. M., Webb, F. H. (1997). Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks. Journal of Geophysical Research, 102 (B3), 5005-5017. DOI: [10.1029/96JB03860](https://doi.org/10.1029/96JB03860)

169. Безродний Д. А. (2017). Гравіметрія. В 3-х книгах. КНИГА 1 - теоретичні основи гравіметрії. Київ, 188.

170. Бухальська, Т. В., Бухальський, В. О. (2011). Порівняльний аналіз опрацювання GNSS-спостережень різними програмними пакетами. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування, 2 (54), 221-228. URL: <http://ep3.nuwm.edu.ua/8735/1/Vt5430.pdf.zax.pdf>

171. Верховна Рада України. (1998). Про затвердження Інструкції з топографічного знімання у масштабах 1:5000, 1:2000, 1:1000 та 1:500 (ГКНТА-2.04-02-98). Укргеодезкартографія, Наказ, Інструкція від 09.04.1998, № 56. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0393-98#Text>

172. Верховна Рада України. (2016). Про затвердження Порядку використання Державної геодезичної референцної системи координат УСК-2000 при здійсненні робіт із землеустрою. Мінагрополітики України, Наказ, Порядок від 02.12.2016, № 509. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z1646-16#Text>
173. Грушинский, Н. П. (1976). Теория фигуры земли. Наука, 512.
174. Двудіт П. Д. (1998). Гравіметрія. ЛАГТ, Львів, 196.
175. Двудіт, П. Д. (2008). Фізична геодезія. ВПЦ «Експрес», Київ, 256.
176. Двудіт, П. Д. (2009). Гравіметрична мережа України: сучасний стан і перспективи розвитку. Геодинаміка, 8 (1), 44-46. DOI: [10.23939/jgd2009.01.044](https://doi.org/10.23939/jgd2009.01.044)
177. Двудіт, П. Д., Голубінка, Ю. І. (2009). Порівняльна характеристика визначення висот квазігеоїда теорії України з використанням моделей геоїда/квазігеоїда та гравітаційного поля Землі. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 72, 27-35. URL: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2017/may/1621/gka72200904.pdf>
178. Держгеокадастр. (2019). Пояснювальна записка до проекту постанови Кабінету Міністрів України “Деякі питання застосування системи висот UELN/EVRS2000 (Об’єднаної європейської нівелірної мережі/Європейської вертикальної референцної системи 2000 року). URL: <http://www.drs.gov.ua/wp-content/uploads/2019/12/12124.pdf>
179. Держгеокадастр. (2020). Проект постанови Кабінету Міністрів України “Про внесення змін до Порядку побудови Державної геодезичної мережі”. URL: <http://www.drs.gov.ua/wp-content/uploads/2020/05/705.pdf>
180. Еремеев, В. Ф., Юркина, М. И. (1972). Теория высот в гравитационном поле Земли. Недра, 145.
181. Заблоцький Ф. Д. (2013). ГНСС-метеорологія. Навчальний посібник, Львів: Видавництво Львівської політехніки, 96.
182. Заблоцький Ф., Джуман Б. (2021). Побудова геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, II (42), 49-56. DOI: [www.doi.org/10.33841/1819-1339-2-42-49-56](https://doi.org/10.33841/1819-1339-2-42-49-56)

183. Заблоцький Ф.Д., Джуман Б. Б., Брусак І. В. (2021). Про точність моделей (квазі)геоїда відносно системи висот UELN/EVRS2000. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, I (41), 29-36. DOI: www.doi.org/10.33841/1819-1339-1-41-29-36
184. Заєць, І. М., Кучер, О. В., Марченко, Д. О. (2010). Щодо проблеми приєднання нівелірної мережі України до Об'єднаної Європейської нівелірної мережі. Вісник геодезії та картографії, 5, 8-13. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2010_5_4
185. Звягіна, М., Тревого, І., Костецька, Я. (2016). Оптимізація геодезичних робіт для визначення рівнів води в різних системах висот. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 84 (84), 5-16. DOI: [10.23939/istcgcap2016.02.005](http://dx.doi.org/10.23939/istcgcap2016.02.005)
186. Инструкция по нивелированию I, II, III, IV классов. (1990). М.: Недра, 175.
187. Кабінет міністрів України. (1998). Про затвердження основних положень створення Державної геодезичної мережі України. Постанова, Порядок від 8.06.1998, №844. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/844-98-%D0%BF#Text>
188. Калинич, І. В. (2005). Про визначення нормальних висот на регіон Закарпаття. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, 70-75.
189. Калинич, І. В., Савчук, С. Г., Проданець, І. І. (2018). 10-річна діяльність першої в Україні мережі активних референцних станцій ZAKPOS. Матеріали ІХ-ї міжнародної науково-практичної конференції “Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні, лісовпорядкуванні та природокористуванні”, 2018, 5-13.
190. Кордуба, Ю., Колгунов, В. (2020). Аналіз зміни висот нівелірної мережі за 1897-2018 рр. в місті Львові. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, II (40), 23-33. DOI: www.doi.org/10.33841/1819-1339-2020-2-40-23-33
191. Кучер, О. В., Марченко, О. М., Марченко, Д. О., Заєць, І. М. (2012). Про використання глобальних моделей EGM08 та EGG08 для

визначення висот квазігеоїда на територію України. Вісник геодезії та картографії, 4, 13-17. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2012_4_8

192. Кучер, О. В., Староверов, В. С., Кравченко, З. М. (2010). Попередній аналіз результатів високоточного нівелювання методами математичної статистики. Вісник геодезії та картографії, 1, 8-14. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2010_1_10

193. Ланьо, О. В., Савчук, С. Г. (2012). Дослідження точності RTK-вимірювань у мережі референцних станцій. Вісник геодезії та картографії, 4, 8-13. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2012_4_7

194. Лук'яненко Ю. О. (2016). Застосування супутникових та наземних даних для побудови моделей гравітаційного поля Землі: дис., на здобуття наукового ступеня к.т.н. Львів, 112. URL: https://ena.lpnu.ua/bitstream/ntb/32556/4/Dys_Lukyanchenko.PDF

195. Марченко, О. М., Кучер, О. В., Марченко, Д. О. (2013). Результати уточнення квазігеоїда УКГ2012 для території України. Вісник геодезії та картографії, 3, 3-10. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2013_3_3

196. Марченко, О. М., Третяк, Н. П. (2007). Про встановлення системи висот на регіон Антарктики. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 69, 43-52. URL: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2017/may/1738/gka69200706.pdf>

197. Мельник, С. О. (2014). Узгодження висотних систем для території України. Часопис картографії, 10, 28-37. URL: http://maptimes.inf.ua/CH_10/6.pdf

198. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. (1960). Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, 251.

199. Молоденский, М. С. (1945). Основные вопросы геодезической гравиметрии. Труды ЦНИИГАиК, 42.

200. Патон, Б. Є, Вавилова, І. Б, Негода, О. О, Яцків, Я. С. (2001). Важливі віхи космічної ери. Космічна наука і технологія, 7 (1), 92. DOI: [10.15407/knit2001.01.002](https://doi.org/10.15407/knit2001.01.002)

201. Савчук, С. Г. (2005). Вища геодезія. Підручник, Житомир, 315.

202. Савчук, С. Г. (2007). Проблемні питання під час використання сучасних супутникових технологій визначення координат. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 69, 20-33. URL: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2017/may/1732/gka69200704.pdf>
203. Савчук, С. Г. (2015). Опрацювання даних ГНСС-спостережень на активних референцних станціях (2013-2014 рр.). Вісник геодезії та картографії, 4 (97), 3-10. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/vgtk_2015_4_3
204. Савчук, С. Г., Калинич, І. В. (2013). Оцінка впливу похибок ефемерид GNSS супутників при RTK вимірюваннях у мережі референцних станцій. Науковий вісник Ужгородського університету, 1, 177-182.
205. Савчук, С. Г., Калинич, І. В. (2013). Процедури трансформування координат за даними GNSS-спостережень у мережі ZAKPOS. Науковий вісник Ужгородського університету, 2, 135–138. URL: <https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/handle/lib/1874?locale=uk>
206. Савчук, С., Гринишина-Полюга, О. (2009). Методика встановлення вихідних значень координат українських перманентних станцій для високоточної геодезичної прив'язки. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, II (18), 39-43. URL: http://science.lp.edu.ua/sites/default/files/Papers/gka_72_2009_01.pdf
207. Савчук, С., Каблак Н., Калинич І., Проданець І. (2007). До питання точності GPS-спостережень. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 68, 105-108. URL: <https://science.lpnu.ua/uk/istcgcap/vsi-vypusky/vypusk-68-2007/do-pytannya-tochnosti-gps-sposterezhen>
208. Савчук, С., Проданець, І., Федорчук, А., (2022), Застосування методики визначення координат за даними GNSS-спостережень із прив'язкою до мережі активних референцних станцій. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, I (43), 48-54. DOI:[10.33841/1819-1339-1-43-48-54](https://doi.org/10.33841/1819-1339-1-43-48-54)
209. Тарапатов, М. М. (2007). Державна референцна система координат УСК-2000 та її зв'язок із іншими світовими і європейськими системами координат. Проблеми безперервної географічної освіти і картографії, 7, 174-180. URL: https://goik.univer.kharkov.ua/wp-content/files/issue_7/7_45.pdf

210. Терещук, О., Нисторяк, І. (2016). Застосування сучасних технологій оброблення та аналізу результатів GNSS-спостережень на регіональному рівні. Технічні науки та технології, 2, 130-140. URL: <http://ir.stu.cn.ua/123456789/11104>

211. Тревого, І. С., Цюпак, І. М., Волчко, П. І. (2015). До метрологічного забезпечення GNSS-нівелювання на робочих еталонах. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 82, 29-40. DOI: [10.23939/istcgcap2015.02.029](https://doi.org/10.23939/istcgcap2015.02.029)

212. Третьак, К. Р., Шушкова Т. М. (2001). До питання тривалості GPS-вимірів при побудові державних мереж 1-го та 2-го класу. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 61, 124-132. URL: <https://science.lpnu.ua/uk/istcgcap/vsi-vypusky/vypusk-61-2001/do-pytannya-tryvalosti-gps-vymiriv-pry-pobudovi-derzhavnyh>

213. Укргеодезкартографія. (2007). Створення та реконструкція Міських геодезичних мереж в УСК-2000. Інструкція, Київ, 100.

214. Федорчук, А. (2016). Про зв'язки між системами висот міста Львова. Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених «GeoTerrace-2016», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016, 91-94.

215. Федорчук, А. (2017). Про точність GNSS-нівелювання на пунктах геодезичної мережі міста Львова. Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції молодих вчених «GeoTerrace-2017», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2017, 17-20.

216. Федорчук, А. (2018). Використання даних GNSS-спостережень для визначення висот пунктів на фізичній поверхні землі. Тези доповідей «GEOFORUM'2018», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018, 31-32.

217. Федорчук, А. (2018). Попередній аналіз похибок визначення нормальних висот із GNSS-спостережень на територію міста Львова та його околиць. Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції

молодих вчених «GeoTerrace-2018», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2018, 33-36.

218. Федорчук, А. (2019). Аналіз похибки визначення модельних значень аномалій висот для території Львова та його околиць за результатами GNSS-спостережень на пунктах високоточного геометричного нівелювання. Тези доповідей «GEOFORUM'2019», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2019, 58-59.

219. Федорчук, А. (2020). Порівняльний аналіз похибок нормальних висот високоточного геометричного та GNSS-нівелювання. Збірник матеріалів 25-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Геофорум-2020», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2020, 107-108.

220. Федорчук, А. (2021). Аналіз похибок еліпсоїдних висот на основі результатів GNSS-нівелювання, Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, I (41), 37-45. DOI:[10.33841/1819-1339-1-41-37-45](https://doi.org/10.33841/1819-1339-1-41-37-45)

221. Федорчук, А. (2021). Аналіз точності глобальних моделей геоїда щодо даних геометричного та GNSS-нівелювання. Збірник матеріалів X-ї Міжнародної науково-технічної конференції «Нові технології в геодезії, землевпорядкуванні та природокористуванні», Ужгород: Видавництво, 2021, 8-13.

222. Федорчук, А. (2021). Дослідження точності визначення координат за GNSS-даними з прив'язкою до референцних станцій. Збірник матеріалів Міжнародної науково-технічної конференції «Геофорум-2021», Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2021, 107-108.

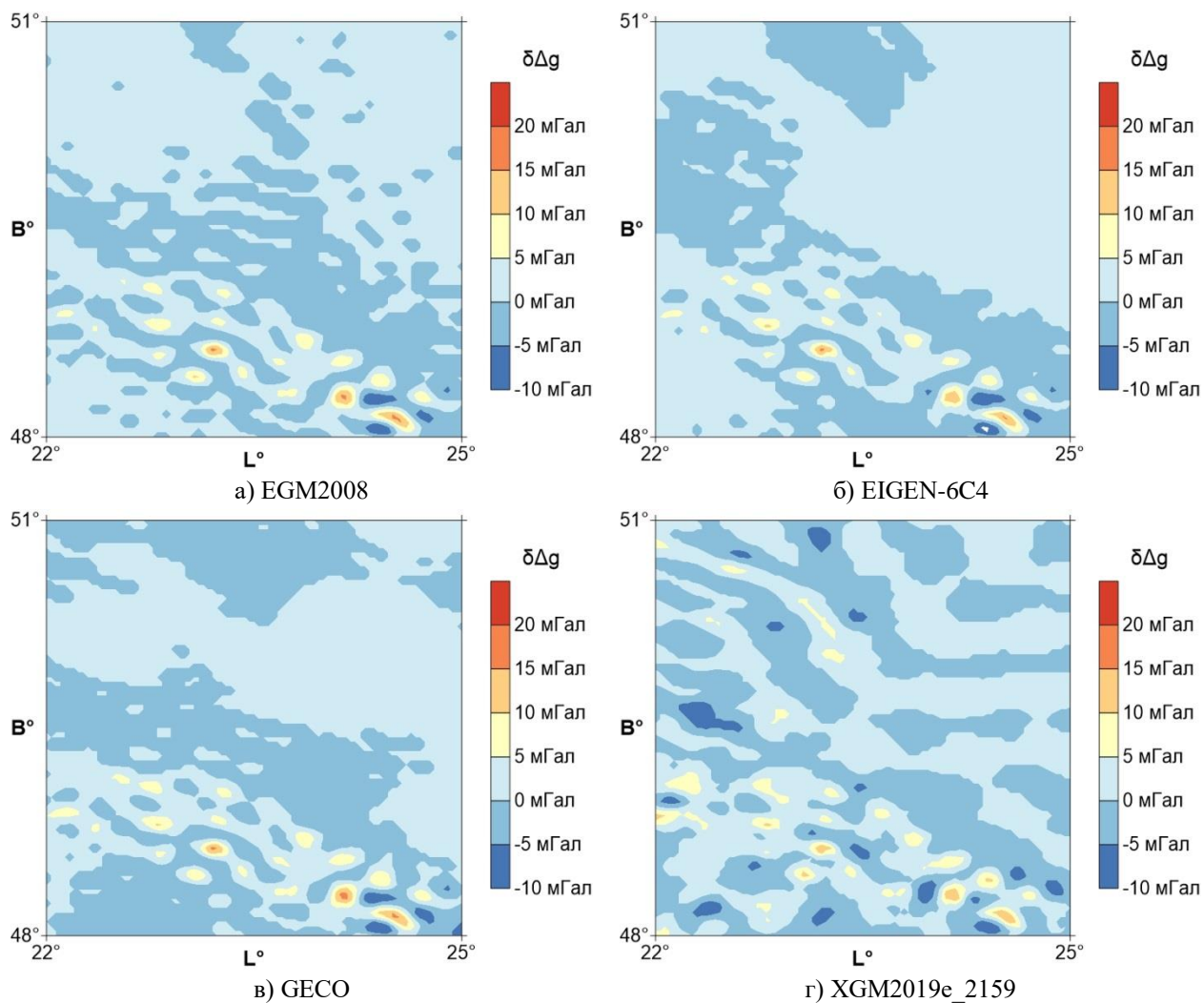
223. Федорчук, А. (2022), Аналіз сучасних моделей відлікових поверхонь для визначення висот методом GNSS-нівелювання, Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, II (44), 31-41. DOI:[10.33841/1819-1339-2-44-31-41](https://doi.org/10.33841/1819-1339-2-44-31-41)

224. Федорчук, А. (2022). Роль систем припливів глобальних моделей геоїда у визначенні висот методом GNSS-нівелювання. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 96, 5-13. DOI: [10.23939/istcgcap2022.96.005](https://doi.org/10.23939/istcgcap2022.96.005)

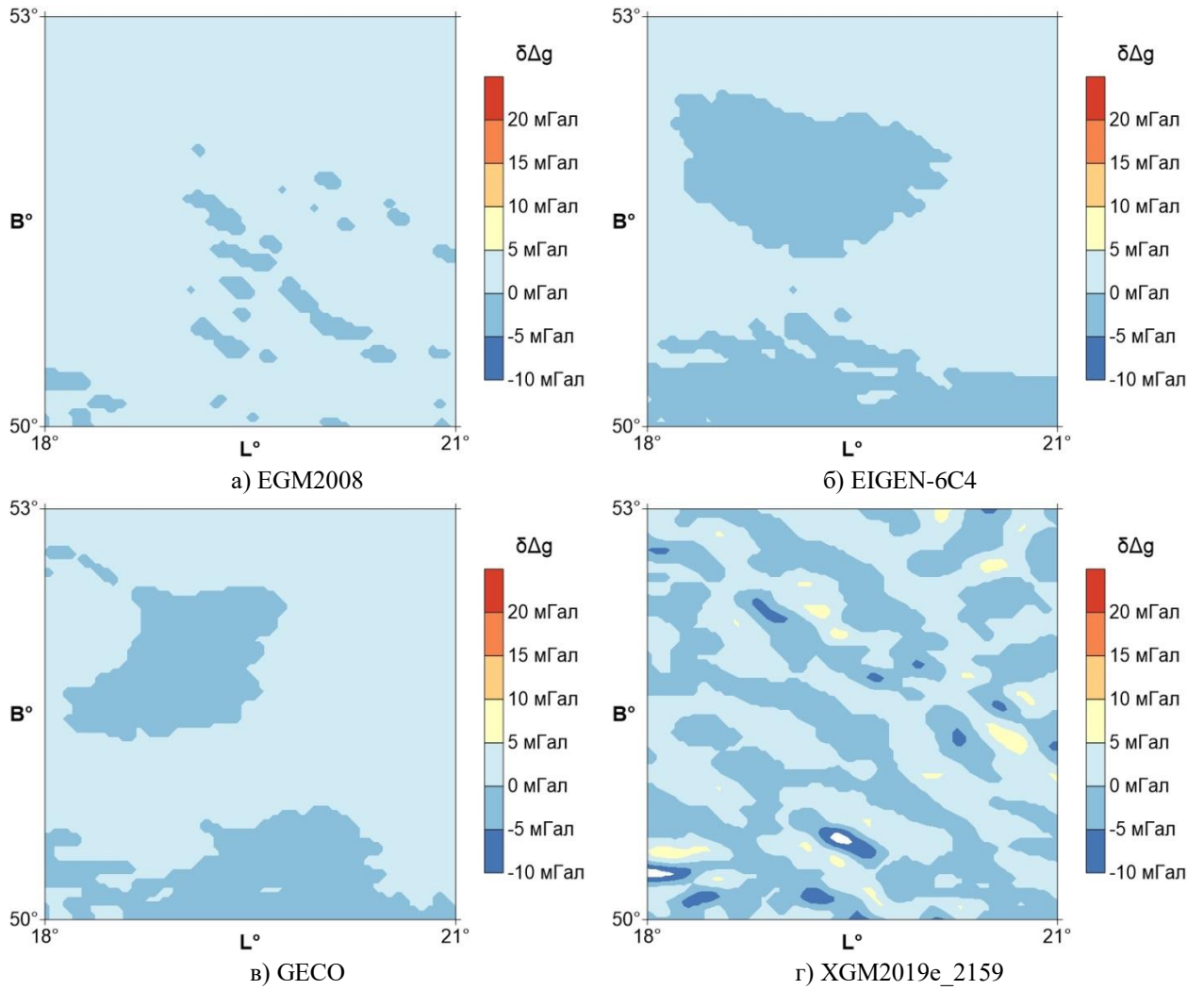
225. Янків-Вітковська, Л. М. (2014). Методика усереднення даних для побудови регіональної моделі іоносфери. Геодезія, картографія та аерофотознімання, 79, 35-41. URL: <https://science.lpnu.ua/sites/default/files/journal-paper/2017/may/1433/gka79201405.pdf>

226. Янків-Вітковська, Л. М., Джуман, Б. Б. (2018). Апроксимація параметрів іоносфери з використанням сферичних функцій. Космічна наука і технологія, 24 (6), 74-79. DOI: [10.15407/knit2018.06.074](https://doi.org/10.15407/knit2018.06.074)

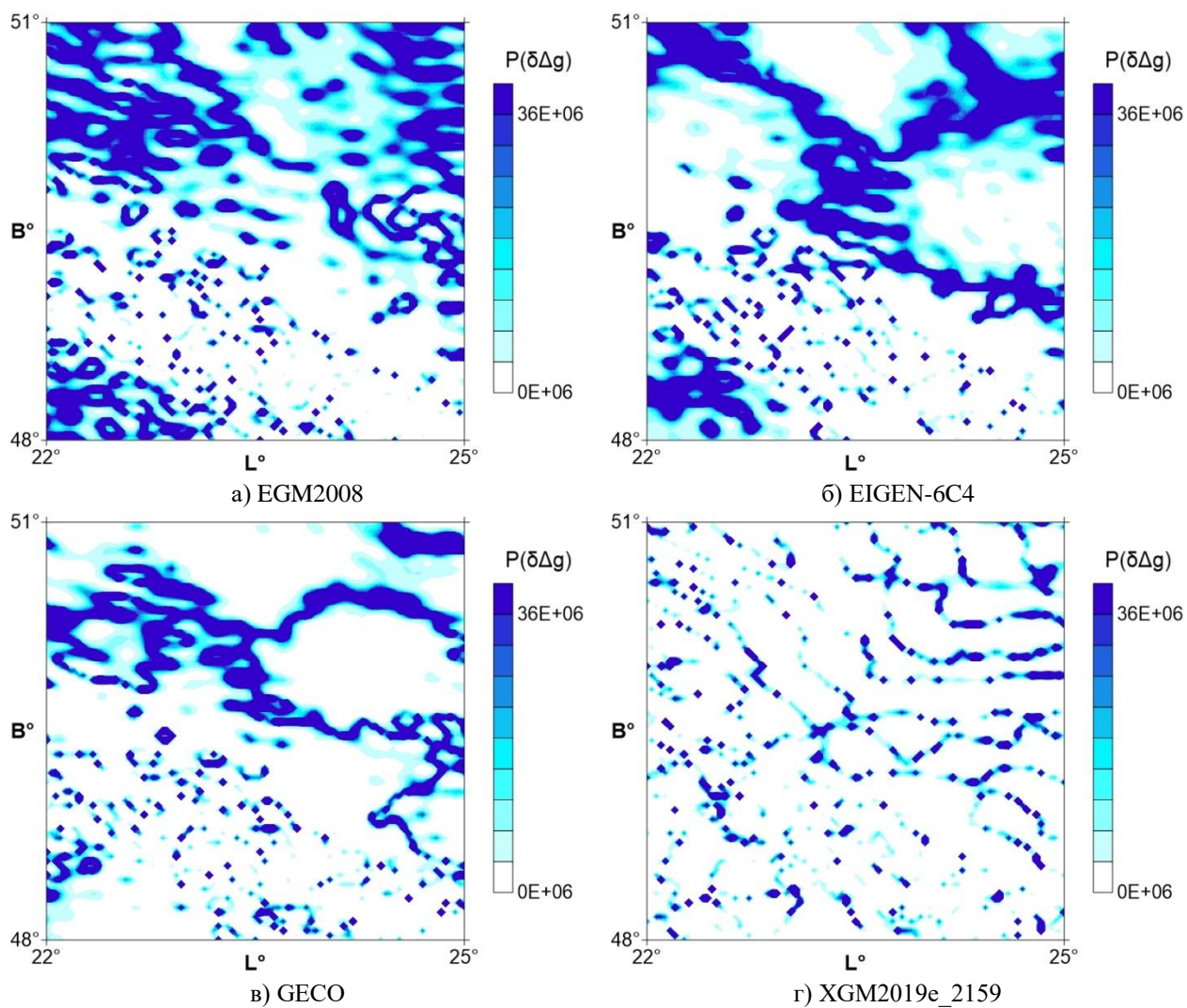
Розподіл різниць гравітаційних аномалій на території А1



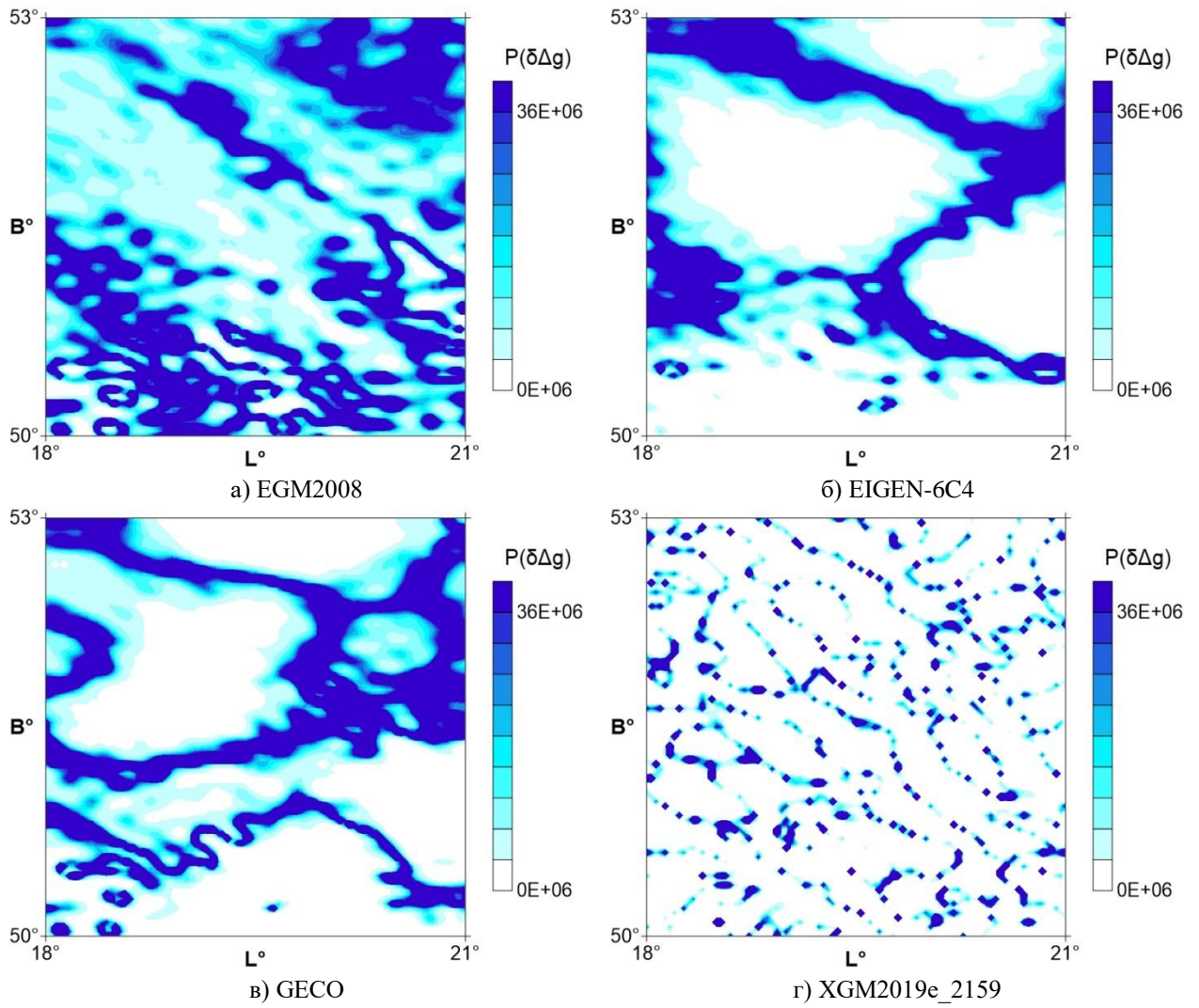
Розподіл різниць гравітаційних аномалій на території А2



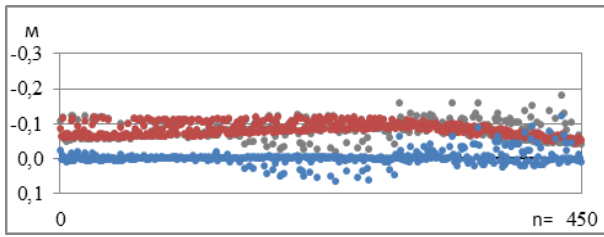
Розподіл вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій
на території А1



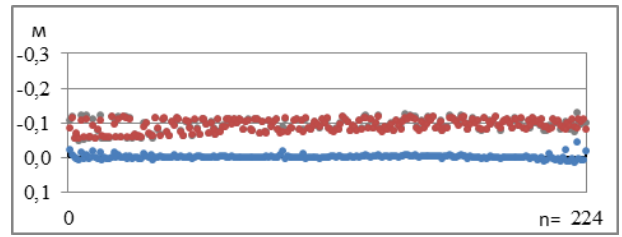
Розподіл вагових коефіцієнтів різниць гравітаційних аномалій
на території А2



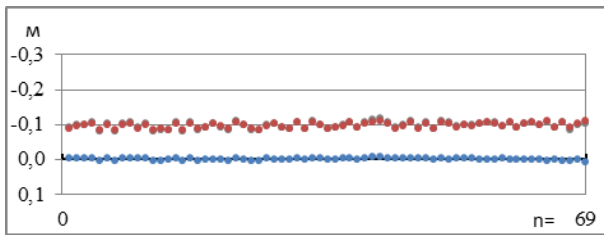
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EGM2008 в системі “mean-tide” для територій А1, А2



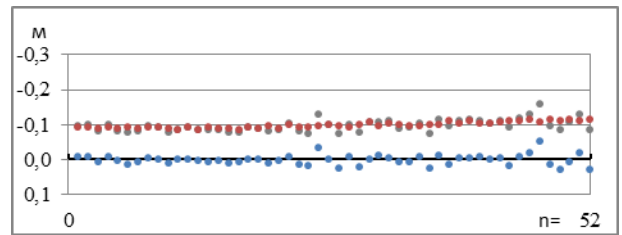
а) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



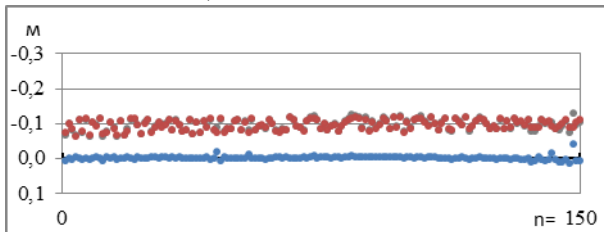
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



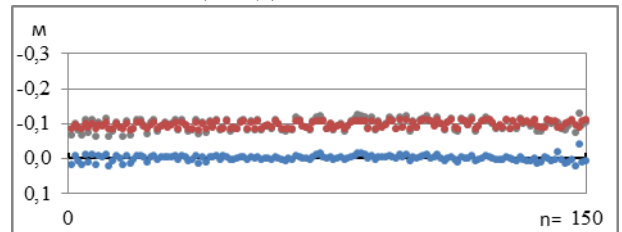
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



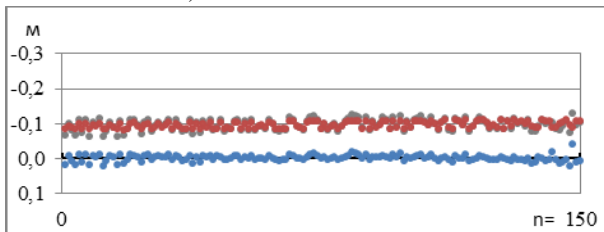
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



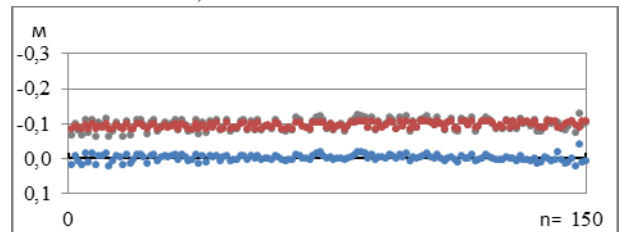
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



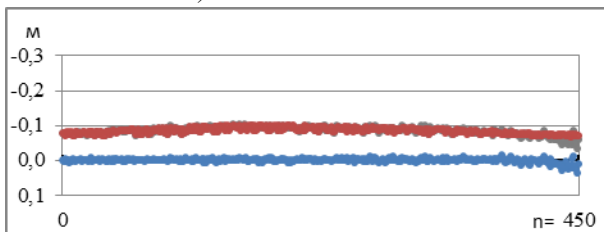
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



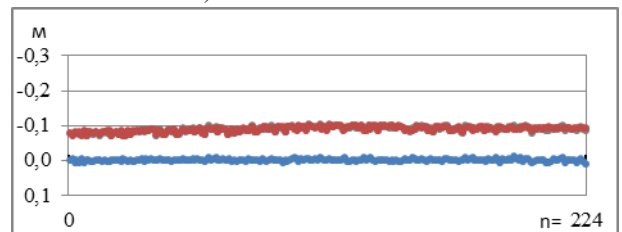
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



ж) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



з) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

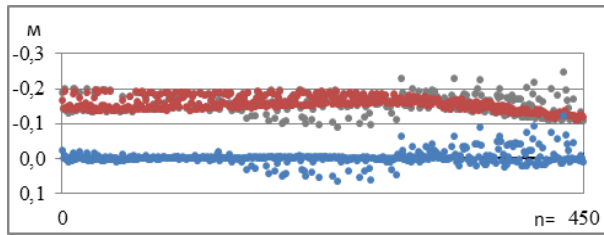


у) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

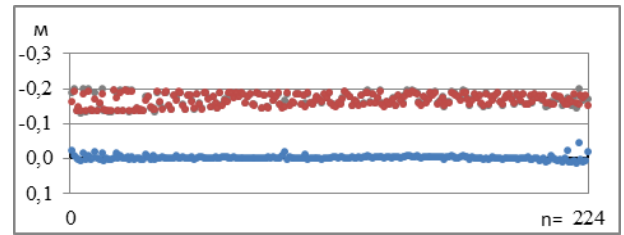
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

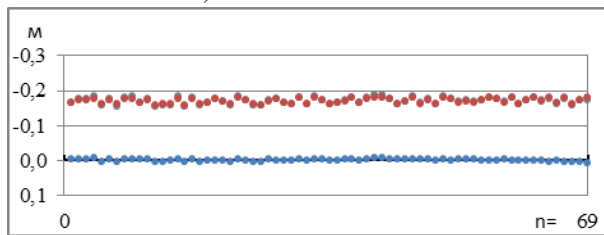
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EGM2008 в системі “zero-tide” для територій А1, А2



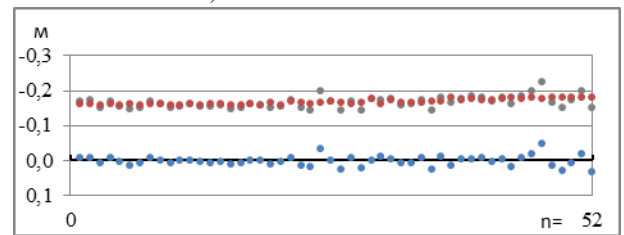
a) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



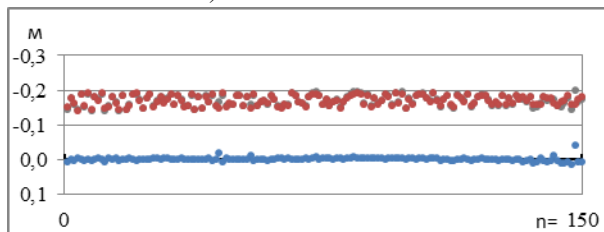
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



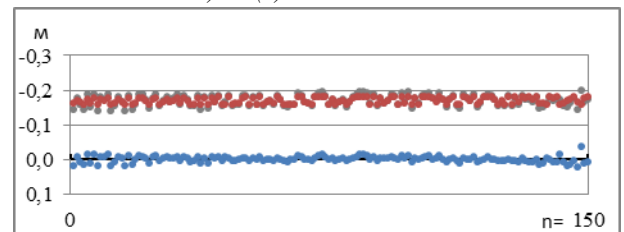
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



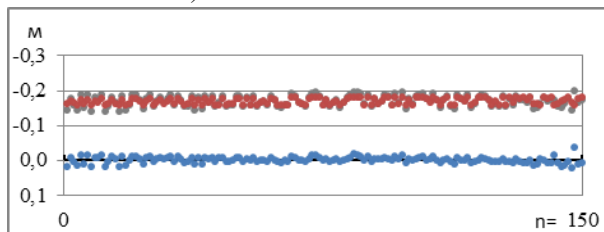
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



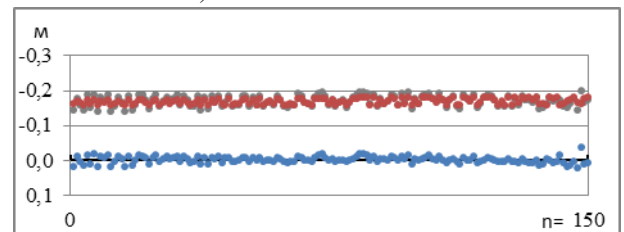
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



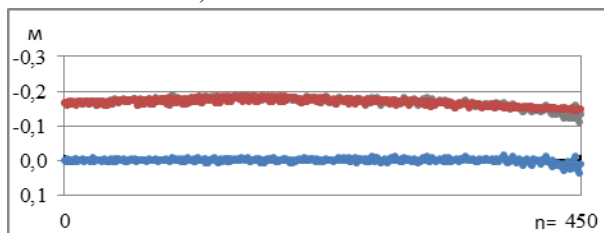
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



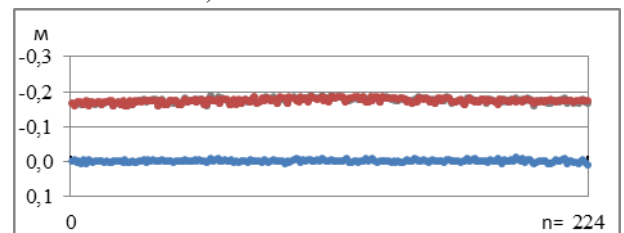
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



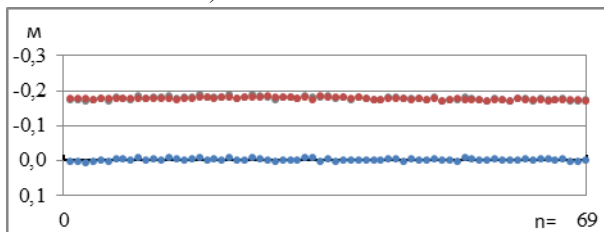
и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



й) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



к) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

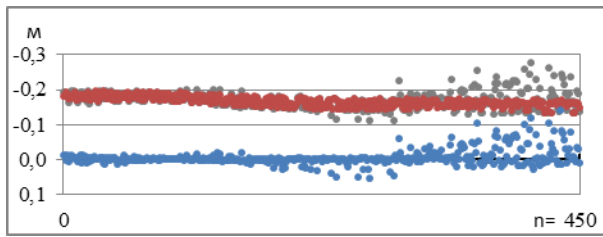


л) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

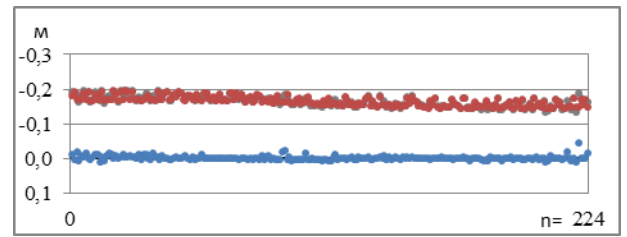
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

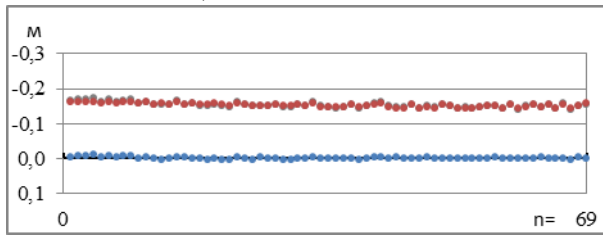
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EIGEN-6C4 в системі “tide-free” для територій A1, A2



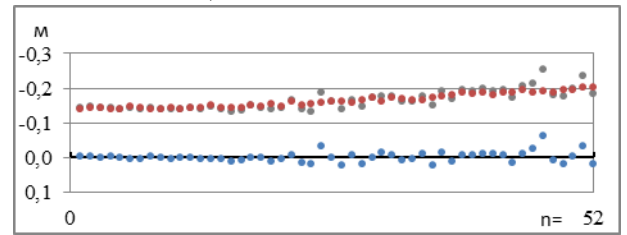
a) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



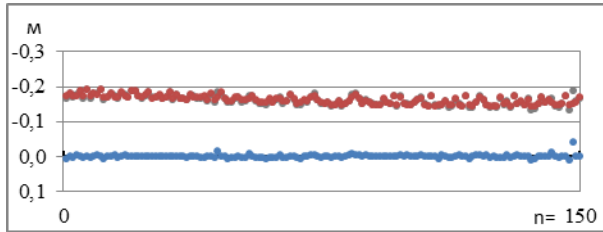
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



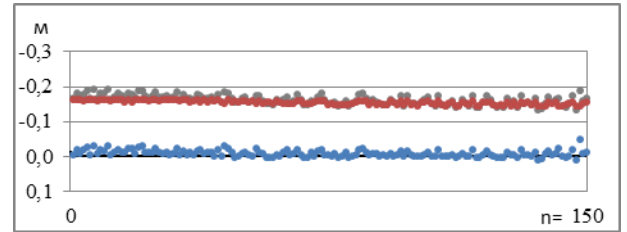
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



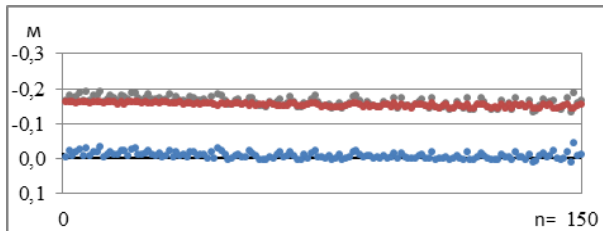
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



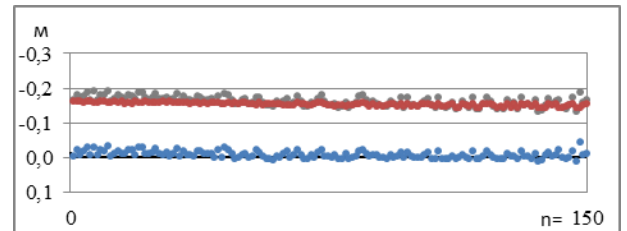
р) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



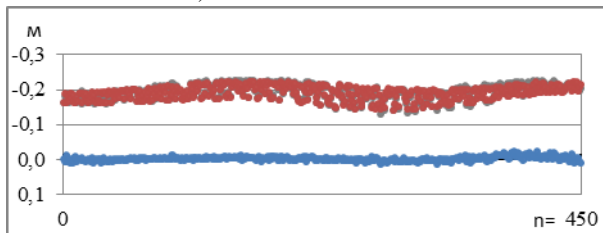
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



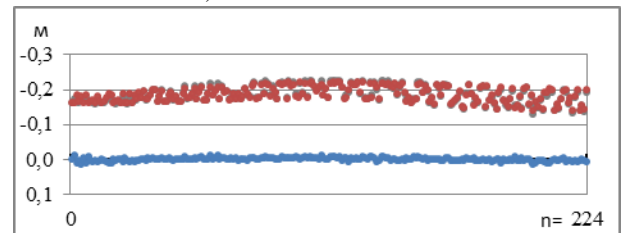
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



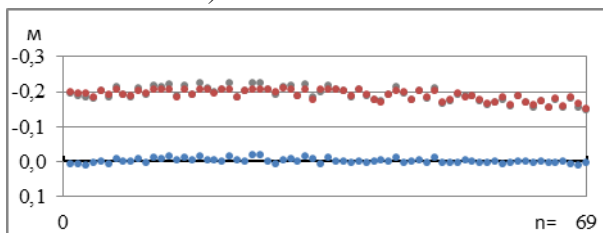
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



ж) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



з) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

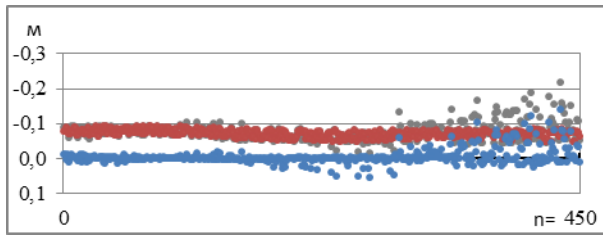


у) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

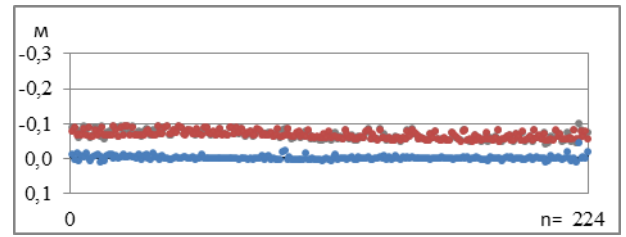
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

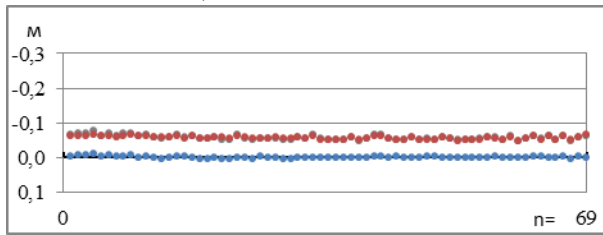
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EIGEN-6C4 в системі “mean-tide” для територій А1, А2



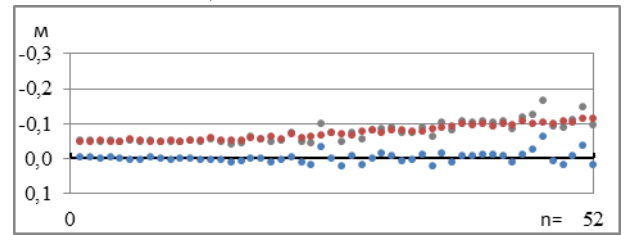
а) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



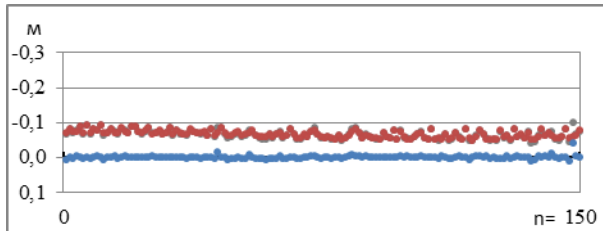
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



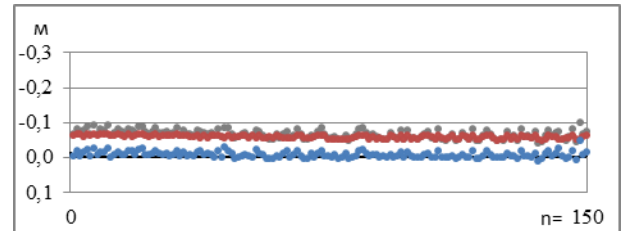
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



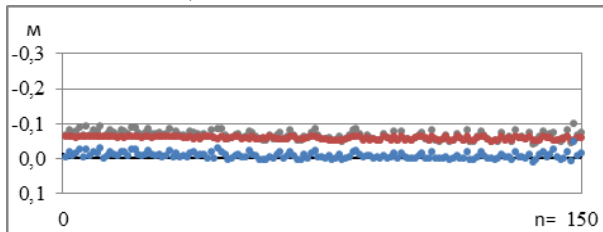
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



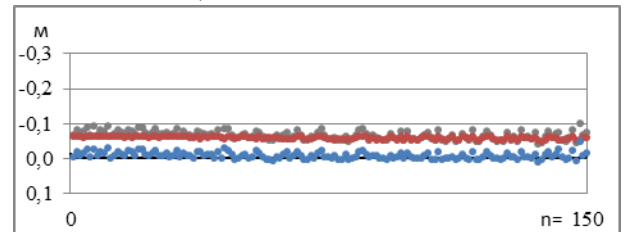
і) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



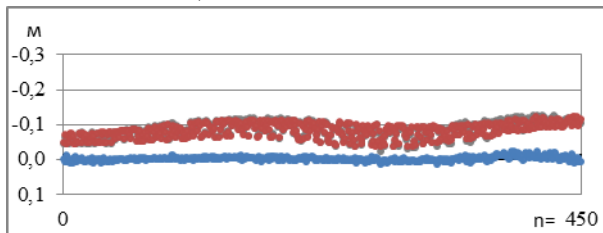
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



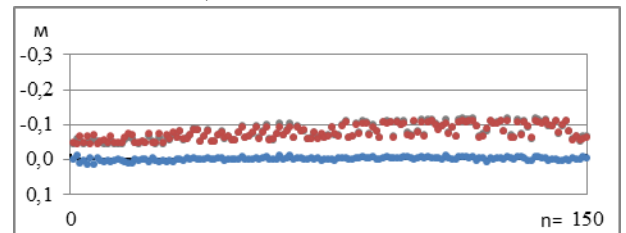
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



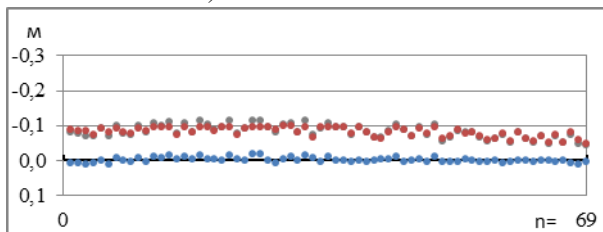
є) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



ж) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



з) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

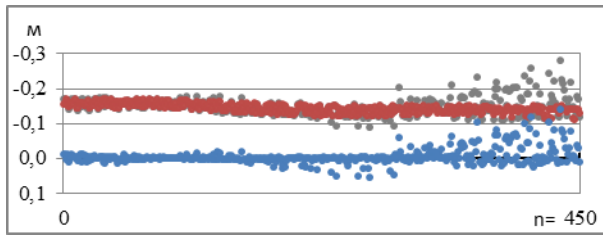


и) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

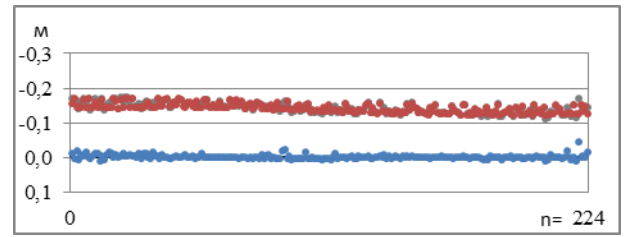
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

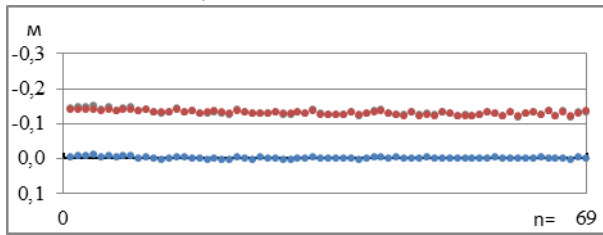
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі EIGEN-6C4 в системі “zero-tide” для територій A1, A2



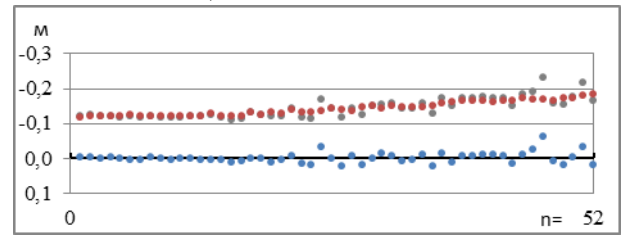
a) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



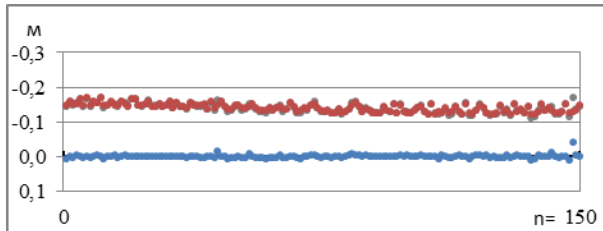
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



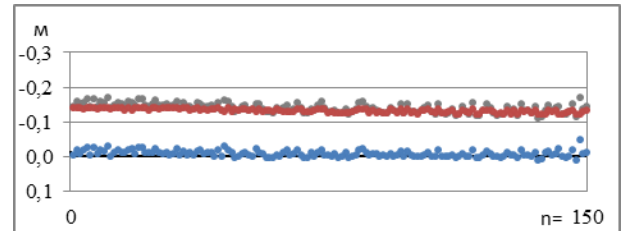
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



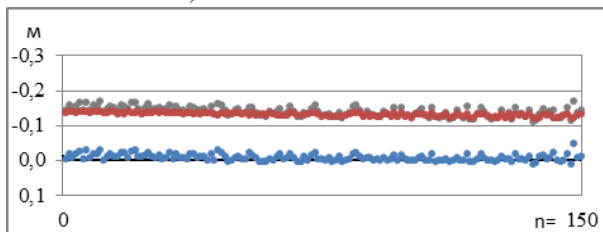
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



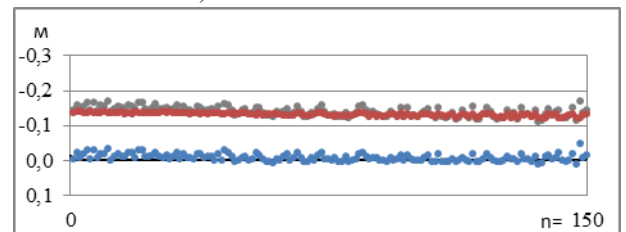
і) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



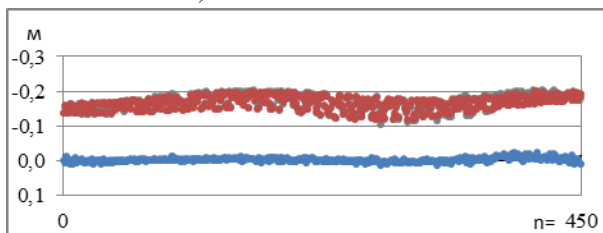
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



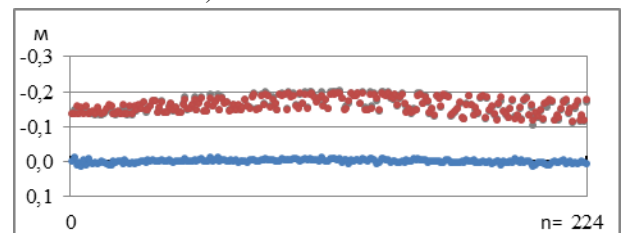
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



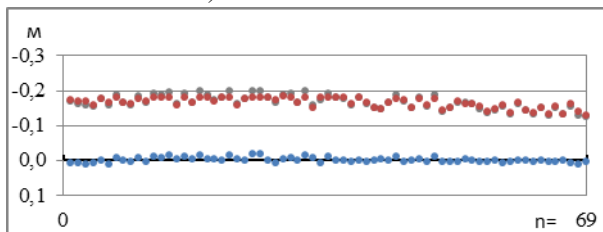
є) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



ж) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



з) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

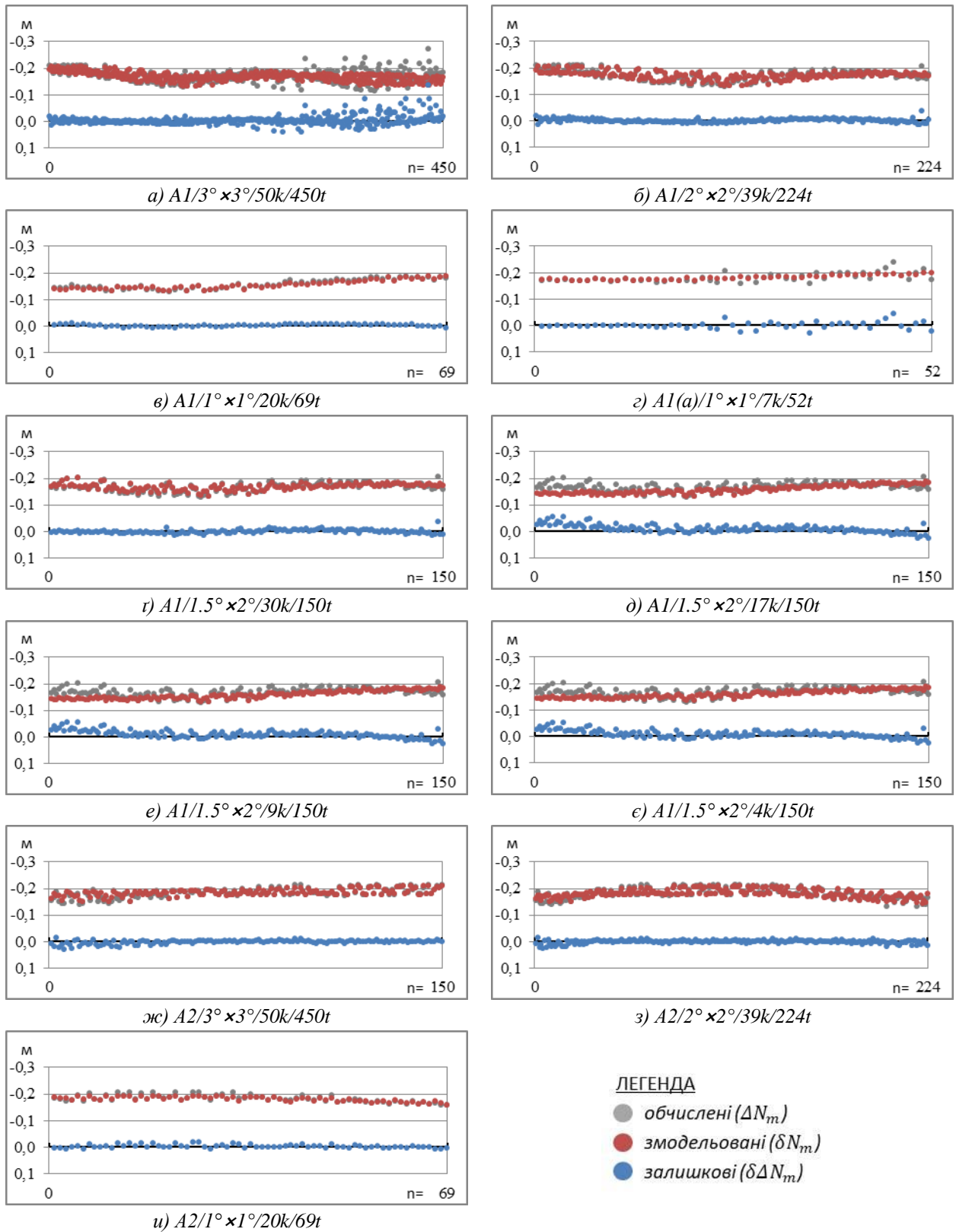


и) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

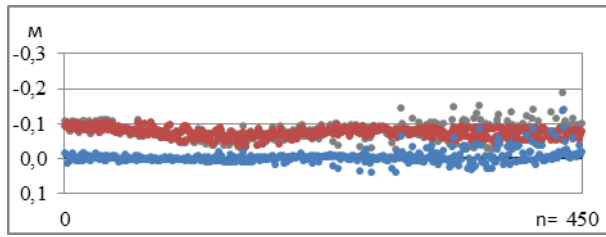
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

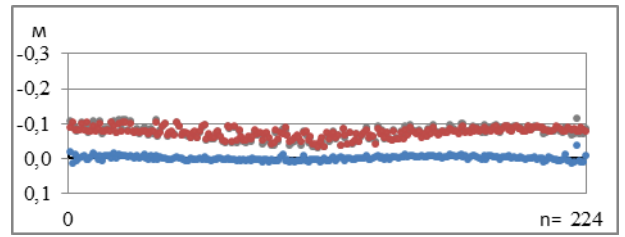
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі GECO в системі “tide-free” для територій А1, А2



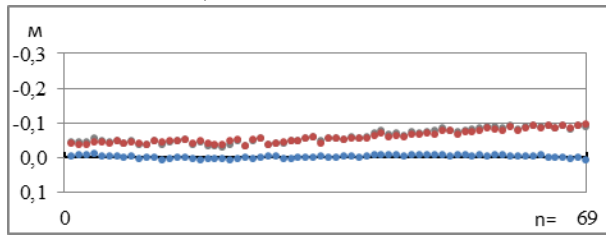
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі GECO в системі “mean-tide” для територій А1, А2



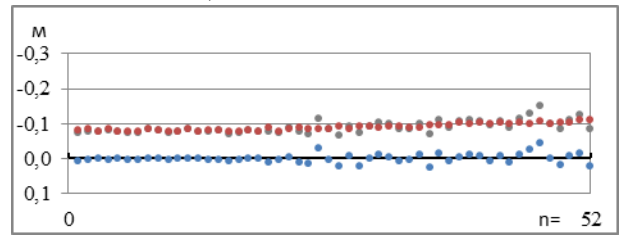
а) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



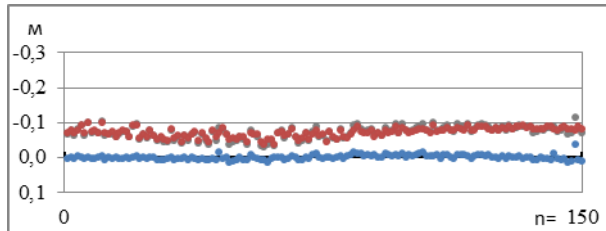
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



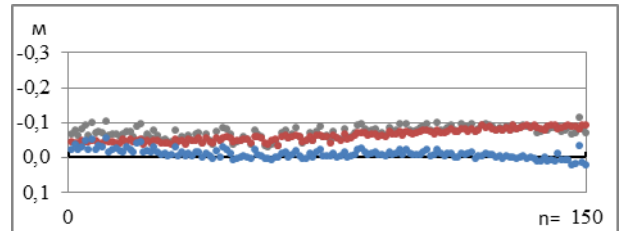
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



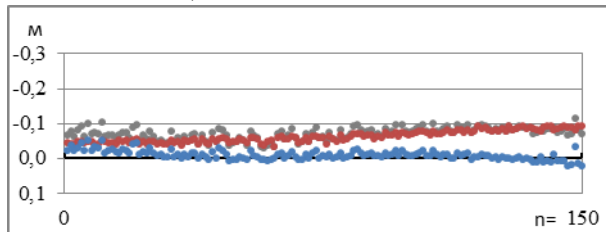
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



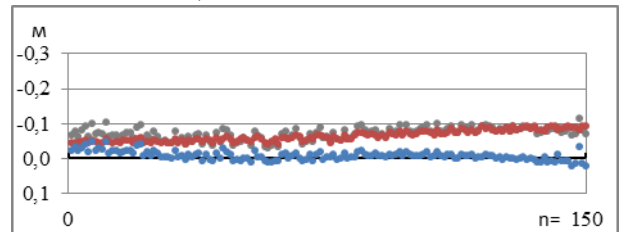
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



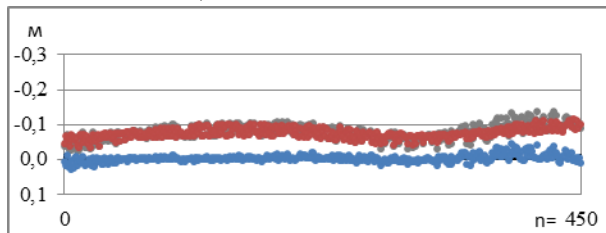
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



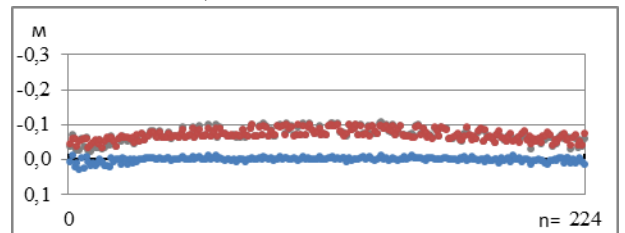
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



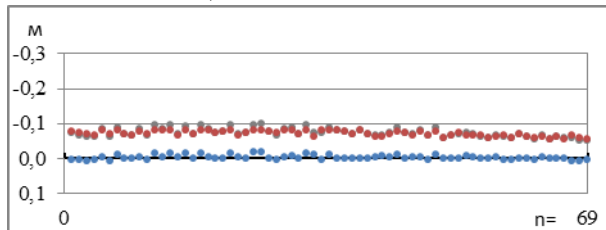
и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



к) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



л) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

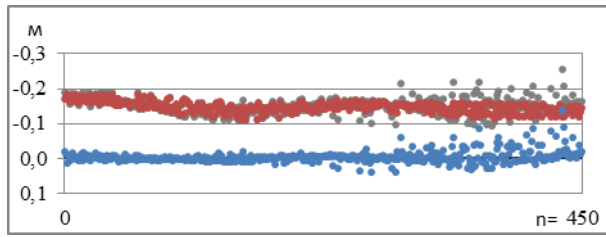


м) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

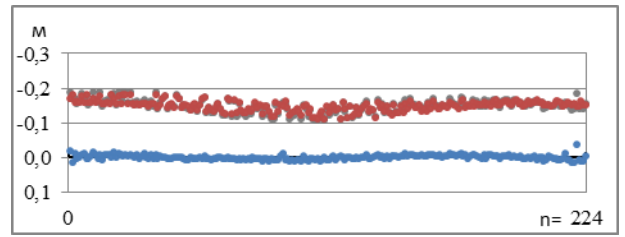
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

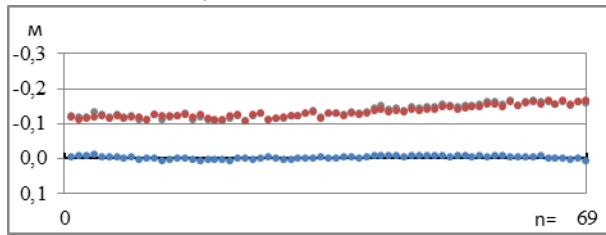
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі GECO в системі “zero-tide” для територій А1, А2



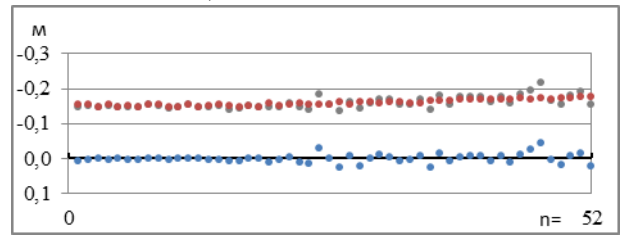
а) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



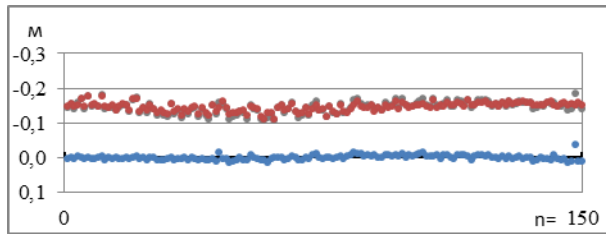
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



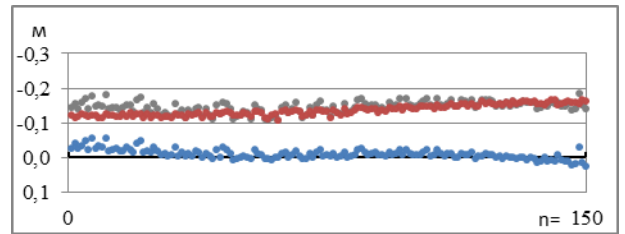
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



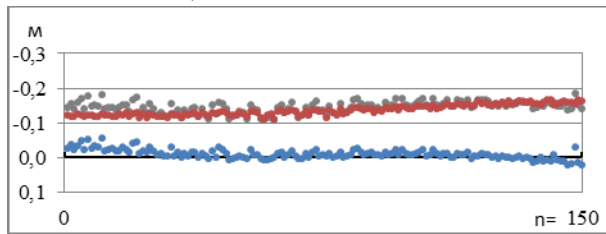
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



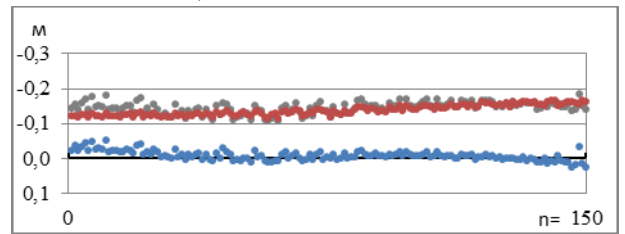
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



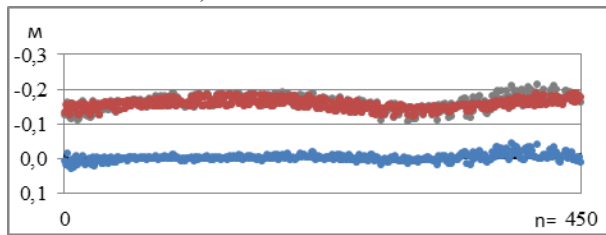
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



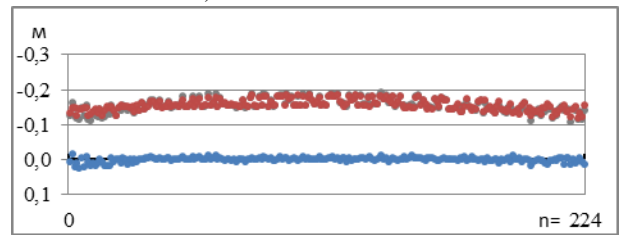
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



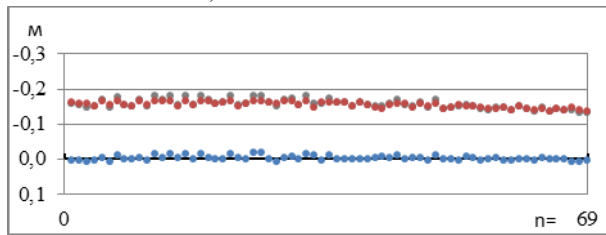
и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



к) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



л) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

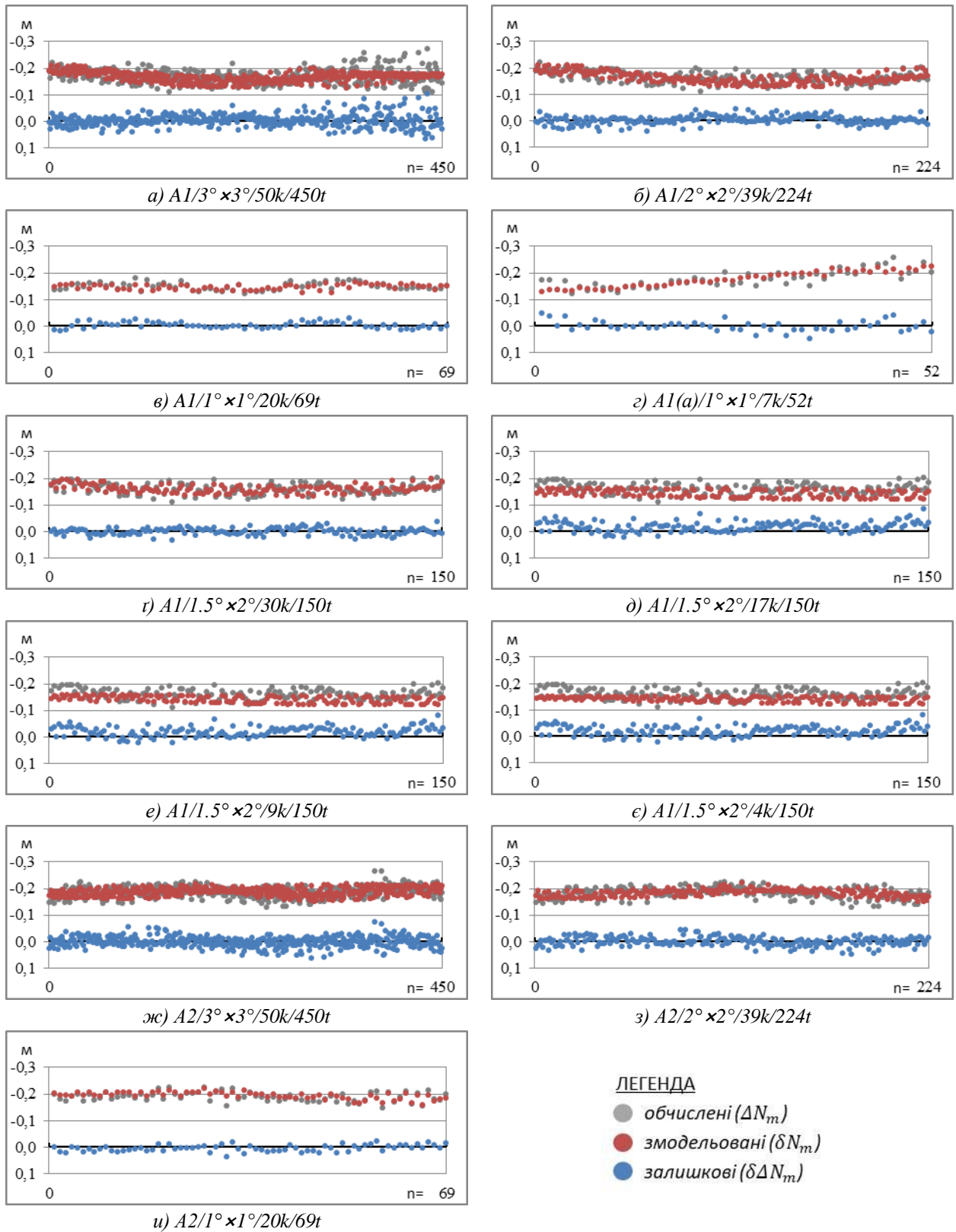


м) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

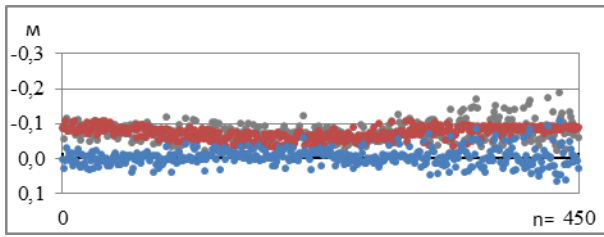
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

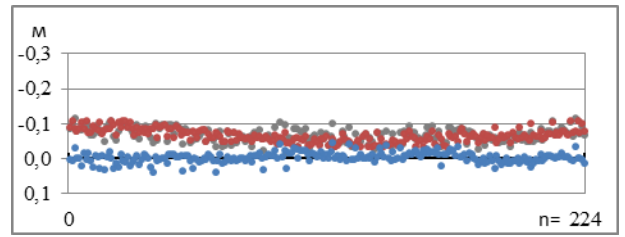
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі XGM2019e_2159 в системі “tide-free” для територій A1, A2



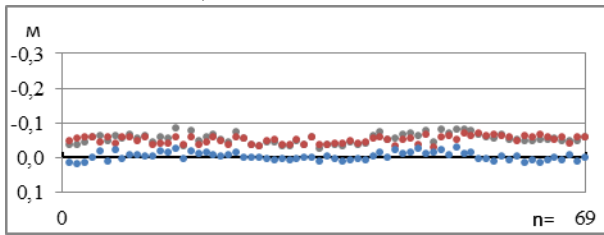
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі XGM2019e_2159 в системі “mean-tide” для територій А1, А2



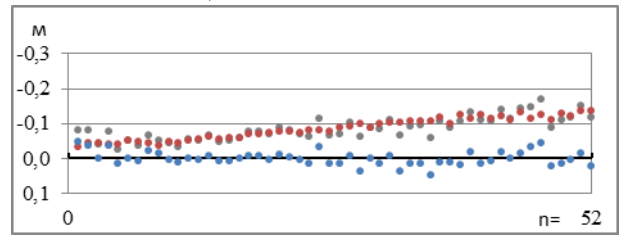
a) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



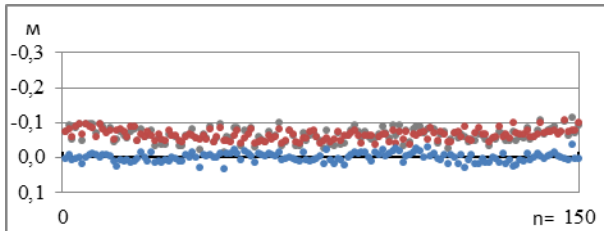
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



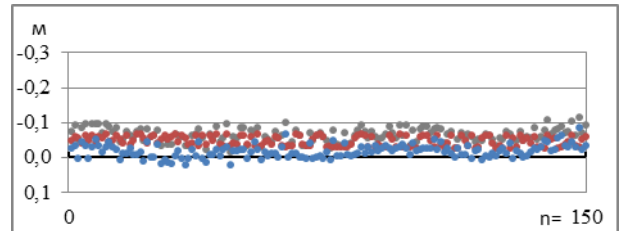
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



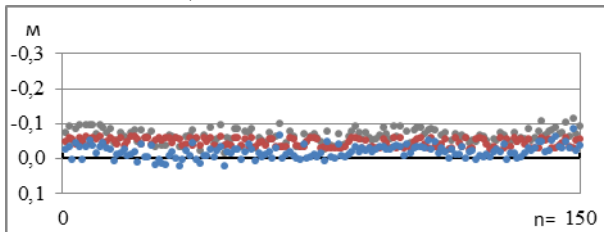
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



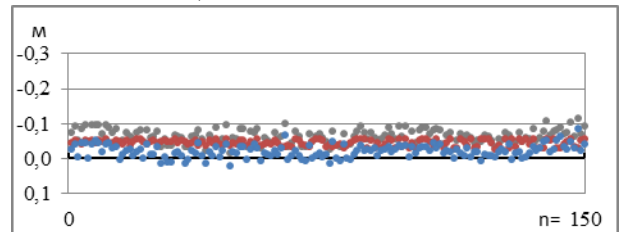
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



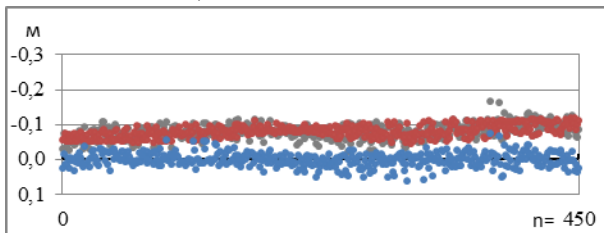
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



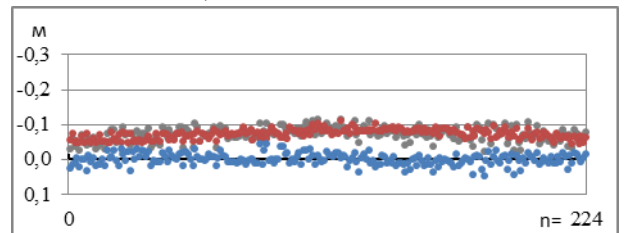
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



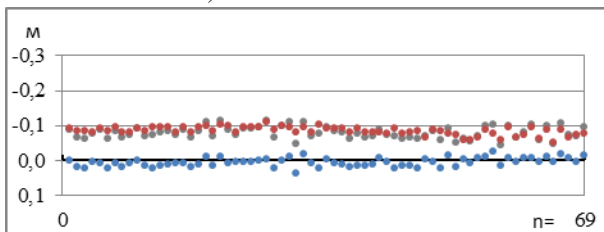
и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



й) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



к) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$

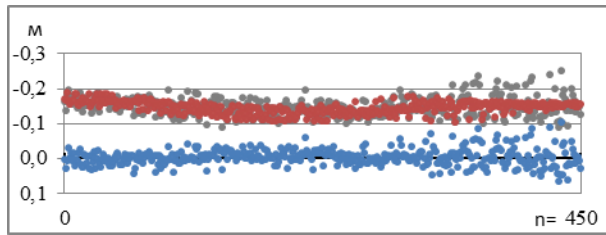


л) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

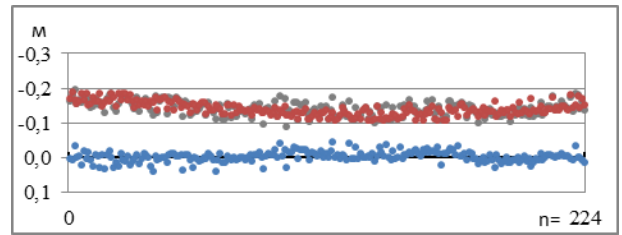
ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)

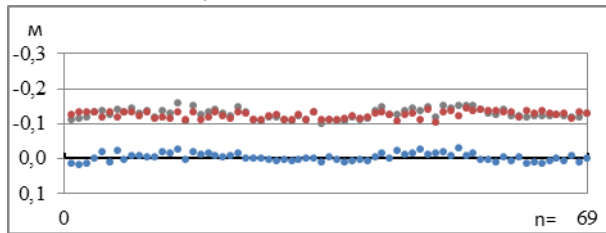
Характер зміни обчислених, змодельованих та залишкових похибок висот моделі XGM2019e_2159 в системі, “zero-tide” для територій А1, А2



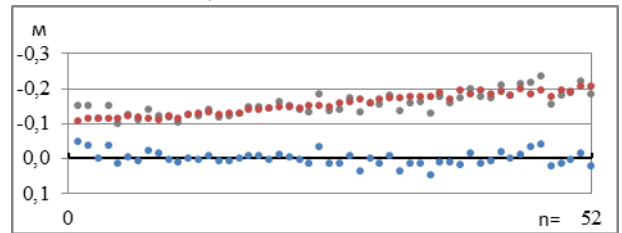
a) $A1/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



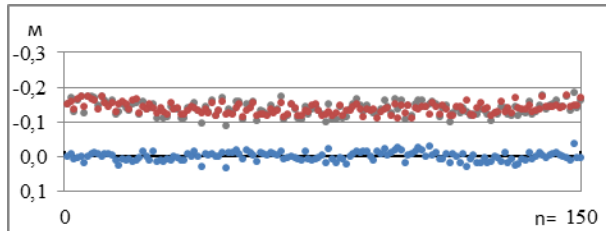
б) $A1/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



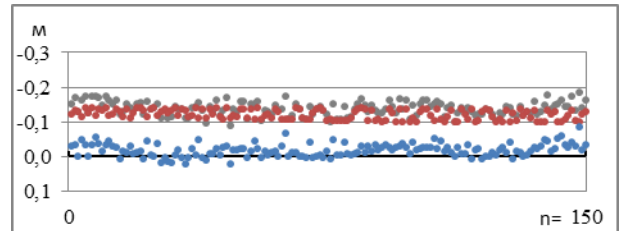
в) $A1/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$



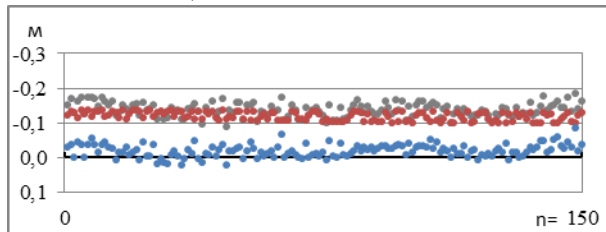
г) $A1(a)/1^\circ \times 1^\circ/7k/52t$



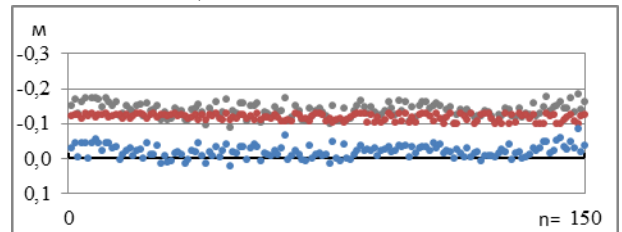
д) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/30k/150t$



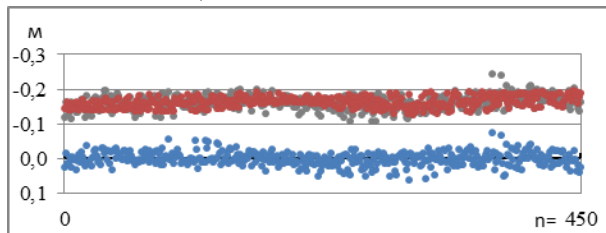
е) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/17k/150t$



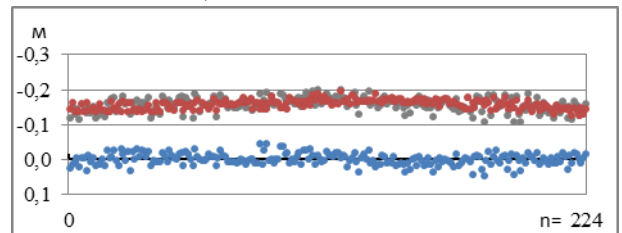
з) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/9k/150t$



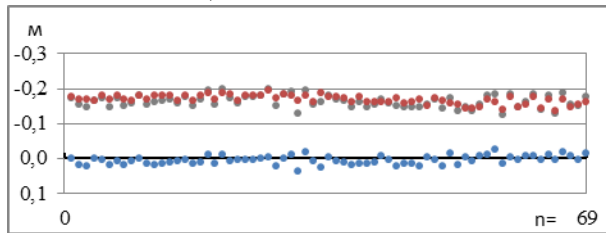
и) $A1/1.5^\circ \times 2^\circ/4k/150t$



к) $A2/3^\circ \times 3^\circ/50k/450t$



л) $A2/2^\circ \times 2^\circ/39k/224t$



м) $A2/1^\circ \times 1^\circ/20k/69t$

ЛЕГЕНДА

- обчислені (ΔN_m)
- змодельовані (δN_m)
- залишкові ($\delta \Delta N_m$)