

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”**

ДЖУМАН Богдан Богданович

УДК: 528.2/.3+550.3

**МОДЕЛЮВАННЯ РЕГІОНАЛЬНИХ ГЕОФІЗИЧНИХ ПОЛІВ ЗЕМЛІ
ДЛЯ РОЗВ’ЯЗКУ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАДАЧ**

05.24.01 - Геодезія, фотограмметрія та картографія

РЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

ЛЬВІВ – 2023

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі вищої геодезії і астрономії Національного університету “Львівська політехніка” Міністерства освіти і науки України.

Науковий консультант – доктор технічних наук, професор
ЗАБЛОЦЬКИЙ Федір Дмитрович,
Національний університет “Львівська
політехніка”, професор кафедри вищої
геодезії та астрономії.

Офіційні опоненти – доктор технічних наук, доцент
АННЕНКОВ Андрій Олександрович,
Київський національний університет
будівництва і архітектури, професор
кафедри інженерної геодезії;

доктор технічних наук, професор
КАБЛАК Наталія Іванівна,
Ужгородський національний університет,
професор кафедри геодезії, землеустрою та
геоінформатики;

доктор геологічних наук, професор
ОРЛЮК Михайло Іванович,
Інститут геофізики ім. С.І. Субботіна НАН
України, завідувач відділу геомагнетизму.

Захист відбудеться «28» вересня 2023р. о 11⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 35.052.12 у Національному університеті “Львівська політехніка” (79013, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, ауд. 226 головного корпусу).

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного університету “Львівська політехніка” (79013, м. Львів, вул. Професорська, 1).

Реферат розісланий « 28 » серпня 2023 р.

**Вчений секретар спеціалізованої
вченої ради Д 35.052.12**

к.т.н., доц. А.Р. Согор

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Невід'ємною частиною розв'язування сучасних наукових і прикладних задач геодезії, геофізики, глобальної геодинаміки є моделювання різних полів Землі і планет, інтерпретація отриманих результатів та їх безпосереднє використання. Активний розвиток нових геодезичних та геофізичних технологій, підвищення точності вимірювальних приладів, технологічні виклики сучасності вимагають удосконалення методів побудови моделей глобальних та регіональних полів Землі. В глобальному масштабі для обчислення моделей в якості базової системи функцій здебільшого використовують кульові функції Лежандра. Така параметризація вважається стандартною для представлення глобальних гравітаційного та магнітного полів Землі, оскільки кульові функції мають аналогічні властивості з даними полями. Також в силу швидкої збіжності даних функцій їх зручно використовувати для різного роду задач апроксимації, наприклад, обчислення глобальної апроксимаційної моделі параметру іоносфери *VTEC*.

В регіональному масштабі сферичні функції втрачають свої властивості, і для вирішення подібних задач використовують інші методи, які базуються на модельному та операційному підходах.

Високоточні моделі гравітаційного поля Землі необхідні для отримання гравітаційнозалежних висот топографічної поверхні супутниковими методами. Для моделювання регіонального гравітаційного поля Землі, зокрема моделювання поверхні геоїда, переважно використовують методи операційного підходу фізичної геодезії. Можна виділити такі основні методи: середня квадратура колокація (СКК), обчислення висот геоїда на основі формули Стокса, використання радіальних базисних функцій тощо.

Метод СКК, запропонований Г. Моріцом 1962 р. та уніфікований Т. Крарупом, був застосований для визначення аномального гравітаційного поля Землі з використанням комбінації різних типів геодезичних вимірів. Даний метод дає задовільні результати для рівнинних районів суходолу, але для гірських районів виникають певні труднощі щодо врахування «тренду» або систематичних похибок у значеннях величин гравітаційних аномалій у вільному повітрі. При використанні методу СКК виникають певні обчислювальні труднощі, пов'язані з великою розмірністю матриці нормальних рівнянь (рівною кількості вимірів), близькою до сингулярної коваріаційною матрицею (через точки з однаковими або близькими по значенню координатами), а також складністю емпіричного підбору локальної коваріаційної функції. Тим не менше даний метод вважається одним з кращих для обчислення регіональної моделі геоїда. Також зазначимо, що коефіцієнти розкладу глобальної аналітичної коваріаційної функції в ряд за поліномами Лежандра мають аналітичну залежність із коефіцієнтами розкладу гравітаційного потенціалу в ряд за сферичними функціями Лежандра.

Обчислення висот геоїда на основі формули Стокса передбачає виконання числового інтегрування на поверхні сфери, яке очевидно залежить від конфігурації вхідних даних, що не є тривіальною задачею. Крім того,

використання різних трансформант гравітаційного потенціалу в цьому методі є обмеженим.

Наприкінці ХХ ст. О.М. Марченко запропонував для моделювання регіонального гравітаційного поля використовувати систему нецентрального мультиполів як частковий випадок радіальних базисних функцій (РБФ). Найбільшу ефективність цей метод показує у поєднанні з методом СКК. Відзначимо, що даний метод в комбінації з методом СКК використовувався при реалізації українського квазігеоїда УКГ, адже емпірична коваріаційна функція представлялася спеціальною аналітичною коваріаційною функцією з масиву потенціальних радіальних мультиполів.

Приблизно в той самий час англійський вчений Дж. Хейнес пропонує для задач моделювання регіональних потенціальних полів використовувати системи сферичних функцій з дійсними індексами, вперше отриманих ще Томпсоном і Тетом та висвітлених в праці «Трактат з натуральної філософії». Сферичні функції з дійсними індексами являють собою потужний математичний апарат для моделювання різних полів у регіональному масштабі. Перш за все властивості даних функцій є аналогічними до властивостей відповідних полів. Крім того область визначення (відповідно довжина хвилі) таких функцій підбирається під досліджуваний регіон. Проте методи моделювання, в основі яких лежать сферичні функції з дійсними індексами, мають і ряд недоліків. Основним з цих недоліків, на нашу думку, є те, що дані функції формують дві ортогональні системи функцій, але в загальному випадку вони не є ортогональними. Також їх використання обмежується регіоном з центром на полюсі, а в інших випадках необхідно використовувати трансформацію вхідних даних. Через вище наведені недоліки сферичні функції з дійсними індексами не отримали широкого застосування для обчислення регіонального гравітаційного поля Землі. Усунення даних недоліків дозволить не тільки використовувати даний метод для побудови високоточних моделей регіонального гравітаційного поля Землі подібно до сферичних функцій Лежандра у глобальному масштабі, але знайти зв'язок між коефіцієнтами розкладу аналітичної коваріаційної функції за дійсними поліномами Лежандра з дійсними індексами і коефіцієнтами розкладу регіонального гравітаційного поля Землі за сферичними функціями Лежандра з дійсними індексами. Це дасть можливість значно скоротити кількість параметрів моделі аналітичної коваріаційної функції при використанні методу СКК.

Моделі магнітного поля Землі необхідні при вирішенні питань навігації та орієнтації; дослідженні аномалій, створених коровими джерелами; геологічного картування порід; тектонічного районування тощо. При моделюванні регіонального магнітного поля Землі домінуючими є методи, в основі яких лежить використання функцій, отриманих із розв'язку задачі Штурма-Ліувілля. Зауважимо, що до таких методів відноситься і метод, який передбачає використання як базову систему функцій сферичні функції з дійсними індексами, які є аналогом глобальних сферичних функцій в регіональному масштабі. Даний метод вважається одним із кращих при моделюванні регіонального магнітного

поля Землі. Удосконалення цього методу дозволить уникнути трансформації вхідних даних і приведе до оптимізації обчислювального процесу.

Для покращення розв'язку задач координатного забезпечення (попередження про величину похибки визначення координат пункту з використанням одночастотного GNSS-приймача) необхідно обчислювати значення параметра іоносфери *VTEC* в певній точці простору на певний момент часу за його відомими значеннями, отриманими із GNSS-станцій. Одним із кращих розв'язків цієї задачі є побудова апроксимаційної параметричної просторово-часової моделі параметра *VTEC* в регіональному масштабі, де в якості базової системи функцій будуть слугувати сферичні функції з дійсними індексами, а невідомі коефіцієнти моделі розкладені в степеневі ряди.

Підсумовуючи вище сказане зазначимо, що удосконалення теорії сферичних функцій з дійсними індексами дозволить підвищити ефективність побудови моделей використовуваних в геодезії регіональних геофізичних полів Землі у порівнянні з вже існуючими методами, а також підвищити точність даних моделей.

Загалом методами моделювання використовуваних в геодезії геофізичних полів Землі займалися багато вітчизняних та зарубіжних вчених, зокрема Г.О. Мещеряков, М.І. Марич, О.М. Марченко, П.М. Зазуляк, А.Л. Церклевич, М.М. Фис, А.О. Анненков, М.І. Орлюк, В.Ю. Максимчук, Н.І. Каблак, Ю.М. Нейман, К.Ф. Гаус, Т. Краруп, Г. Моріц, Р. Рапп, Дж. Стокс, С. Шаєр, Дж. Хейнес, К. Чернінг та інші.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота відповідає науковому напряму кафедри вищої геодезії та астрономії «Моніторинг фізичної поверхні Землі та її атмосфери на основі аналізу результатів сучасних наземних і супутникових вимірювань». Робота пов'язана з планами, темами і науковою тематикою робіт галузевої науково-дослідної лабораторії «Геодезичного моніторингу та рефрактометрії» (ГНДЛ-18) Інституту геодезії Національного університету «Львівська політехніка».

Результати дисертаційної роботи отримали впровадження в рамках державного замовлення «Розбудова мережі активних перманентних станцій глобальної навігаційної супутникової системи в південно-західному транскордонному секторі України для розширення послуг точного позиціонування» (№ ДЗ / 102 – 2021 від 04 березня 2021 р.), виконаного згідно розпорядження Кабінету міністрів України «Про затвердження переліку найважливіших науково-технічних (експериментальних) розробок за пріоритетними напрямами розвитку науки і техніки в рамках виконання державного замовлення на найважливіші науково-технічні (експериментальні) розробки та науково-технічну продукцію у 2021-2022 роках» від 18 серпня 2021 р. № 950-р.

Також автор брав участь у госпдоговірних науково-дослідних роботах «Виконання зв'язків нівелірних мереж України та Польщі» (номер госпдоговору – 53-Г), «Послуги з виконання геодезичних робіт з нівелювання першого класу кушів фундаментальних реперів системи геодезичного контролю ГЕС і ГАЕС філії «Каскад Київських ГЕС і ГАЕС» ПрАТ «Укргідроенерго» (номер

госпдоговору – 858П/2020), «Дністровська ГАЕС. Визначення горизонтальних переміщень пунктів опорної геодезичної мережі методом GPS» (державний реєстраційний номер – № 0117U0007363), «Виконання робіт та надання послуг на користь «Укргідроенорго», пов'язаних з обслуговуванням системи геодезичного моніторингу» (тема № 634, замовник – компанія «Leica Geosystems», Швейцарія).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення теоретичних положень і практичних рекомендацій щодо вирішення важливої науково-прикладної проблеми удосконалення методів побудови регіональних моделей використовуваних в геодезії геофізичних полів Землі.

Реалізація мети дисертаційної роботи передбачає вирішення таких завдань:

- пошук оптимальних методів побудови регіональних моделей геофізичних полів Землі;
- дослідження оптимізації технічного та часового ресурсу під час побудови регіональних моделей;
- проведення аналізу точності моделей геоїда на території України;
- побудова та оцінка точності регіональної моделі геоїда на центрально-південний регіон України;
- побудова та оцінка точності регіональної моделі магнітного поля Землі на територію Центральної Європи;
- побудова та оцінка точності регіональної апроксимаційної просторово-часової моделі параметру іоносфери на територію західної України;
- розробка алгоритмів та програмного забезпечення для реалізації поставлених завдань.

Об'єктом дослідження є використовувані в геодезії геофізичні поля Землі, а **предметом дослідження** – методи побудови регіональних моделей використовуваних в геодезії геофізичних полів Землі.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використано методи функціонального аналізу, алгебри матриць, апроксимації функцій, математичного опрацювання геодезичних вимірів. Для обчислення моделей регіональних полів Землі використовувався спосіб найменших квадратів з введенням параметру регуляризації Тіхонова. Для оцінки точності отриманих результатів застосовувались статистичні методи та диференціальний аналіз.

Наукова новизна. Результати теоретичних та практичних досліджень вирішують важливу науково-прикладну проблему удосконалення методів побудови регіональних моделей використовуваних в геодезії геофізичних полів Землі. Найвагомішими результатами дисертаційного дослідження, що визначають ступінь та характер новизни, є наступні результати:

- 1) Уперше отримано та теоретично обґрунтовано систему функцій, ортогональних на довільній сферичній трапеції, побудованих на основі сферичних функцій Лежандра з дійсними індексами (СТНА-функцій).
- 2) Знайдено аналітичні вирази для обчислення нулів та повної норми СТНА-функцій, отримано аналітичні вирази для першої та другої похідних даних функцій.

- 3) Уперше запропоновано алгоритм адаптації квадратурних формул Гауса для розрідження матриці нормальних рівнянь при використанні СТНА-функцій.
- 4) Порівняно та показано перевагу використання СТНА-методу моделювання регіонального поля із вже існуючими методами;
- 5) Виявлено можливість використання СТНА-поліномів для представлення локальної аналітичної коваріаційної функції.
- 6) Побудовано моделі регіонального гравітаційного поля Землі з використанням (SNA+СТНА)-функцій на центрально-південний регіон України для потреб мережі активних перманентних GNSS-станцій «GeoTerrace» та виконано оцінку точності даних моделей.
- 7) Розроблено та апробовано методику застосування СТНА-функцій для моделювання регіонального магнітного поля Землі.
- 8) Розроблено та апробовано методику застосування СТНА-функцій для обчислення апроксимаційної просторово-часової моделі параметру іоносфери *VTEC*.

Практичне значення результатів. Запропоновані методи рекомендується використовувати для побудови регіональних моделей гравітаційного і магнітного полів Землі та апроксимаційної просторово-часової моделі параметру іоносфери *VTEC*.

Теоретичні та експериментальні результати дослідження впроваджено в рамках державного замовлення «Розбудова мережі активних перманентних станцій глобальної навігаційної супутникової системи в південно-західному транскордонному секторі України для розширення послуг точного позиціонування» (№ ДЗ / 102 – 2021 від 04 березня 2021 р.), виконаного згідно розпорядження Кабінету міністрів України «Про затвердження переліку найважливіших науково-технічних (експериментальних) розробок за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки в рамках виконання державного замовлення на найважливіші науково-технічні (експериментальні) розробки та науково-технічну продукцію у 2021-2022 роках» від 18 серпня 2021 р. № 950-р.

Також результати дослідження впроваджено у навчальний процес для студентів II (магістерського) рівня вищої освіти за спеціальністю 193 «Геодезія та землеустрій» у курс «Референцні системи в геодезії» та за спеціальністю 103 «Науки про Землю» у курс «Космічний моніторинг Землі». Крім того дані результати використовувались в процесі підготовки магістерських кваліфікаційних робіт студентів за ОПП «Космічна геодезія» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій».

Публікації. Основні положення дисертації опубліковано у 30 друкованих працях, із них: 7 статей у наукових періодичних виданнях, які внесені до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science; 10 статей у наукових фахових виданнях України, які внесені до міжнародної наукометричної бази даних Index Copernicus; 3 статті у наукових фахових виданнях України; 4 публікації у збірниках матеріалів конференцій, що входять до наукометричної

бази даних Scopus; 5 публікацій у збірниках матеріалів конференцій; 1 стаття у інших виданнях.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові положення, висновки і рекомендації, які виносяться на захист, отримані автором самостійно. Особистий внесок автора полягає у здійсненні теоретичних та експериментальних досліджень, виведенні основних формул, опрацюванні виконаних вимірювань, формулюванні основних положень та висновків. Наукові результати, представлені у дисертаційній роботі, є результатом самостійних напрацювань автора.

Одноосібно автором опубліковано 6 праць [1, 12-16], 24 – у співавторстві [2-11, 17-30]. У роботах, опублікованих у співавторстві, автору належить: розробка методу, алгоритмів, програм для проведення обчислень та інтерпретація отриманих результатів [2, 7-9, 11, 17-21, 23-27, 30]; розробка методу, алгоритмів, програм для проведення обчислень [3-6, 10, 22, 28, 29].

Наукові положення і результати, що виносились на захист у кандидатській дисертації, не використовувались.

Апробація результатів дисертації відображена у доповідях на:

- міжнародній науково-технічній конференції молодих вчених «GeoTerrace» (Львів, 2020, 2021);
- міжнародній науково-технічній конференції «Геоінформатика: теоретичні та прикладні аспекти» (Київ, 2020);
- міжнародній конференції «Satelitarne pozycjonowanie – Precyzyjna nawigacja – Mobilny monitoring» (Демблін, Польща, 2019);
- міжнародній конференції «International multidisciplinary scientific geosconference SGEM» (Албена, Болгарія, 2018);
- науково-технічній конференції «Вибрані питання астрономії та астрофізики» (Львів, 2018);
- всеукраїнській конференції «Українська конференція з космічних досліджень» (Київ, 2018; Одеса, 2017);
- семінарах «ГеоГеліоКонсорціуму» (Львів, 2017, 2018);
- науково-практичній конференції «Аерокосмічні технології в Україні: проблеми та перспективи» (Київ, 2017);
- міжнародній науковій конференції «Астрономічна обсерваторія Львівської політехніки: історія і сучасність» (Львів, 2017).

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, 4 розділів, висновку, списку використаних джерел (213 найменувань) та додатку. Загальний обсяг дисертації становить 240 сторінок, в тому числі 103 рисунки та 40 таблиць.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У вступі обґрунтовано актуальність теми, визначено мету, зазначено зв'язок роботи з науковими планами, з'ясовано стан дослідження проблеми, на розв'язання якої спрямовується науковий пошук, об'єкт і предмет дослідження, розкрито наукову новизну, практичне значення отриманих результатів, подано інформацію щодо апробації та публікації результатів дослідження.

У першому розділі “Сучасний стан щодо моделювання геофізичних полів Землі” проведено аналіз сучасних методів обчислення глобальних та регіональних моделей гравітаційного поля Землі, зокрема розглянуто методи побудови та точність реалізацій українського квазігеоїда. Розглянуто необхідність модернізації української висотної системи шляхом її інтеграції в європейську вертикальну референцну систему (EVRS), проведено відповідні дослідження та порівняно точності глобальних моделей гравітаційного поля Землі на прикордонну територію України згідно отриманих результатів. Виконано аналіз методів обчислення регіонального магнітного поля Землі. Проведено аналіз методів побудови апроксимаційних моделей параметра іоносфери *VTEC*.

Для моделювання глобального гравітаційного поля Землі здебільшого використовують розклад в ряд за кульовими функціями:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos\theta), \quad (1)$$

де C_{nm} та S_{nm} – невідомі гармонічні коефіцієнти, $P_{nm}(\cos\theta)$ – приєднані функції Лежандра.

Моделі регіонального гравітаційного поля Землі в більшості випадків будуються в межах процедури «Вилучення-Обчислення-Відновлення», а систематична складова в таких випадках обчислюється з використанням глобальних моделей. Серед методів побудови моделей регіонального гравітаційного поля Землі можна виділити метод середньої квадратичної колокації, радіальні базисні функції, використання формули Стокса, сферичні функції з дійсними індексами тощо. Перші три вище перелічені методи є добре вивченими і широко використовуваними для побудови регіональної моделі геоїда. До регіональних моделей геоїда, які обчислювалися на територію України, можна віднести реалізацію українського квазігеоїда.

Крайньою реалізацією українського квазігеоїда є УКГ2012 (оскільки інформації про УКГ2017 немає у відкритому доступі), яка обчислювалася з накладенням додаткової умови, що для пунктів нівелювання I і II класів має бути збережено точність < 2 см. Відхилення моделі УКГ2012 на окремих точках може сягати до 23 см. Всі реалізації українського квазігеоїда пов'язані із середнім рівнем Балтійського моря. В контексті інтеграції української висотної системи в систему EVRS побудову високоточної моделі геоїда слід розглядати відносно рівня Амстердамського футштока.

Оскільки при побудові на територію України Європейської ВРС EVRF2019 використовувалися розкидані в часі дані нівелювання, отримані з врахуванням поправки за непаралельність рівневих поверхонь із різної застарілої

гравіметричної інформації та без належного введення поправки за рухи земної кори, доцільно виконати незалежне дослідження для оцінки точності EVRF2019 на територію України. Таке дослідження має включати нівелювання I класу між висотними пунктами ДГМ України та сусідніх країн, нівелірні мережі яких входять в систему висот UELN/EVRS2000.

За участю та під керівництвом автора виконано геометричне нівелювання I класу за двома лініями: Львів – Шегині – Перемишль та Ковель – Ягодин – Хелм. Встановлено, що різниця між Балтійською та Європейською системами висот по лінії Львів – Шегині – Перемишль складає 12.96 см, а по лінії Ковель – Ягодин – Хелм – 11.07 см. Отриманий результат порівняно із різницями висот між Балтійською та Європейською системами висот на території України, отриманими під час обчислення останньої реалізації EVRF2019 (рис. 1). Розбіжність між відповідними різницями складає 2-3 см. Відповідно для підвищення точності впровадження Європейської ВРС на територію України необхідно ввести поправку за непаралельність рівневих поверхонь із сучасних високоточних моделей регіонального гравітаційного поля Землі.

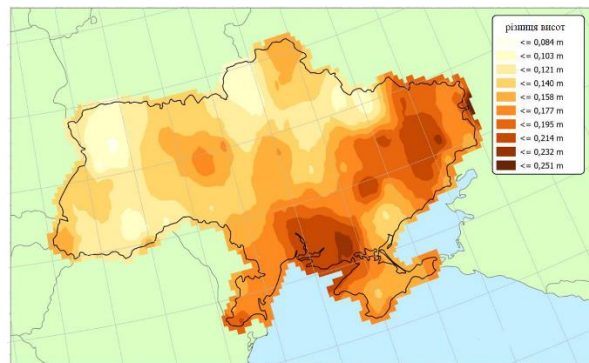


Рис. 1. Трансформація висот між Балтійською та Європейською системами висот на території України згідно EVRF2019

Для порівняння точності отриманих із глобальних моделей висот геоїда на досліджувану прикордонну територію проведено GNSS-нівелювання на деяких нівелірних пунктах, через які йшли ходи вищеописаного нівелювання. До нівелірних пунктів належали фундаментальні та ґрунтові репери, а також горизонтальні марки та пункти триангуляції. На рисунку 2 зображено карти різниць між висотами геоїда, отриманих за моделями EGM2008, EIGEN-6C4, XGM2019e_2159 (максимальний порядок всіх перелічених моделей рівний 2190) та EGG2015 і висотами геоїда, отриманими із GNSS-вимірів.

Із глобальних моделей гравітаційного поля Землі на досліджуваний регіон найкраще підходить модель EGM2008 (після видалення систематики ≈ 10.8 см). Проте найкращу точність (після видалення систематики ≈ 5.5 см) дозволяє отримати європейський геоїд EGG2015.

Глобальні та регіональні моделі магнітного поля Землі набули широкого використання при розв'язуванні задач, що виникають в геодезії та науках про Землю. Такі моделі необхідні при вирішенні питань навігації та орієнтації; дослідженні аномалій, створених коровими джерелами; геологічного картування

порід; вивчення складчастої та розривної тектоніки, тектонічного районування; вивчення співвідношень приповерхневих і глибинних структур літосфери тощо. З точки зору геодезії важливим аспектом використання регіональних моделей магнітного поля Землі є обчислення величини кута магнітного схилення.

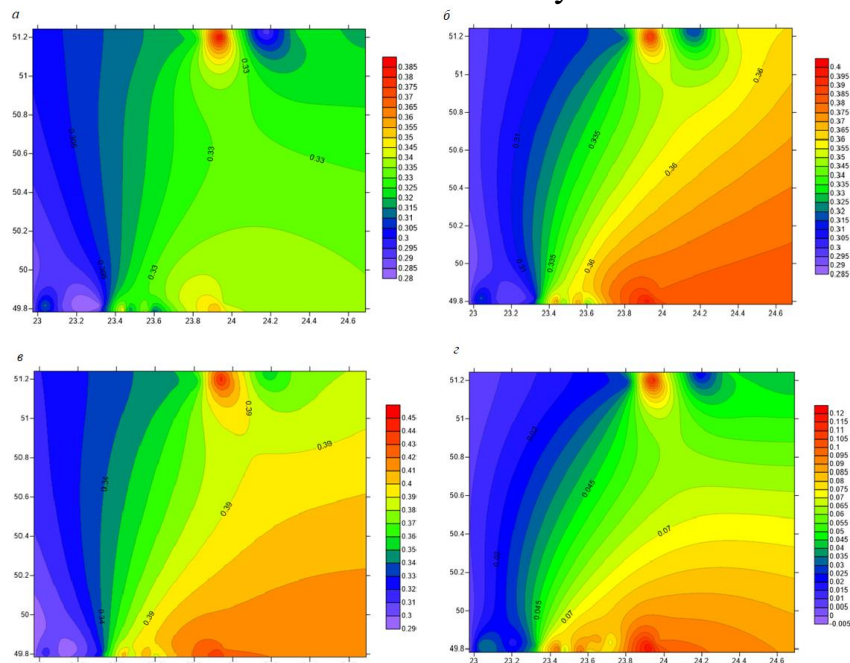


Рис. 2. Карта різниць висот геоїда, отриманих із GNSS-вимірів та за моделлю: а) EGM2008, б) EIGEN-6C4, в) XGM2019e_2159, г) EGG2015

До основних глобальних моделей магнітного поля Землі можна віднести IGRF (International Geomagnetic Reference Field) та WMM (World Magnetic Model), які отримують за допомогою розкладу в ряд за сферичними функціями компонент геомагнітного поля. Методи моделювання регіонального магнітного поля Землі в загальному можна поділити на два типи. Перший з них передбачає розклад компонент магнітного поля в ряди Фур'є подібно до сферичного гармонічного аналізу, тобто шляхом вирішення граничної задачі для рівняння Лапласа за допомогою методу розділення змінних. Другий тип методів апроксимує досліджуваний регіон площиною, і модель магнітного поля будується на цій площині. Основна перевага цих методів полягає в тому, що базова система функцій обчислюються значно простіше, ніж у сферичній геометрії. Основними методами моделювання регіонального магнітного поля Землі є прямокутний гармонічний аналіз, циліндричний гармонічний аналіз, сферичний гармонічний аналіз (SCHA, ASHA, R-SCHA, TOSCA) тощо.

Важливу роль при розв'язуванні геодезичних задач відіграють глобальні та регіональні моделі параметру іоносфери *VTEC*. Такі апроксимаційні моделі використовують для покращення розв'язку задач координатного забезпечення (попередження про величину похибки визначення координат пункту з використанням одночастотного GNSS-приймача); для покращення розв'язку задач космічної погоди, яка впливає на роботу космічних апаратів, ліній електропередач, трубопроводів, видобуток нафти і газу та багато інших сфер людської діяльності.

Глобальні моделі параметру іоносфери *VTEC* будуються з використанням методів функціонального аналізу, пов'язаних зі сферичними функціями. Регіональні моделі параметру іоносфери *VTEC* необхідні для отримання більш детальної інформації про іоносферу. Для обчислення даних моделей використовують метод В-сплайнів, SCHА-метод, ординарний крігінг, універсальний крігінг, метод зважування зворотної відстані, метод автокореляції, метод ковзного середнього, метод на основі нейронних мереж, модель авторегресії, площинну апроксимацію тощо.

У другому розділі “Сферичні функції з дійсними індексами” на основі теорії сферичних функцій з дійсними індексами розроблено систему функцій (СТНА-функції) з областю визначення на сферичній трапеції. Знайдено аналітичні вирази даних функцій через їх розклад в гіпергеометричний ряд, отримано їх першу і другу похідну та норму. Запропоновано робочі формули для побудови квазідіагональної матриці нормальних рівнянь при обчисленні СТНА-моделі методом найменших квадратів. Знайдено зв'язок між глобальними сферичними функціями і СТНА-функціями. Отримано формулу розрізняювальної здатності СТНА-моделі.

Розглянемо на сферичній трапеції з координатами вершин θ_{min} , θ_{max} , λ_{min} , λ_{max} на відрізку $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ наступну систему функцій (СТНА-поліноми):

$$\left. \begin{aligned} P_{km}(\theta) &= \sin^m(\theta - \theta_{min}) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{min})}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{mean} \\ P_{km}(\theta) &= (-1)^{k+m} \sin^m(\theta_{max} - \theta) \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{max} - \theta)}{2}\right), \\ &\text{якщо } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{max} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де θ_{mean} – значення середньої широти трапеції, тобто

$$\theta_{mean} = \frac{\theta_{min} + \theta_{max}}{2}. \quad (3)$$

Вважатимемо, що величини k і m – цілі невід'ємні числа, а n_k можна знайти як нулі відповідних гіпергеометричних рядів. СТНА-поліноми являють собою ортогональну систему функцій на відрізку $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ за вагою $\sqrt{\sin(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|)}$ (при $m = const$):

$$\int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} P_{km}(\theta) P_{sm}(\theta) \sin(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) d\theta = 0. \quad (4)$$

Перші вісім СТНА-поліномів (при $m = 0$) зображено на рисунку 3 (використано довільний відрізок $[20^\circ, 70^\circ]$). З рисунку 3, а також з (2) видно, що поліноми з парними індексами є парними функціями, а поліноми з непарними індексами є непарними функціями.

СТНА-функції на довільній сферичній трапеції мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} R_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\theta) h_m^c, \\ S_{km}(\theta, \lambda) &= P_{km}(\theta) h_m^s, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\left. \begin{aligned} h_m^c &= \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \\ h_m^s &= \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

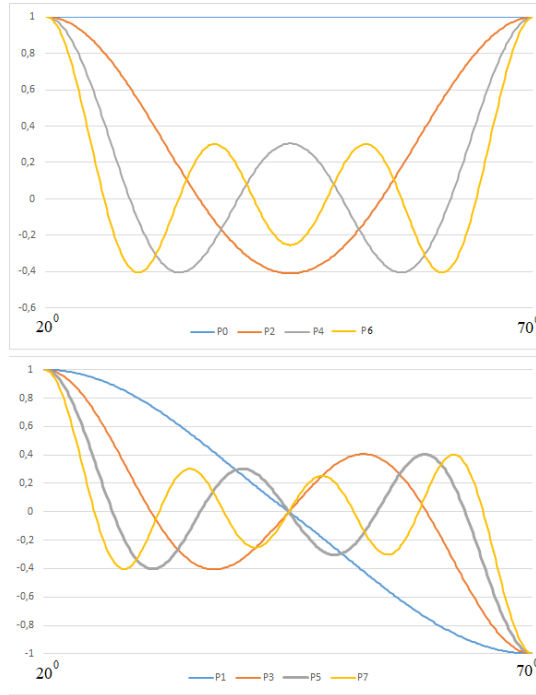


Рис. 3. Перші вісім СТНА-поліномів на відрізку $[20^\circ, 70^\circ]$.

На рисунку 4 зображено СТНА-функції $R_{60}(\theta, \lambda)$, $R_{66}(\theta, \lambda)$ та $R_{63}(\theta, \lambda)$ на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{min} = 20^\circ$, $\theta_{max} = 70^\circ$, $\lambda_{min} = 30^\circ$, $\lambda_{max} = 50^\circ$.

Встановлено, що СТНА-функції володіють властивістю ортогональності на сферичній трапеції:

$$\left. \begin{aligned} \iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) R_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \\ \iint_{\sigma} S_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma &= 0 \end{aligned} \right\} \text{якщо } s \neq n \text{ або } r \neq m, \quad (7)$$

$$\iint_{\sigma} R_{nm}(\theta, \lambda) S_{sr}(\theta, \lambda) d\sigma = 0 \text{ в будь-якому випадку,}$$

де $d\sigma$ – елемент сферичної трапеції, а саме

$$d\sigma = \sin(\theta_0 - |\theta - \theta_{mean}|) d\theta d\lambda. \quad (8)$$

Знайдено вирази нормованих СТНА-функцій $\bar{R}_{km}(\theta, \lambda)$ та $\bar{S}_{km}(\theta, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{km}(\theta, \lambda) &= \frac{\sqrt{p} R_{km}(\theta, \lambda)}{N_{km} Q_m}, \\ \bar{S}_{km}(\theta, \lambda) &= \frac{\sqrt{p} S_{km}(\theta, \lambda)}{N_{km} Q_m}. \end{aligned} \quad (9)$$

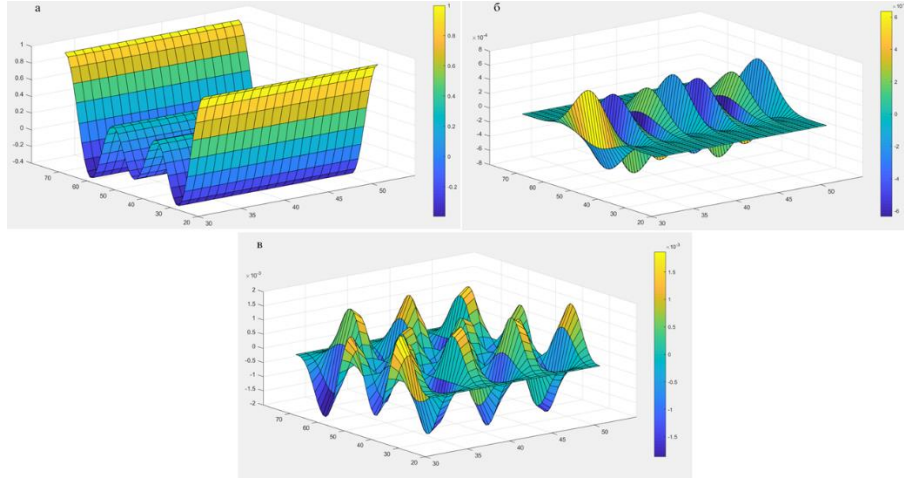


Рис. 4. СТНА-функції на сферичній трапеції з координатами вершин

$$\theta_{min} = 20^{\circ}, \theta_{max} = 70^{\circ}, \lambda_{min} = 30^{\circ}, \lambda_{max} = 50^{\circ}:$$

$$a) R_{60}(\theta, \lambda), б) R_{66}(\theta, \lambda) та в) R_{63}(\theta, \lambda)$$

В (9) використано наступні позначення:

$$p = (\cos\theta_{min} - \cos\theta_{max})(\lambda_{max} - \lambda_{min}), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} N_{km}^2 &= 2 \int_0^{\theta_0} P_{n_k m}^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \\ &= 2 \frac{\sin\theta_0}{2n_k+1} \frac{\partial}{\partial n} \left[P_{n_k m}(\cos\theta_0) \right] \frac{dP_{n_k m}(\cos\theta_0)}{d(\cos\theta)}, \text{ якщо } k - m = \text{непарне}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N_{km}^2 &= 2 \int_0^{\theta_0} P_{n_k m}^2(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \\ &= -2 \frac{\sin\theta_0}{2n_k+1} P_{n_k m}(\cos\theta_0) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{dP_{n_k m}(\cos\theta_0)}{d(\cos\theta)} \right], \text{ якщо } k - m = \text{парне}, \end{aligned}$$

$$Q_m^2 = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{2 - \delta_{m0}}, \quad (12)$$

де δ – символ Кронекера, p – площа сферичної трапеції.

Для нормованих СТНА-функцій $\bar{R}_{km}(\theta, \lambda)$ та $\bar{S}_{km}(\theta, \lambda)$ буде справедливою наступна рівність:

$$\iint_{\sigma} \bar{R}_{nm}^2 d\sigma = \iint_{\sigma} \bar{S}_{nm}^2 d\sigma = p. \quad (13)$$

Оскільки СТНА-функції $R_{km}(\theta, \lambda)$ та $S_{km}(\theta, \lambda)$ є ортогональними на сферичній трапеції, для обчислення моделі регіонального гравітаційного поля Землі з використанням цих функцій можна використати квадратурні формули. Іншими словами, необхідно знайти такі вузли θ_i і ваги ω_i , з якими виконуватиметься умова:

$$\sum_{i=1}^N \omega_i P_{k_1 m}(\theta_i) P_{k_2 m}(\theta_i) = \min, \quad k_1 \neq k_2, \quad (14)$$

де N – кількість точок на меридіані (кількість паралелей у рівномірній сітці).

Для спрощення даної задачі введемо нову змінну t , яка матиме область визначення $t \in [2\cos\theta_0 - 1; 1]$. Слід відмітити, що при $\theta_0 = 90^{\circ}$, тобто у випадку

всієї сфери, областю визначення t буде наступний відрізок: $t \in [-1; +1]$. Аналітичний зв'язок між змінними θ і t можна подати в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} t &= \cos(\theta - \theta_{min}), \text{ якщо } \theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{mean}; \\ t &= 2\cos\theta_0 - \cos(\theta_{max} - \theta), \text{ якщо } \theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{max}. \end{aligned} \quad (15)$$

З врахуванням заміни змінної (15) СТНА-поліноми можна представити такою формулою:

$$P_{km}(t) = (1 - t^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1-t}{2}\right),$$

якщо $\cos\theta_0 \leq t \leq 1$,

(16)

$$P_{km}(t) = (-1)^{k+m} (1 - \tilde{t}^2)^{\frac{m}{2}} \cdot F\left(m - n_k, n_k + m + 1, 1 + m, \frac{1-\tilde{t}}{2}\right),$$

якщо $2\cos\theta_0 - 1 \leq t \leq \cos\theta_0$.

де $\tilde{t} = 2\cos\theta_0 - t$.

У випадку квадратурних формул Гаусса-Лежандра вузли x_i являють собою нулі поліному Лежандра N -го порядку на інтервалі $[-1; +1]$, тобто x_i є розв'язком рівняння:

$$P_N(x) = 0. \quad (17)$$

Очевидно, кількість вузлів збігається з порядком N . Своєю чергою, ваги c_i можна знайти із співвідношення:

$$c_i = \frac{2}{(1-x_i^2)(P'_N(x_i))^2}, \quad (18)$$

де $i = \overline{1, \dots, N}$.

Коли відомі координати вузлів x_i та ваги c_i для відрізка $[-1; +1]$, можна знайти координати вузлів t_i та ваги w_i для довільного відрізка $[a; b]$ за простими лінійними формулами:

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(b - a)x_i; \\ \omega_i &= \frac{1}{2}(b - a)c_i. \end{aligned} \quad (19)$$

Для функцій (16) $a = 2\cos\theta_0 - 1$, $b = 1$. В такому випадку формула (19) перепишеться:

$$\begin{aligned} t_i &= \cos\theta_0 + (1 - \cos\theta_0)x_i, \\ \omega_i &= (1 - \cos\theta_0)c_i. \end{aligned} \quad (20)$$

Введемо для функцій (6) рівномірну сітку по довготі з кроком

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_{max} - \lambda_{min}}{M}, \quad (21)$$

де M – кількість вузлів. Тоді координати вузлів можна знайти за формулами:

$$\lambda_1 = \lambda_{min} + \frac{\Delta\lambda}{2},$$

$$\lambda_i = \lambda_1 + (i - 1)\Delta\lambda, \quad i = \overline{2, \dots, M}. \quad (22)$$

В такому випадку функції (6) володітимуть дискретною ортогональністю, яку можна записати у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^M h_{m_1}^c(\lambda_i) h_{m_2}^c(\lambda_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^M h_{m_1}^s(\lambda_i) h_{m_2}^s(\lambda_i) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{якщо } m_1 \neq m_2 \text{ і } m_1 + m_2 \neq M, \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^M h_{m_1}^c(\lambda_i) h_{m_2}^s(\lambda_i) = 0 \quad \text{в будь-якому випадку.}$$

Для прикладу обчислено елементи матриці нормальних рівнянь N , побудованої з використанням вищеописаних методик на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{min} = 20^\circ$, $\theta_{max} = 70^\circ$, $\lambda_{min} = 30^\circ$, $\lambda_{max} = 50^\circ$ до 4-го степеня/порядку ($k_{max} = 4$) з використанням рівномірної сітки. На рисунку 5 зображено фрагмент даної матриці (6 останніх рядків і стовпців).

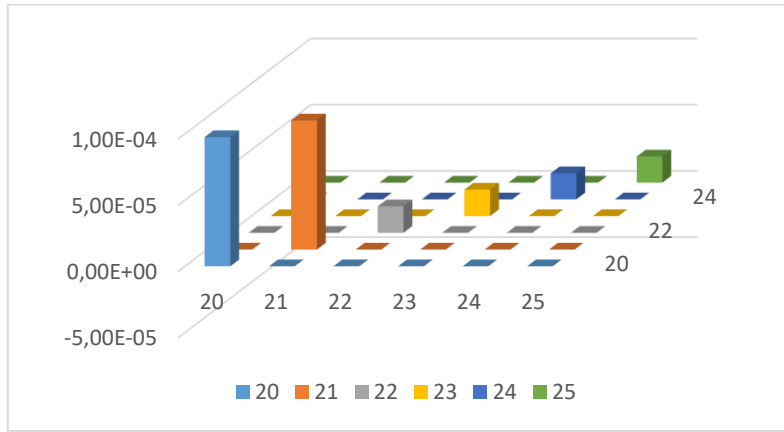


Рис. 5. Фрагмент матриці нормальних рівнянь на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{min} = 20^\circ$, $\theta_{max} = 70^\circ$, $\lambda_{min} = 30^\circ$, $\lambda_{max} = 50^\circ$ до 4-го степеня/порядку ($k_{max} = 4$) з використанням рівномірної сітки

Очевидно, всіма елементами такої матриці нормальних рівнянь окрім елементів головної діагоналі, можна знехтувати. Тоді для сітки з координатами вузлів θ_i ($i = \overline{1, \dots, N}$), λ_j ($j = \overline{1, \dots, M}$) будь-який елемент головної діагоналі матриці нормальних рівнянь можна знайти за формулою

$$n_{qq} = \frac{M}{2 - \delta_m} \sum_{i=1}^N \omega_i P_{km}^2(\theta_i), \quad (24)$$

де n_{qq} – елемент головної діагоналі матриці нормальних рівнянь.

Для знаходження похідних від СТНА-поліномів застосуємо добре відому формулу похідної гіпергеометричної функції F :

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a + 1, b + 1; c + 1; z). \quad (25)$$

Значення першої похідної $\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta}$ матиме вигляд:

$$\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta} = m \cdot ctg(\theta - \theta_{min}) P_{km}(\theta) + \frac{1}{2} \frac{(m - n_k)(n_k + m + 1)}{1 + m} \sin^{m+1}(\theta - \theta_{min}).$$

$$\cdot F\left(m - n_k + 1, n_k + m + 2, 2 + m, \frac{1 - \cos(\theta - \theta_{min})}{2}\right),$$

якщо $\theta_{min} \leq \theta \leq \theta_{mean}$; (26)

$$\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta} = -m \cdot \operatorname{ctg}(\theta_{max} - \theta) P_{km}(\theta) +$$

$$+ (-1)^{k+m+1} \cdot \frac{1}{2} \frac{(m - n_k)(n_k + m + 1)}{1 + m} \sin^{m+1}(\theta_{max} - \theta) \cdot$$

$$\cdot F\left(m - n_k + 1, n_k + m + 2, 2 + m, \frac{1 - \cos(\theta_{max} - \theta)}{2}\right),$$

якщо $\theta_{mean} \leq \theta \leq \theta_{max}$.

Із (26) видно, що при $k + m = \text{парне число}$ функція $\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta}$ буде непарною, а для $k + m = \text{непарне число}$ функція $\frac{dP_{km}(\theta)}{d\theta}$ буде парною.

Також знайдено другі похідні $\frac{d^2 P_{km}(\theta)}{d\theta^2}$ від СТНА- поліномів. Встановлено, що для $k + m = \text{парне число}$ функція $\frac{d^2 P_{km}(\theta)}{d\theta^2}$ буде парною, а для $k + m = \text{непарне число}$ функція $\frac{d^2 P_{km}(\theta)}{d\theta^2}$ буде непарною. Крім того, для всіх $k + m = \text{непарне число}$ ця функція терпить розрив першого роду в точці θ_{mean} . Величина розриву τ рівна

$$\tau = 2m \operatorname{ctg}\theta_0 P'_{km}(\theta_{mean}) + (m - n_k)(n_k + m + 1) \sin^m \theta_0 \cdot$$

$$\cdot \cos \theta_0 F\left(m - n_k + 1, n_k + m + 2, 2 + m, \frac{1 - \cos \theta_0}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sin^{m+2} \theta_0 \cdot \frac{(m - n_k)(m - n_k + 1)(n_k + m + 1)(n_k + m + 2)}{(1 + m)(2 + m)} \cdot$$

$$\cdot F\left(m - n_k + 2, n_k + m + 3, 3 + m, \frac{1 - \cos \theta_0}{2}\right).$$
 (27)

Розглянемо перехід між глобальними сферичними функціями і СТНА-функціями на довільній сферичній трапеції. Розклад глобальної сферичної функції в ряд за СТНА-функціями має наступний вигляд:

$$P_{nm}(\cos \theta) \frac{\cos m \lambda}{\sin m \lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^k (A_{k\mu}^{n,m,c(s)} \cos\left(2\pi\mu \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) +$$

$$+ B_{k\mu}^{n,m,c(s)} \sin\left(2\pi\mu \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)) P_{k\mu}(\theta).$$
 (28)

Розкладемо в ряд (28) глобальну сферичну функцію $P_{22}(\cos \theta) \cos(2\lambda)$ на сферичній трапеції з координатами вершин $\theta_{min} = 20^\circ$, $\theta_{max} = 70^\circ$, $\lambda_{min} = 30^\circ$, $\lambda_{max} = 50^\circ$ до 4 степеня/порядку методом найменших квадратів. Після обчислення невідомих коефіцієнтів розкладу $A_{k\mu}^{2,2,c}$ та $B_{k\mu}^{2,2,c}$ отримано модель і встановлено, що похибка розкладу склала менше 5%. На рисунку 6 зображено функцію $P_{22}(\cos \theta) \cos(2\lambda)$, її СТНА-модель та їх різниця на відповідній сферичній трапеції.

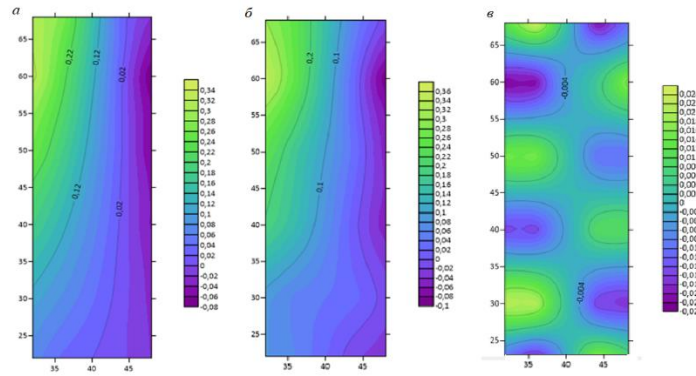


Рис. 6. Глобальна сферична функція $P_{22}(\cos \theta) \cos(2\lambda)$ (а); її STNA-модель (б) та їх різниця (в)

Розрізнявальна здатність моделі гравітаційного поля Землі, побудованої з використанням сферичних функцій – це оцінка найменшої репрезентативної особливості даного поля, яка може бути отримана з використанням моделі. Розрізнявальна здатність може бути виражена за допомогою найкоротшої напівхвилі $\frac{\lambda}{2}$ (сферичної відстані), яка досягається у випадку використання $(n_{max} + 1)^2$ коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm} , де n_{max} – максимальний порядок моделі. Точне значення розрізнявальної здатності глобальної моделі можна знайти за формулою:

$$\frac{\lambda}{2} = 4 \arcsin\left(\frac{1}{n_{max}+1}\right). \quad (29)$$

Для знаходження розрізнявальної здатності STNA-моделі розділимо поверхню сферичної трапеції p на рівновеликі частини A_{min} , кількість яких збігатиметься з кількістю коефіцієнтів $(k_{max} + 1)^2$. Тоді площа таких частин $S_{A_{min}}$ буде рівна

$$S_{A_{min}} = \frac{p}{(k_{max}+1)^2}. \quad (30)$$

Виразивши площу сегменту сфери через центральний кут θ , отримаємо

$$\theta = \arccos\left(1 - \frac{s}{2\pi}\right). \quad (31)$$

Знаючи рівняння діаметру сферичного сегменту $D = \frac{\lambda}{2} = 2R\theta$ і комбінуючи (30) та (31), остаточно отримаємо

$$\frac{\lambda}{2} = 2 \arccos\left(1 - \frac{p}{2\pi(k_{max}+1)^2}\right). \quad (32)$$

Доцільно знайти залежність максимального порядку STNA-моделі від максимального порядку глобальної моделі та площі досліджуваного регіону. Використавши формули (29) та (32), отримаємо:

$$k_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{\pi}} (n_{max} + 1) - 1. \quad (33)$$

Для прикладу, на рисунку (7) проілюстрована залежність (33) для регіонів з площами, еквівалентними площам Львівської області (синя крива) та України (червона крива).

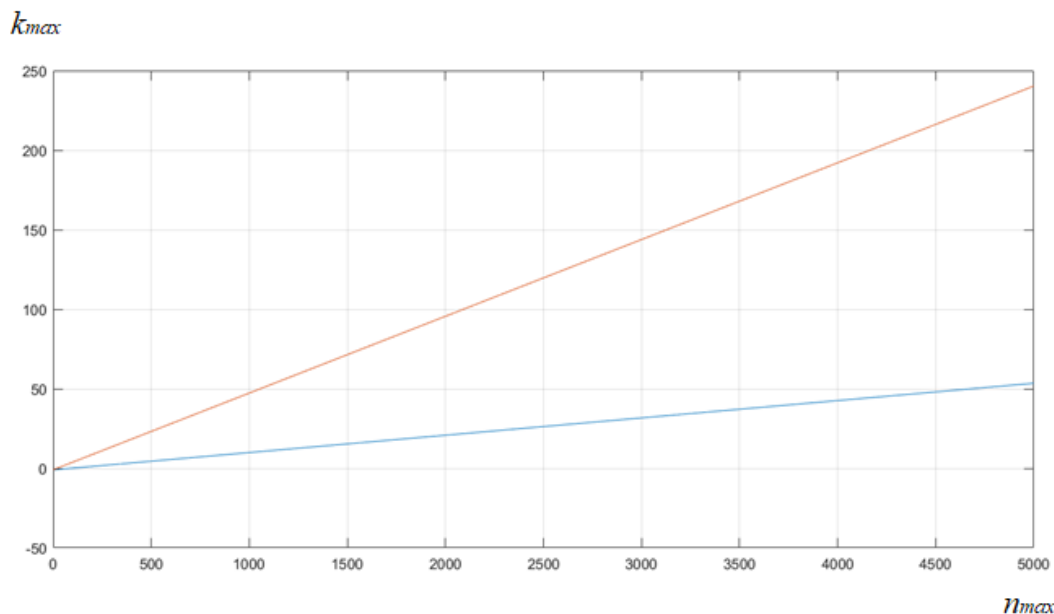


Рис. 7. Залежність максимального порядку STHA-моделі і глобальної моделі та площі на прикладі площі Львівської області (синя крива) та України (червона крива)

У третьому розділі “Побудова моделі геоїда з використанням STHA-функцій” обґрунтовано можливість використання STHA-функцій для моделювання регіонального гравітаційного поля Землі. Досліджено можливість застосування STHA-поліномів для обчислення аналітичної коваріаційної функції. Обчислено високоточну STHA-модель геоїда на територію Вінницької та Одеської областей та виконано оцінку точності отриманої моделі з використанням даних GNSS-нівелювання.

Для можливості моделювання регіонального гравітаційного поля STHA-функціями необхідно розкласти трансформанти даного поля в ряд за цими функціями. Розкладемо збудувальний потенціал T регіонального гравітаційного поля (в даному випадку обмеженого сферичною трапецією з координатами вершин θ_{min} , θ_{max} , λ_{min} , λ_{max}) в ряд за STHA-функціями:

$$T(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{r} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k(m)} \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}_{km}(\theta), \quad (34)$$

де k_{max} – максимальний порядок моделі, \bar{C}_{km} , \bar{S}_{km} – нормовані коефіцієнти, GM – гравітаційна стала, R – середній радіус Землі.

Розклад відхилень прямовисних ліній в ряд за STHA-функціями матиме вигляд:

$$\xi(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k(m)} \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}'_{km}(\theta),$$

$$\eta(r, \theta, \lambda) = -\frac{2\pi}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \frac{GM}{\gamma r^2} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k(m)} m \left\{ -\bar{C}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \frac{\bar{P}_{km}(\theta)}{\sin \theta}. \quad (35)$$

Розклад елементів тензору градієнтів геопотенціалу V в ряд за СТНА-функціями описується формулами:

$$V_{rr}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k (n_k + 1)(n_k + 2) \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+3} \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}_{km}(\theta), \quad (36a)$$

$$V_{r\theta}(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{R^2} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k (n_k + 1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}'_{km}(\theta), \quad (36b)$$

$$V_{r\lambda}(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{R^2} \frac{2\pi}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k (n_k + 1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+2} m \left\{ -\bar{C}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}_{km}(\theta), \quad (3.3b)$$

$$V_{\theta\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+1} \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}''_{km}(\theta), \quad (36g)$$

$$V_{\theta\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \frac{2\pi}{\lambda_{max} - \lambda_{min}} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+1} m \left\{ -\bar{C}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}'_{km}(\theta), \quad (36g)$$

$$V_{\lambda\lambda}(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{R} \frac{4\pi^2}{(\lambda_{max} - \lambda_{min})^2} \sum_{k=0}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{R}{r}\right)^{n_k+1} m^2 \left\{ \bar{C}_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + \bar{S}_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) \right\} \bar{P}_{km}(\theta). \quad (36d)$$

На рисунку 8 подано загальну блок-схему моделювання регіонального гравітаційного поля Землі СТНА-методом з використанням різномірної інформації. Цифри у даній блок-схемі позначають наступне:

- 1) встановлення координат вершин рамки досліджуваної трапеції;
- 2) обчислення величин θ_0 та θ_{mean} ;
- 3) обчислення систематичної складової з використанням глобальної гравітаційної моделі;
- 4) приведення вхідних даних одного типу, який не був використаний при побудові моделі, на рівномірну сітку;

- 5) виконання процедури «Вилучення»;
- 6) обчислення коефіцієнтів СТНА-моделі ;
- 7) перевірка на наявність вхідних даних типу, який ще не був використаний;
- 8) обчислення модельних значень для операції «Вилучення»;
- 9) проведення процедури «Відновлення».

Знайдемо взаємозв'язок між СТНА-методом та методом середньої квадратичної колокації (СКК). З теорії сучасної фізичної геодезії добре відомо, що існує чіткий зв'язок між коефіцієнтами розкладу аналітичної коваріаційної функції (АКФ) в ряд за поліномами Лежандра та коефіцієнтами розкладу в ряд гравітаційного потенціалу за сферичними функціями Лежандра. Представимо локальну АКФ СТНА-поліномами.

Оптимальним шляхом представлення локальної (АКФ) між точками P та Q є її розклад в ряд за поліномами Лежандра:

$$\tilde{K}(P, Q) = \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} \tilde{k}_n \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\cos\psi), \quad (37)$$

де R – середній радіус Землі, ψ – сферична відстань між біжучими точками P та Q , r та r' – сферичні координати точок P та Q відповідно, P_n – поліноми Лежандра, \tilde{k}_n – коефіцієнти розкладу.

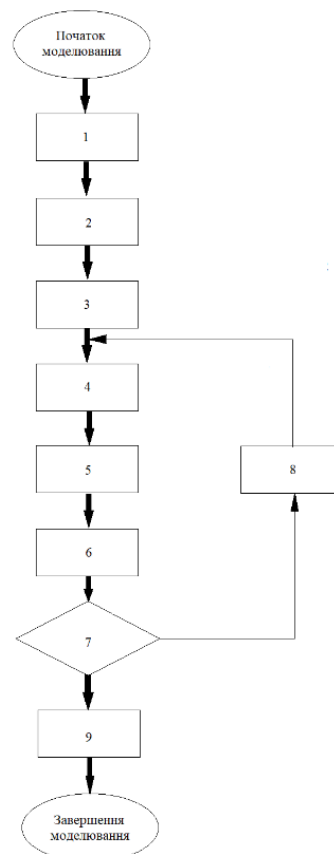


Рис. 8. Загальна блок-схема моделювання регіонального гравітаційного поля Землі СТНА-методом з використанням різнорідної інформації

Для визначення коефіцієнтів \tilde{k}_n використовують відому модель Чернінга-Раппа:

$$\tilde{k}_n = \frac{A}{(n-1)(n-2)(n+B)} s^{n+2}, \quad (38)$$

а s задається формулою $s = \frac{R_B^2}{R^2}$, де R_B – сфера Б'єрхаммара.

В моделі Чернінга-Раппа невідомими слугують чотири параметри: N_{max} , A , B та s . Їх визначають методом підбору на основі емпіричної коваріаційної функції (ЕКФ).

Зазвичай за функцію відтворюючого ядра приймають коваріаційну функцію збурювального потенціалу $K(P, Q)$:

$$K(P, Q) = \sum_{n=N_{max}+1}^{\infty} k_n \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+1} P_n(\cos\psi). \quad (39)$$

Практично всі трансформанти гравітаційного потенціалу можна представити через функцію збурювального потенціалу з використанням лінійних функціоналів. В такому випадку довільна коваріаційна функція C може бути представлена як

$$C_{ij}(P, Q) = L_i^P L_j^Q K(P, Q), \quad (40)$$

де L_i^P – i -ий лінійний функціонал в точці P , L_j^Q – j -ий лінійний функціонал в точці Q .

Для розкладу коваріаційних функцій в ряд за СТНА-поліномами спершу задамо жорстку умову $\theta_{min} = 0$. В такому випадку функцію відтворюючого ядра (коваріаційну функцію збурювального потенціалу) $K(P, Q)$ запишемо як

$$K(P, Q) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi). \quad (41)$$

Коефіцієнти розкладу в ряд коваріаційної функції висот геоїда \tilde{k}_l можна знайти за формулою

$$k_l = \gamma_0^2 \tilde{k}_l. \quad (42)$$

Формули для знаходження коваріаційних функцій $cov[T(P), \Delta g(Q)]$ та $cov[\Delta g(P), \Delta g(Q)]$ набудуть вигляду:

$$\tilde{C}(P, Q) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} \frac{n_l-1}{r'} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi), \quad (43)$$

$$C(P, Q) = \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} \frac{(n_l-1)^2}{rr'} k_l \left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n_l+1} P_{n_l}(\cos\psi).$$

Обчислення коефіцієнтів коваріаційної функції збурювального потенціалу також можливе з використанням моделі Чернінга-Раппа у наступній редакції:

$$k_l = \frac{A}{(n_l-1)(n_l-2)(n_l+B)} s^{n_l+2}. \quad (44)$$

Для апробації запропонованого алгоритму знайдено коваріаційні функції $cov[T(P), T(Q)]$, $cov[N(P), N(Q)]$, $cov[T(P), \Delta g(Q)]$ та $cov[\Delta g(P), \Delta g(Q)]$ за моделлю Чернінга-Раппа з використанням поліномів Лежандра та СТНА-поліномів за ЕКФ, побудованою на основі гравітаційних аномалій із WGM2012 на територію Львівської області. У випадку поліномів Лежандра розклад в ряд відбувався від 361 до 600 порядку, в той час як у випадку СТНА-поліномів – від 3 до 8 порядку. Параметри при використанні СТНА-поліномів наступні: $A =$

129855.6, $B=24$, $s = 0.9997$. На рисунку 9 відображено отримані коваріаційні функції.

Для апробації запропонованого СТНА-методу виконаємо обчислення високоточної моделі геоїда на території Вінницької та Одеської областей. Вибір даного регіону зумовлений розширенням територіального покриття GNSS-мережею перманентних станцій «GeoTerrace» для створення єдиного навігаційного поля у південно-західному транскордонному секторі України. Однією з головних задач для забезпечення потреб мережі «GeoTerrace» на території Вінницької та Одеської областей є отримання високоточної поверхні геоїда в даному регіоні.

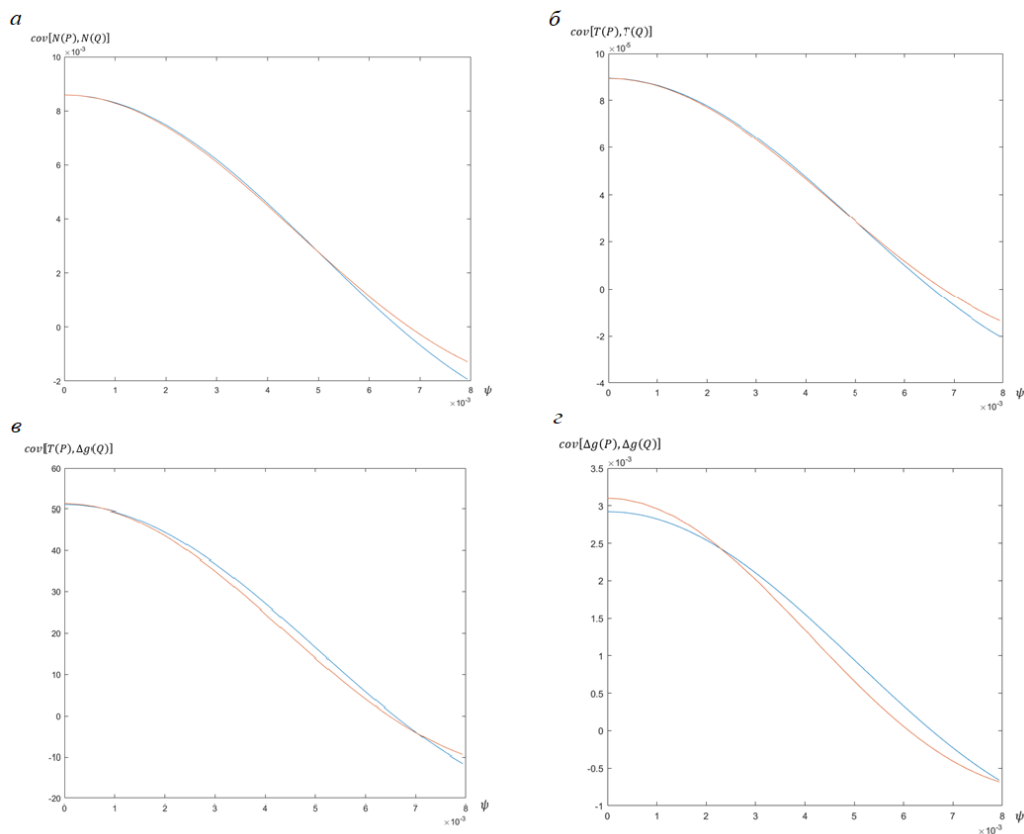


Рис. 9. Коваріаційна функція, розкладена в ряд за поліномами Лежандра (синя крива) та СТНА-поліномами (червона крива):
 а) $cov[N(P), N(Q)]$, $[m^2]$; б) $cov[T(P), T(Q)]$, $[m^2 \cdot mGal^2]$;
 в) $cov[T(P), \Delta g(Q)]$, $[m \cdot mGal^2]$; г) $cov[\Delta g(P), \Delta g(Q)]$, $[mGal^2]$

Для побудови високоточної поверхні геоїда на регіон Одеської та Вінницької областей використано ряд різномірної інформації, а саме:

- гравітаційні аномалії Δg , отримані після бракування за критерієм 3σ результатів дигіталізації гравіметричних карт масштабу 1:200 000;
- трансформанти гравітаційного поля Землі із глобальної гравітаційної моделі EGM2008;
- дані GNSS-нівелювання.

Карта гравітаційних аномалій Δg , отриманих в результаті дигіталізації гравіметричних карт масштабу 1:200 000, зображена на рис. 10.

Для надійного визначення висот геоїда необхідно, щоб досліджуваний регіон (сферична трапеція) був повністю і рівномірно покритий вхідними даними. Тому в місцях, де гравітаційні аномалії Δg представлено в недостатній кількості (здебільшого акваторія Чорного моря), використано аномалії, обчислені з моделі глобального гравітаційного поля Землі EGM2008.

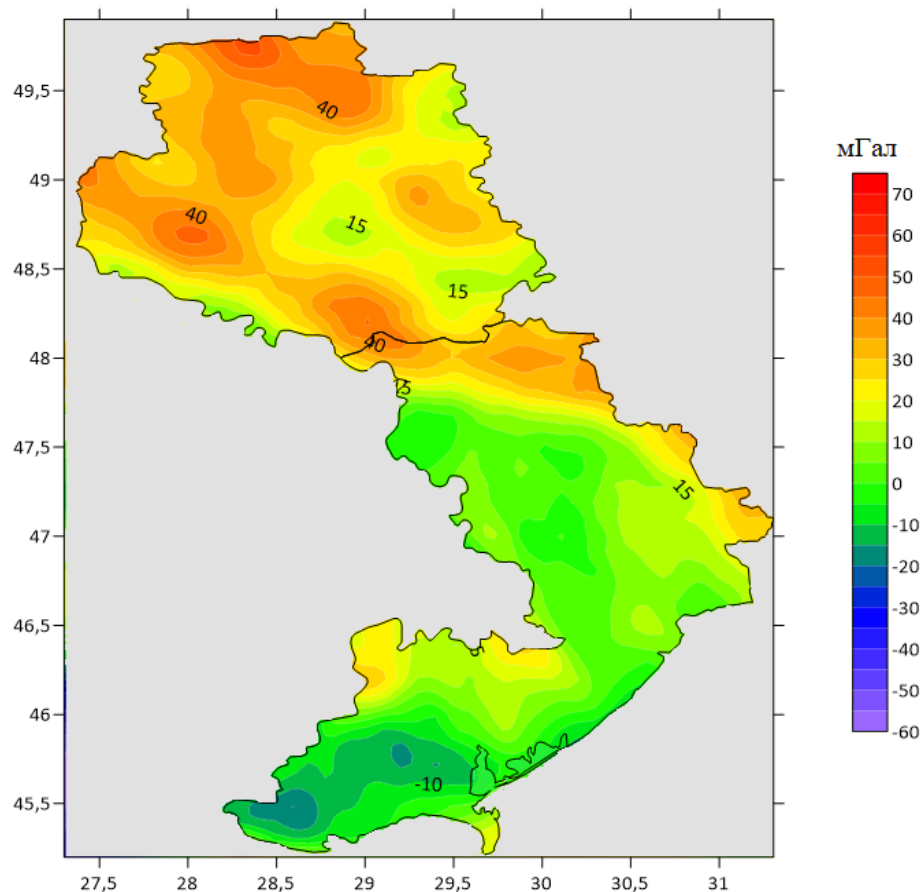


Рис. 10. Карта гравітаційних аномалій Δg , отриманих в результаті дигіталізації гравіметричних карт масштабу 1:200 000

Для побудови поверхні геоїда в межах процедури «Вилучення-Обчислення-Відновлення» побудовано як систематичну складову гравітаційні аномалії $\Delta g_{сис}$ та внесок висот геоїда $N_{сис}$, що відповідає довгохвильовим особливостям гравітаційного поля, за глобальною моделлю гравітаційного поля Землі EGM2008 до 360 степеня/порядку.

Для побудови високоточної моделі геоїда використовувалися дані із GNSS-нівелювання на пунктах висотної Державної Геодезичної Мережі. Цей набір даних налічував 485 пунктів, із яких 184 – I класу, 82 – II класу та 219 – III класу (рис. 11).

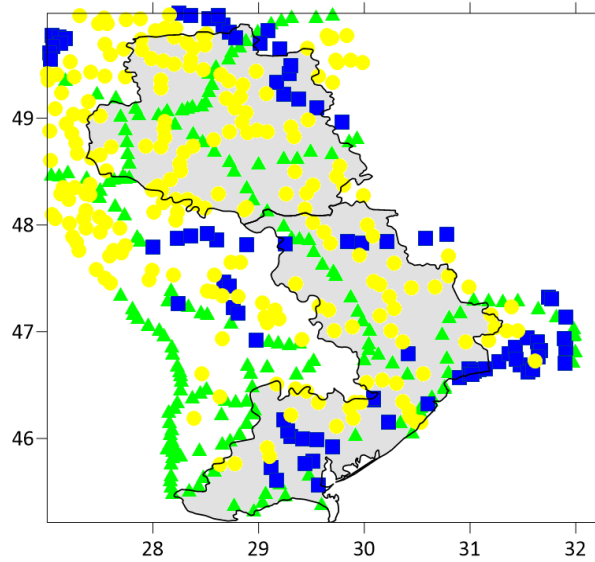


Рис. 11. Набір пунктів GNSS-нівелювання: I клас (зелені трикутники), II клас (сині квадрати) та III клас (жовті круги)

Для обчислення моделі геоїда спершу знайдено залишкові різниці $\Delta g_{зал}$ між гравітаційними аномаліями, отриманими в результаті дигіталізації гравіметричних карт, та гравітаційними аномаліями за моделлю EGM2008 до 360 степеня/порядку. Різниці $\Delta g_{зал}$ показано на рис. 12.

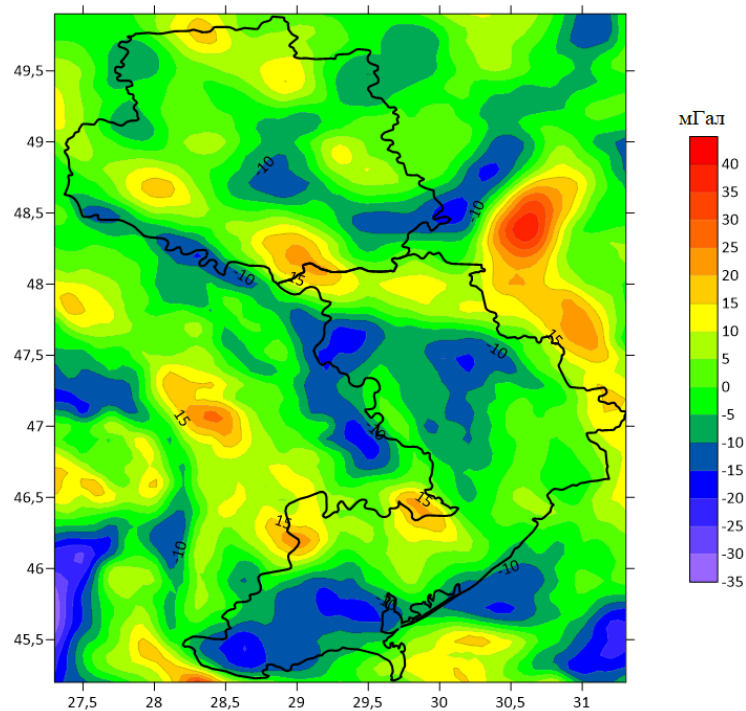


Рис. 12. Залишкові різниці гравітаційних аномалій $\Delta g_{зал}$

Використовуючи спосіб найменших квадратів, обчислюємо модель залишкових значень висот геоїда $N_{зал}$ до 12 степеня/порядку. В таблиці 1 показано власні числа n_k базових функцій, а на рисунку 13 зображено модель залишкових значень висот геоїда.

Власні числа n_k базових функцій

k/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0.0												
1	58.1	44.4											
2	92.9	92.9	74.0										
3	134.1	129.5	124.7	101.9									
4	170.5	170.5	163.0	155.1	129.2								
5	210.5	207.6	204.7	194.9	184.5	155.9							
6	247.5	247.5	242.6	237.5	225.8	213.4	182.4						
7	287.0	284.9	282.8	276.1	269.3	256.0	241.8	208.7					
8	324.3	324.3	320.6	316.8	308.7	300.3	285.6	269.8	234.8				
9	363.5	361.9	360.2	355.1	349.9	340.5	330.8	314.8	297.6	260.7			
10	401.1	401.1	398.1	395.1	388.7	382.3	371.8	360.9	343.7	325.1	286.5		
11	440.1	438.7	437.4	433.2	429.0	421.6	414.1	402.5	390.5	372.2	400.6	312.3	
12	477.8	477.8	475.2	472.7	467.5	462.3	453.9	445.4	432.9	419.9	703.8	379.7	889.0

Моделі геоїда здебільшого характеризуються мінімальним, максимальним, середнім та стандартним відхиленням. Всі вище перелічені статистики обраховано для моделі геоїда EGM2008 до 360 степеня/порядку $N_{сис}$, моделі залишкових значень висот геоїда $N_{зал}$ та моделі висот гравіметричного геоїда $N_{мод}$. Результати показано в таблиці 2.

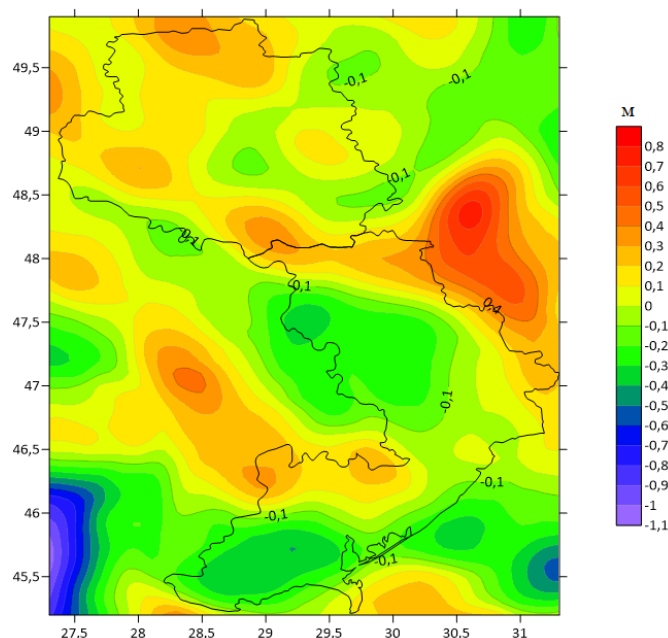


Рис. 13. Модель залишкових значень висот геоїда $N_{зал}$

Наступним етапом здійснили «Відновлення» моделі геоїда, яка зображена на рис. 14.

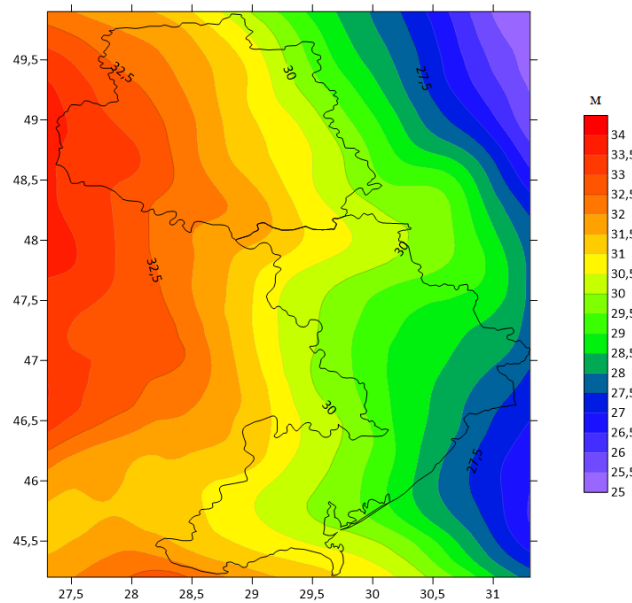


Рис. 14. Модель висот гравіметричного геоїда $N_{\text{мод}}$

Таблиця 2

Основні статистики моделей геоїда

Модель	Мінімальне відхилення, м	Максимальне відхилення, м	Середнє відхилення, м	Стандартне відхилення, м
$N_{\text{сис}}$	25.141	33.518	30.364	1.949
$N_{\text{зал}}$	-1.056	0.749	0.006	0.232
$N_{\text{мод}}$	25.054	33.730	30.370	1.980

Зазвичай в різницях між гравіметричним та геометричним геоїдами присутня значна систематична складова. Добре відомо, що для території Європи в середньому така різниця складає по абсолютній величині близько пів метра. В нашому випадку в середньому різниця між гравіметричним та геометричним геоїдами склала $\Delta N = -0.390$ м. Стандартне відхилення між модельними значеннями висоти геоїда та значеннями, отриманими із GNSS-нівелювання на пунктах ДГМ, склало ≈ 2.1 см.

Отриману модель геоїда переобчислено на еліпсоїд Красовського. Отже, модель геоїда відносно еліпсоїда Красовського на територію Вінницької та Одеської областей зображена на рис. 15.

Зазначимо, що висоти геоїда загалом для території України, в тому числі для території Вінницької та Одеської областей, є значно меншими відносно еліпсоїда Красовського у порівнянні з еліпсоїдом GRS-80. Висоти геоїда відносно еліпсоїда Красовського коливаються в межах від +0.8 м (південний схід Одеської області), до +3.6 м (захід Вінницької області). Висоти геоїда над еліпсоїдом GRS-80 коливаються у межах від +28 до +33 м.

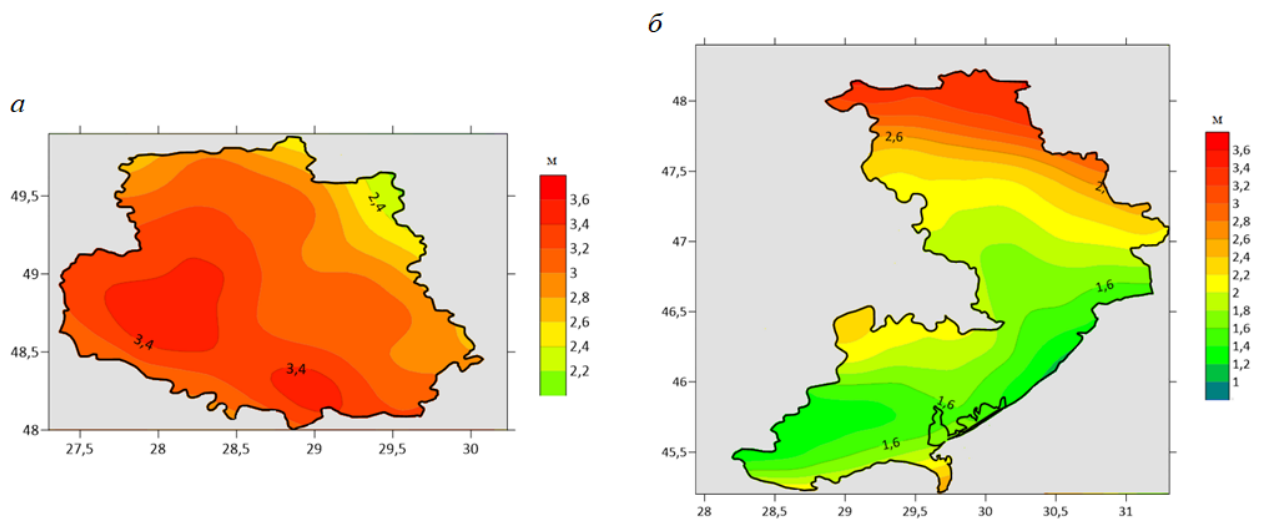


Рис. 15. Модель геоїда відносно еліпсоїда Красовського на територію: а) Вінницької області; б) Одеської області

У четвертому розділі “**Використання СТНА-функцій для моделювання магнітного поля Землі та параметру іоносфери VTEC**” здійснено апробацію запропонованого методу шляхом моделювання магнітного поля Землі та обчислення моделі параметру іоносфери VTEC. Обчислено регіональну (SNA+STNA)-модель магнітного поля Землі, а також з використанням тих самих вхідних даних – широко використовувану регіональну (SNA+SCHА)-модель магнітного поля Землі, та виконано їх порівняння. Побудовано просторово-часову СТНА-модель параметру іоносфери VTEC та виконано її порівняння із моделлю GIM, яку взято із Міжнародної GNSS-служби.

Обчислення моделі регіонального магнітного поля з використанням процедури „Вилучення-Обчислення-Відновлення” передбачає наступні кроки:

1) знаходження систематичної складової компонент X_m , Y_m , Z_m , використовуючи деяку глобальну модель магнітного поля;

2) обчислення аномальних значень компонент ΔX , ΔY , ΔZ за формулою

$$\begin{aligned} \Delta X &= X - X_m, \\ \Delta Y &= Y - Y_m, \\ \Delta Z &= Z - Z_m. \end{aligned} \quad (45)$$

3) знаходження в межах процедури „Обчислення” невідомих коефіцієнтів моделі регіонального магнітного поля з використанням відповідних базових функцій;

4) для знаходження невідомих коефіцієнтів моделі використовують спосіб найменших квадратів, стабілізувавши розв’язок введенням параметру регуляризації Тіхонова α : $V^T V + \alpha \tilde{X}^T \tilde{X} \rightarrow \min$;

5) обчислення з використанням визначених коефіцієнтів модельних значень аномальних компонент ΔX_m , ΔY_m , ΔZ_m ;

б) обчислення в межах процедури „Відновлення” суми глобальної і отриманої регіональної моделі $(X_m + \Delta X_m)$, $(Y_m + \Delta Y_m)$, $(Z_m + \Delta Z_m)$.

Геомагнітний потенціал V , розкладений в ряд за СТНА-функціями, можна записати в наступному вигляді:

$$V(r, \theta, \lambda) = a \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+1} \cdot \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) \right\} P_{km}(\theta). \quad (46)$$

Знаючи формули похідних СТНА-функцій (26), знайдемо формули для розкладу компонент геомагнітного поля $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ в ряд за СТНА-функціями:

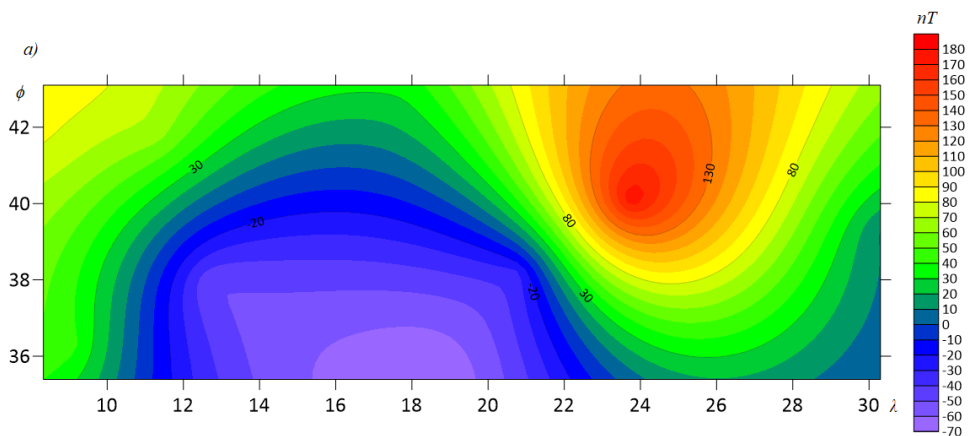
$$\begin{aligned} \Delta X_m &= \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \cdot \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) \right\} P'_{km}(\theta); \\ \Delta Y_m &= -\frac{2\pi}{\lambda_2-\lambda_1} \sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \cdot m \cdot \left\{ -C_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) + S_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) \right\} \frac{P_{km}(\theta)}{\sin(\theta)}; \\ \Delta Z_m &= -\sum_{k=1}^{k_{max}} \sum_{m=0}^k \left(\frac{a}{r}\right)^{n_k+2} \cdot (n_k + 1) \cdot \left\{ C_{km} \cos\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) + S_{km} \sin\left(2\pi m \frac{\lambda-\lambda_{min}}{\lambda_{max}-\lambda_{min}}\right) \right\} P_{km}(\theta). \end{aligned} \quad (47)$$

Для порівняння ефективності СТНА та ССНА методів обчислимо регіональну модель магнітного поля Землі на територію Центральної Європи. Для цього в якості вхідних даних використано виміри компонентів геомагнітного поля із 9-ти геомагнітних обсерваторій: BEL, BFO, FUR, HLP, KIV, LVV, NGK, THY, WNG, приведених на епоху 2010.0. Як систематичну складову в рамках процедури «Вилучення» в обох випадках використано глобальну модель магнітного поля Землі IGRF.

Після здійснення процедури «Вилучення» отримаємо аномальні значення компонент магнітного поля $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$:

$$\begin{aligned} \Delta X &= X - X_{IGRF}, \\ \Delta Y &= Y - Y_{IGRF}, \\ \Delta Z &= Z - Z_{IGRF}. \end{aligned} \quad (48)$$

З використанням аномальних значень компонент магнітного поля $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ за допомогою методу найменших квадратів обчислено невідомі коефіцієнти СТНА-моделі до 2 степеня/порядку. На рис. 16 зображено отриману СТНА-модель аномальних значень компонент регіонального магнітного поля Землі.



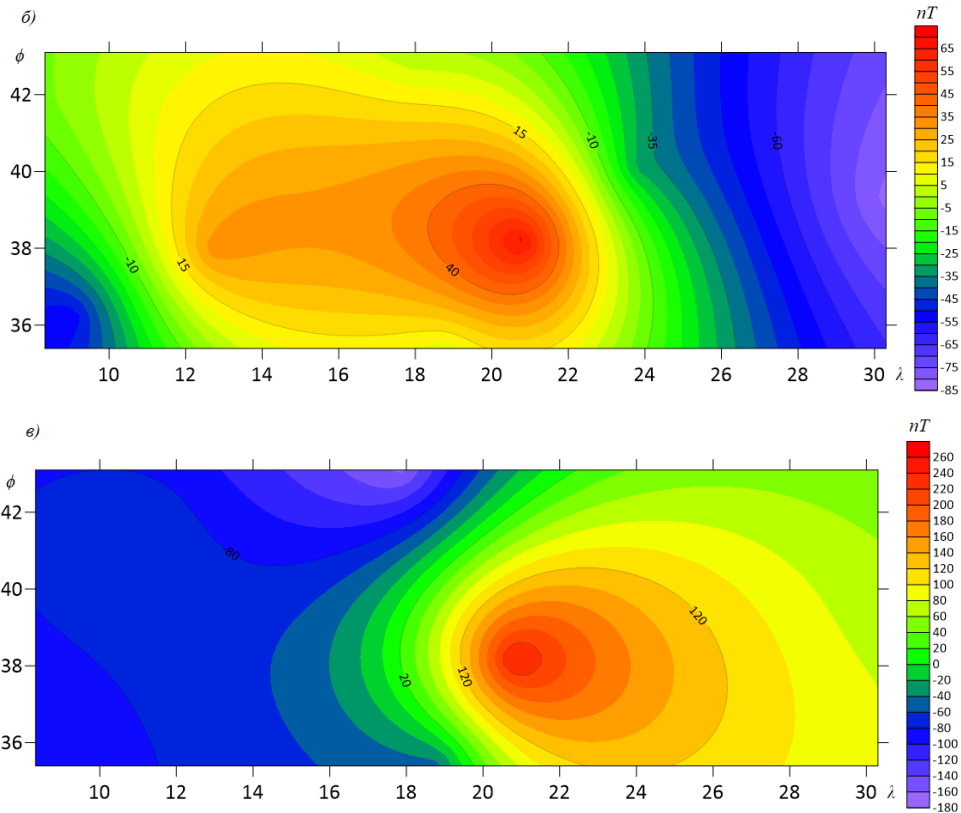


Рис. 16. СТНА-модель аномальних значень компонент регіонального магнітного поля Землі: а) ΔX_m , б) ΔY_m , в) ΔZ_m

Наступним етапом наших досліджень стала побудова SCNA-моделі аномальних значень компонент регіонального магнітного поля Землі до 2 степеня/порядку. Для цього спершу виконано трансформацію аномальних значень компонент магнітного поля $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$. Далі за допомогою методу найменших квадратів обчислено невідомі коефіцієнти SCNA-моделі.

Для оцінки точності отриманих моделей обчислено різниці між аномальними значеннями компонент геомагнітного поля $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ та їх модельними значеннями $\Delta X_m, \Delta Y_m, \Delta Z_m$:

$$\begin{aligned} \delta\Delta X &= \Delta X - \Delta X_m, \\ \delta\Delta Y &= \Delta Y - \Delta Y_m, \\ \delta\Delta Z &= \Delta Z - \Delta Z_m. \end{aligned} \quad (49)$$

Встановлено, що СТНА-модель аномальних значень компонент регіонального магнітного поля Землі до 2 степеня/порядку має вищу розрізнявальну здатність аніж відповідна SCNA-модель. Емпіричним шляхом встановлено, що для досліджуваного регіону СТНА-модель другого порядку по точності відповідає SCNA-моделі 4-го порядку.

Для всіх вищеописаних геомагнітних полів обчислено їхні основні характеристики, такі як мінімальне та максимальне значення і стандартне відхилення. Ці характеристики відображено в таблиці 3.

Таблиця 3

Основні характеристики розглянутих геомагнітних полів

	Мінімальне значення, нТ	Максимальне значення, нТ	Стандартне відхилення, нТ
ΔX	-84	195	101
ΔY	-95	89	56
ΔZ	-144	298	133
STHA-модель другого порядку			
ΔX_m	-69	178	78
ΔY_m	-82	67	42
ΔZ_m	-165	248	123
$\delta\Delta X$	-32	62	30
$\delta\Delta Y$	-42	32	21
$\delta\Delta Z$	-28	50	25
SCHA-модель другого порядку			
ΔX_m	-51	124	62
ΔY_m	-57	46	28
ΔZ_m	-144	195	98
$\delta\Delta X$	-45	80	41
$\delta\Delta Y$	-55	46	35
$\delta\Delta Z$	-48	74	46
SCHA-модель четвертого порядку			
ΔX_m	-67	181	79
ΔY_m	-82	70	40
ΔZ_m	-161	247	124
$\delta\Delta X$	-30	60	33
$\delta\Delta Y$	-42	31	22
$\delta\Delta Z$	-29	52	22

Із аналізу таблиці (3) встановлено, що СТНА-модель 2 степеня/порядку має значно вищу розрізнявальну здатність, аніж відповідна ССНА-модель того ж порядку. СТНА-модель 2-го порядку по точності відповідає ССНА-модель 4-го порядку. Крім того, для обчислення та подальшого використання ССНА-моделі над координатами всіх вхідних та вихідних точок необхідно виконати операцію трансформування. Відповідно використання запропонованого СТНА-методу для моделювання регіонального магнітного поля Землі дозволить уникнути трансформації вхідних та вихідних даних і приведе до оптимізації обчислювального процесу у порівнянні із ССНА-методом.

Наступним етапом наших досліджень є обчислення кута магнітного схилення D за отриманою (SHA+СТНА)-моделлю регіонального магнітного поля Землі та порівняння отриманих результатів із даними з геомагнітних обсерваторій. Формула для обчислення D має вигляд:

$$D = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}. \quad (50)$$

На рисунку 17 зображено кут магнітного схилення $D_{\text{мод}}$ за отриманою (SHA+СТНА)-моделлю. Зауважимо, що карта кута магнітного схилення $D_{\text{обс}}$, отримана за даними з геомагнітних обсерваторій, в даному масштабі візуально не відрізняється від карти на рисунку 17, тому її не приводиться.

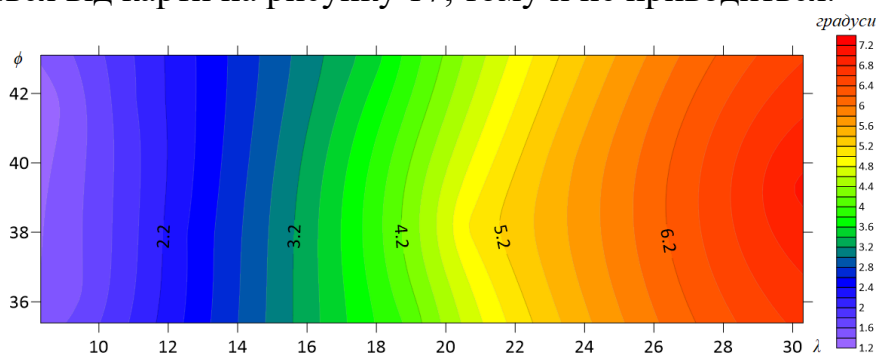


Рис. 17. Кут магнітного схилення D за отриманою (SHA+СТНА)-моделлю

Різницю між величиною кута магнітного схилення за даними з геомагнітних обсерваторій $D_{\text{обс}}$ та за (SHA+СТНА)-моделлю $D_{\text{мод}}$ позначимо як ΔD :

$$\Delta D = D_{\text{обс}} - D_{\text{мод}}. \quad (51)$$

Різницю ΔD в хвилинах показано на рисунку 18.

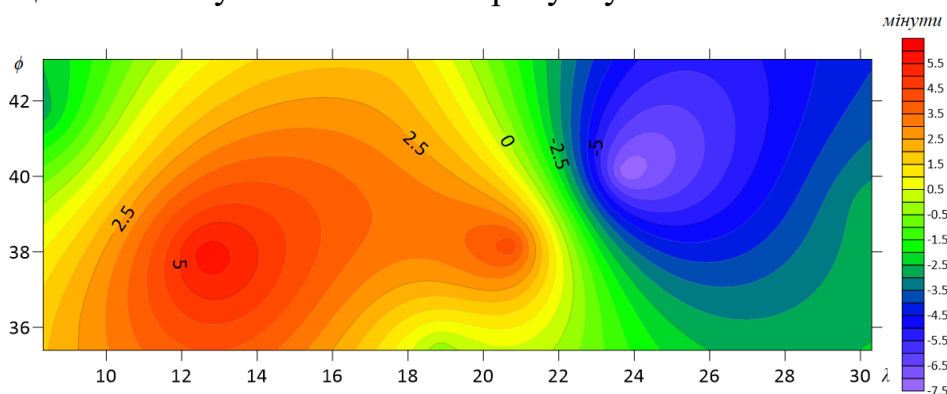


Рис. 18. Різниця між величиною кута магнітного схилення за даними з геомагнітних обсерваторій та за (SHA+СТНА)-моделлю

Максимальне відхилення між величиною кута магнітного схилення за даними з геомагнітних обсерваторій та за (SHA+STHA)-моделлю склало $\pm 5.5'$. Така точність дозволяє використовувати кут магнітного схилення, отриманий із (SHA+STHA)-моделі, при проведенні відповідних геодезичних робіт.

У галузевій науково-дослідній лабораторії ГНДЛ-93 кафедри ВГА НУ «Львівська політехніка» виконано роботу із акумуляції, перетворення і опрацювання «сирих» спостережень із мережі GNSS-станцій України за тривалий період часу. Із використанням програмного продукту, створеного в цій лабораторії для отримання просторового розподілу вертикального і похилого ТЕС, реалізовано алгоритм багатостанційної обробки GNSS-вимірів з використанням мережі активних референцних станцій Західного регіону України, які працюють під управлінням спеціалізованого програмного забезпечення у режимі реального часу для забезпечення широкого кола користувачів послугами геодезичного спрямування. Для ефективного використання визначеного на мережі GNSS-станцій параметру іоносфери *VTEC* необхідно побудувати апроксимаційну просторово-часову модель параметру *VTEC* в регіональному масштабі.

В якості вхідної інформації взято дані із 19 GNSS-станцій, розміщених у західній частині України (схема розміщення GNSS-станцій зображена на рисунку 19).

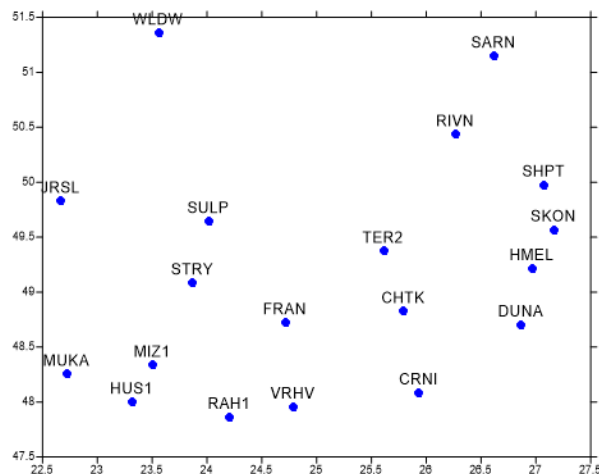


Рис. 19. Схема розміщення GNSS-станцій

Оскільки на кожен станцію надходять дані кожних 15 секунд, було проведено фільтрацію і усереднення цих даних. Тож ми отримали значення параметру *VTEC* для кожної станції на 6 епох протягом однієї доби.

Для побудови просторово-часової моделі параметру *VTEC* обчислено просторові моделі для кожної епохи, після чого отримані коефіцієнти a_{km} і b_{km} розклали в ряд за степеневими поліномами:

$$\begin{aligned}
 a_{km}(t) &= \sum_{i=0}^{i_{max}} a_{kmi} t^i; \\
 b_{km}(t) &= \sum_{i=0}^{i_{max}} b_{kmi} t^i.
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

Таким чином просторово-часова модель $VTEC_m$ має вигляд:

$$VTEC_m(\theta, \lambda, t) = \sum_{k=0}^4 \sum_{m=0}^k (a_{km}(t) \cos\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right) + b_{km}(t) \sin\left(2\pi m \frac{\lambda - \lambda_{min}}{\lambda_{max} - \lambda_{min}}\right)) P_{km}(\theta). \quad (53)$$

Координати вершин досліджуваної трапеції у сферичній системі координат рівні $\theta_{min} = 38.6^{\circ}$, $\theta_{max} = 42.2^{\circ}$, $\lambda_{min} = 22.6^{\circ}$, $\lambda_{max} = 27.2^{\circ}$.

Різниці між вимірними та модельними значеннями параметру $VTEC$ подано на рис. 20.

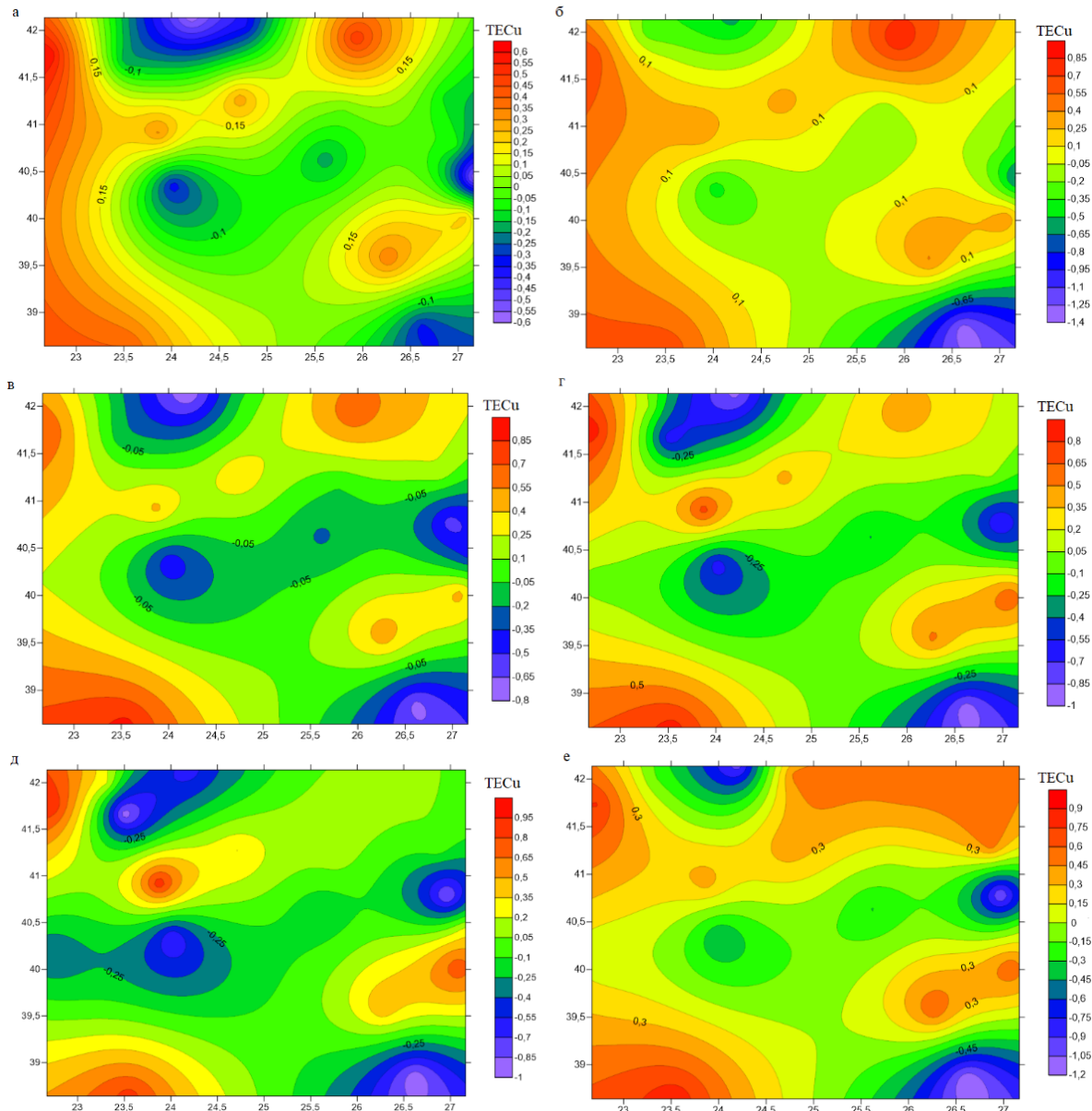


Рис. 20. Карта різниць між обчисленими та модельними значеннями параметра іоносфери $VTEC$ на а – 0 годину, б – 4 годину, в – 8 годину, г – 12 годину, д – 16 годину, е – 20 годину

Для оцінки точності отриманої моделі було обчислено середню квадратичну похибку моделі m за формулою

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p \Delta_i^2}{p}}, \quad (54)$$

де Δ – різниця між обчисленим і модельним значенням показника $VTEC$, p – кількість всіх значень показника $VTEC$, а також її порівняно з незалежними даними. Середня квадратична похибка за внутрішньою збіжністю склала $m = 0.21 \text{ TECu}$.

Отримані результати також порівняно із моделлю GIM, яку взято із Міжнародної GNSS-служби. В цьому випадку середнє квадратичне відхилення склало 1.05 TECu . Це свідчить про надійність отриманої нами моделі.

Зауважимо, що на основі порівняння різних методів моделювання параметру $VTEC$ можна констатувати, що найкращу точність показують методи В-сплайнів, крігінгу і SCNA. Перші два методи відносяться до групи непараметричних або напівпараметричних, тоді як SCNA, і пропонуваній нами STNA – це параметричний метод. Параметричні методи мають переваги в тому, що дозволяють відкидати грубі похибки вимірів без попередньої фільтрації вхідних даних, використовувати суттєво менші набори невідомих коефіцієнтів, гнучко обчислювати просторово-часові моделі через розклад в ряд обчислених просторових коефіцієнтів тощо. Зазначимо, що STNA-метод має переваги над SCNA-методом, оскільки для його використання не потрібно виконувати трансформацію вхідної та вихідної інформації, а також при побудові моделей однакових порядків STNA-модель має значно більшу розрізнявальну здатність.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі виконано комплекс досліджень, який містить теоретичні розробки та практичні рекомендації щодо вирішення важливої науково-прикладної проблеми удосконалення методів побудови регіональних моделей використовуваних в геодезії полів Землі.

Основні наукові та прикладні результати дисертаційної роботи:

1. Теоретично обґрунтовано та експериментально підтверджено ефективність використання запропонованого STNA-методу побудови регіональних полів Землі, в основі якого лежать сферичні функції з дійсними індексами, порівняно з іншими методами. Запропоновано розрахункові формули STNA-функцій через їх розклад в гіпергеометричний ряд, отримано аналітичні формули для знаходження повної норми даних функцій, а також запропоновано алгоритм знаходження кількості нулів STNA-функцій на довільній сферичній трапеції в залежності від їх порядку та степеня.

2. Здійснено адаптацію квадратурних формул Гауса до STNA-функцій, що дозволяє при побудові моделі регіонального поля отримати діагональну матрицю нормальних рівнянь і, відповідно, суттєво скоротити технічні та часові ресурси без втрати точності. Знайдено формулу для обчислення розрізнявальної здатності STNA-моделі, яка залежить як від максимального порядку моделі, так і від розміру досліджуваного регіону. Показано, що точність глобальної моделі 5000 степеня/порядку є еквівалентною точності регіональної STNA-моделі ≈ 55 степеня/порядку для регіону розміром Львівської області та ≈ 240 степеня/порядку для регіону розміром України.

3. Запропоновано приймати СТНА-поліноми як базову систему функцій для представлення локальної аналітичної коваріаційної функції. Після побудови та порівняння ряду коваріаційних та кросковаріаційних функцій з використанням поліномів Лежандра та СТНА-поліномів встановлено, що розбіжність між цими функціями не більше 5%. Такий підхід дасть можливість суттєво зменшити кількість коефіцієнтів розкладу в ряд аналітичної коваріаційної функції та підвищити точність моделі.

4. З використанням запропонованої методики обчислено високоточну СТНА-модель геоїда на території Вінницької та Одеської областей відносно еліпсоїда GRS80 та еліпсоїда Красовського для забезпечення потреб мережі «GeoTerrace». Здійснено оцінку точності отриманої моделі геоїда відносно даних GNSS-нівелювання на 485 пунктах висотної ДГМ. Стандартне відхилення склало ≈ 2.1 см. Рекомендовано використовувати отриману модель геоїда на територію Вінницької та Одеської областей.

5. Із порівняння SCHА та СТНА методів при обчисленні регіональної моделі магнітного поля Землі в межах процедури «Вилучення-Обчислення-Відновлення» на територію Центральної Європи встановлено, що СТНА-модель до 2 степеня/порядку по точності відповідає SCHА-моделі до 4 степеня/порядку, відповідно кількість коефіцієнтів моделі є значно меншою. Також при використанні СТНА-методу на відміну від SCHА-методу немає потреби виконувати трансформування вхідної та вихідної інформації, що є значною перевагою.

6. Максимальне відхилення між величиною кута магнітного схилення за даними з геомагнітних обсерваторій та за (SHA+СТНА)-моделлю склало $\pm 5.5'$. Така точність дозволяє використовувати кут магнітного схилення, отриманий із (SHA+СТНА)-моделі, при проведенні відповідних геодезичних робіт.

7. Обґрунтовано переваги запропонованого СТНА-методу для обчислення моделі параметра *VTEC* в регіональному масштабі. На основі цього методу обчислено просторово-часову апроксимаційну модель параметру іоносфери *VTEC* на 1 добу в регіональному масштабі з використанням СТНА-функцій, отриманого на 19 GNSS-станціях Західного регіону України. Для цього кожен коефіцієнт розкладений в ряд за степеневими поліномами. Середня квадратична похибка за внутрішньою збіжністю склала $m = 0.21$ TECu. Середнє квадратичне відхилення отриманої моделі порівняно із моделлю GIM із IGS склало 1.05 TECu.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Наукові статті, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1.1. Статті у наукових періодичних виданнях, які внесені до міжнародних наукометричних баз даних Scopus та Web of Science

1. Dzhuman B. Gravimetric geoid model determination of Central Ukraine area using combination of LSC and truncated SHA methods. Acta Geodyn. Geomater., 20, No. 1 (209), 1–9, 2023. DOI: 10.13168/AGG.2023.0001

2. Zablotskiy F., Maksymchuk V., Dzhuman B. On construction of gravimetric geoid model on the Lviv region area. *Geofizicheskiy Zhurnal*. 2022. vol. 44. № 1(2022). P. 124-130. <https://doi.org/10.24028/gzh.v44i1.253714>.

3. Serant, O., Sidorov, I., Balyan, A., Kubrak, O., Yarema, N., & Dzhuman, B. (2022). Determination of mall building vertical displacements by sedimentary marks. *Geodesy and Cartography*, 48(3), 144–149. <https://doi.org/10.3846/gac.2022.14597>

4. Сумарук Ю. П., Янків-Вітковська Л. М., Джуман Б. Б. Моделювання регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій: теоретичний аспект. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 1. С. 180—191. <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i1.2019.158872>.

5. Сумарук Ю. П., Янків-Вітковська Л. М., Джуман Б. Б. Моделювання регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій: практичний аспект. *Геофиз. журн.* 2019. Т. 41. № 6. С. 165—172. DOI: <https://doi.org/10.24028/gzh.0203-3100.v41i6.2019.190073>.

6. Янків-Вітковська Л. М., Джуман Б. Б. Апроксимація параметрів іоносфери з використанням сферичних функцій. *Космічна наука і технологія*. 2018. №6 (115). DOI: <https://doi.org/10.15407/knit2018.06.074>

7. Savchuk S., Yankiv-Vitkovska L., Dzhuman B. The influences of seismic processes, the Sun and the Moon on the small changes of coordinates of GNSS-stations. *Geodynamics = Геодинаміка*. – 2018. – № 2 (25). – P. С. 15–26.

1.2. Статті у наукових фахових виданнях України, які внесені до міжнародних наукометричних баз даних

8. Заблоцький Ф., Джуман Б. Побудова геометричної СТНА-моделі геоїда на територію Львівської області. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. 2021. Вип. II (42). С. 49–56.

9. Заблоцький Ф., Джуман Б., Брусак І. Про точність моделей (квазі)геоїда відносно системи висот UELN/EVRS2000. // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. 2021. № I(41). С. 29–36.

10. Тревого І., Заблоцький Ф., Піскорек А., Джуман Б., Вовк А. Про модернізацію Української висотної системи // *Геодезія, картографія і аерофотознімання : міжвідом. наук.-техн. зб. / М-во освіти і науки України, Нац. ун-т "Львів. політехніка" ; відп. ред. К. Р. Третяк. Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2021. Вип. 93. С. 13–26.*

11. Паляниця Б.Б., Джуман Б.Б., Сідоров І.С. (2019). Гравіметричні роботи на території Дністровської ГАЕС. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, Вип. II (38), С. 24–31.

12. Dzhuman, B. V. (2018). Modeling of the regional gravitational field using first and second derivative of spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, (88), 5—12. <https://doi.org/10.23939/istcgcap2018.02.005>

13. Джуман Б. Б. (2018). Зв'язок між глобальним та регіональним гравітаційним полем. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, Вип. I (35), С. 79–82.

14. Джуман Б. Б. (2018). Про перехід від глобальних до локальних сферичних гармонік. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва, Вип. I (39), С. 57–61.

15. Джуман Б. Б. Застосування другого методу Неймана до сферичних функцій на сферичній трапеції. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва. 2018. № II(36). С. 21–24.

16. Dzhuman, B. B. (2017). Modeling of the Earth gravitational field using spherical functions. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 86, 5–10.

17. Yankiv-Vitkovska, L. M. & Dzhuman, B. B. (2017). Constructing of regional model of ionosphere parameters. *Geodesy, cartography and aerial photography*, 85, 27–35.

1.3. Статті у наукових фахових виданнях України

18. Джуман Б., Непеляк Я. Про представлення АКФ СТНА-поліномами для моделювання регіонального гравітаційного поля Землі. *Технічні науки та технології*. 2021. № 1(23). С. 225–231. [https://doi.org/10.25140/2411-5363-2021-1\(23\)-225-231](https://doi.org/10.25140/2411-5363-2021-1(23)-225-231)

19. Джуман Б.Б., Заблоцький Ф.Д. Застосування квадратурних формул при моделюванні гравітаційного поля СТНА-функціями. *Технічні науки та технології*. 2020. № 3(21). С. 293–300.

20. Савчук С. Про кореляцію між значеннями параметра іоносфери VTEC на GNSS-станціях України / С. Савчук, Ф. Заблоцький, Л. Янків-Вітковська, Б. Джуман // *Український журнал дистанційного зондування Землі*, Вип. 1(20), 2019. – С. 13-17.

1.4. Статті у інших виданнях

21. Пересунько Б. О. Відновлення часового стану іоносфери за даними регулярних визначень показника TEC / Б. О. Пересунько, А. М. Недогонова, С. О. Крамаренко, Б. Б. Джуман, Л. М. Янків-Вітковська // *Вісник Астрономічної Школи*. - 2016. - Т. 12, № 2. - С. 105-110.

2. Наукові праці у збірках матеріалів конференцій

2.1. Публікації у збірниках матеріалів конференцій, що входять до наукометричної бази даних Scopus

22. Serant O., Zablotskyi F., Dzhuman B., Balian A., Yarema N. and Kladochnyi B. (2021). About research of building subsidence using sedimentary marks // *GeoTerrace-2021*, Lviv, PP. 1-5.

23. Dzhuman B., Zablotskyi F. (2020). About the need of modernization the Ukrainian height system // *GeoTerrace-2020-004*, Lviv, PP. 5.

24. Fys, M.M., Tserklevych, A.L., Dzhuman, B.B. (2020) Transformation of a spherically symmetric model of Earth's mass one-dimensional distribution PREM to a hydrostatic state. XIXth International Conference "Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects", 2020, 11-14 May, 18141. doi: 10.3997/2214-4609.2020geo086

25. Savchuk S. Construction of the spatial-temporal model of the ionospheric parameter using the spherical functions / S. Savchuk, L. Yankiv-Vitkovska, B. Dzhuman //18th International multidisciplinary scientific geoconference SGEM 2018. Surveying geology and mining ecology management, 2–8 July, 2018, Albena, Bulgaria : proceedings. – [S. 1.], 2018. – P. 661–668.

2.2. Публікації у збірниках матеріалів конференцій

26. Yankiv-Vitkovska L. Restoration of the spatial-temporal state of the ionosphere by tomography/ L. Yankiv-Vitkovska, B. Dzhuman, S. Savchuk // Wybrane aspekty zabezpieczenia nawigacji lotniczej, cz. 2, 2020. – S. 235-241.

27. Zablotskyi F. Applying the STHA-functions for modelling the regional gravitational field / F. Zablotskyi, B. Dzhuman, L. Yankiv-Vitkovska // Wybrane aspekty zabezpieczenia nawigacji lotniczej, cz. 3, 2020. – S. 116-125.

28. Джуман Б., Сумарук Ю., Янків-Вітковська Л. Побудова регіонального магнітного поля з використанням сферичних функцій. 18 українська конференція з космічних досліджень, Київ, 2018, С. 55

29. Янків-Вітковська Л., Савчук С., Джуман Б., Пересунько Б. Дослідження та моделювання параметрів іоносфери для потреб космічної погоди. Вибрані питання астрономії та астрофізики, Львів, 2018, С. 1.

30. Джуман Б., Янків-Вітковська Л. Побудова регіональної моделі параметрів іоносфери. 17 українська конференція з космічних досліджень, Одеса, 2017, С. 36

АНОТАЦІЯ

Джуман Б.Б. Моделювання регіональних геофізичних полів Землі для розв'язку геодезичних задач. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 05.24.01 – Геодезія, фотограмметрія та картографія. – Національний університет «Львівська політехніка», МОН України, Львів, 2023.

Розв'язування сучасних наукових і прикладних задач геодезії, геофізики, глобальної геодинаміки тощо тісно пов'язане із моделюванням різних полів Землі і планет. В наш час здійснюється активний розвиток нових геодезичних та геофізичних технологій, підвищується точність вимірювальних приладів. Відповідно технологічні виклики сучасності потребують удосконалення методів побудови моделей глобальних та регіональних полів Землі. В глобальному масштабі параметризація полів Землі з використанням кульових функцій Лежандра вважається стандартною, оскільки вони мають аналогічні властивості з даними полями. В регіональному масштабі для вирішення подібних задач використовують інші методи, які базуються на модельному та операційному підходах.

У дисертаційній роботі опрацьовано загальні відомості з теорії моделювання використовуваних в геодезії регіональних полів Землі. Проведено

аналіз сучасних методів моделювання, показано їх точність, недоліки та переваги.

Запропоновано на основі сферичних функцій з дійсними індексами систему функцій на сферичній трапеції (STHA-функції), отримано розрахункові формули STHA-функцій через гіпергеометричний ряд, аналітичні формули для знаходження повної норми даних функцій, алгоритм знаходження кількості нулів STHA-функцій на сферичній трапеції в залежності від їх порядку та степеня. Здійснено адаптацію квадратурних формул Гауса до STHA-функцій. Знайдено формулу для обчислення розрізняювальної здатності STHA-моделі. Обґрунтовано переваги запропонованого методу порівняно із іншими методами.

Отримано формули для розкладу трансформант геопотенціалу в ряд за STHA-функціями та адаптовані до програмування формули для обчислення моделі регіонального гравітаційного поля Землі STHA-методом за значеннями гравітаційних аномалій у вільному повітрі Δg з використанням процедури «Вилучення-Обчислення-Відновлення». Також отримано формули розкладу компонент магнітного поля Землі в ряд за STHA-функціями та формулу розкладу параметру іоносфери *VTEC* в ряд за даними функціями.

Запропоновано приймати STHA-поліноми як базову систему функцій для представлення локальної аналітичної коваріаційної функції. Для апробації даного підходу побудовано та порівняно ряд коваріаційних та кросковаріаційних функцій з використанням поліномів Лежандра та STHA-поліномів. Встановлено, що розбіжність між цими функціями становить не більше 5%. Такий підхід дасть можливість суттєво зменшити кількість коефіцієнтів розкладу в ряд аналітичної коваріаційної функції.

Виконано апробацію запропонованої методики шляхом обчислення високоточної STHA-модель геоїда на території Вінницької та Одеської областей відносно еліпсоїда GRS80 та еліпсоїда Красовського для забезпечення потреб мережі «GeoTerrace». Здійснено оцінку точності отриманої моделі геоїда відносно даних GNSS-нівелювання на 485 пунктах висотної ДГМ. Стандартне відхилення склало ≈ 2.1 см.

Практично підтверджено, що при моделюванні магнітного поля Землі кількість STHA-коефіцієнтів розкладу в ряд компонент магнітного поля є значно меншою порівняно із кількістю SCHA-коефіцієнтів без втрати точності. Точність обчислення кута магнітного схилення за (SHA+STHA)-моделлю склала $\pm 5.5'$, що дозволяє використовувати даний кут при проведенні відповідних геодезичних робіт.

Застосовано методику просторово-часового STHA-моделювання параметру іоносфери *VTEC* в регіональному масштабі. Кожен коефіцієнт розкладено в ряд за степеневими поліномами. При цьому середня квадратична похибка за внутрішньою збіжністю склала $m = 0.21$ *TECU*, а середнє квадратичне відхилення отриманої моделі порівняно із моделлю GIM із IGS склало 1.05 *TECU*.

Результати дисертаційної роботи отримали впровадження в рамках державного замовлення «Розбудова мережі активних перманентних станцій глобальної навігаційної супутникової системи в південно-західному транскордонному секторі України для розширення послуг точного

позиціонування» (№ ДЗ / 102 – 2021 від 04 березня 2021 р.), виконаного згідно розпорядження Кабінету міністрів України «Про затвердження переліку найважливіших науково-технічних (експериментальних) розробок за пріоритетними напрямками розвитку науки і техніки в рамках виконання державного замовлення на найважливіші науково-технічні (експериментальні) розробки та науково-технічну продукцію у 2021-2022 роках» від 18 серпня 2021 р. № 950-р.

Ключові слова: моделювання, регіональний масштаб, GNSS-нівелювання, гравітаційне поле Землі, геопотенціал, модель геоїда, магнітне поле Землі, компоненти магнітного поля, параметр іоносфери *VTEC*.

ABSTRACT

Dzhuman B.B. Modeling of the Earth's regional geophysical fields for solving geodetic problems. – Qualification scientific paper on the rights of manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Technical Sciences by speciality 05.24.01 - Geodesy, photogrammetry and cartography. – Lviv Polytechnic National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Lviv, 2023.

Solving modern scientific and applied problems of geodesy, geophysics, global geodynamics etc. is closely related to the modeling of various fields of the Earth and planets. Nowadays new geodetic and geophysical technologies are developed actively and the accuracy of measuring devices increase. Accordingly the technological challenges of modern times require the improvement of methods of creating models of the global and regional fields of the Earth. Parameterization of the Earth's fields using spherical Legendre functions is considered standard on a global scale since they have similar properties to these fields. On a regional scale other methods are used to solve similar problems which based on model and operational approaches.

The dissertation elaborates general information on the theory of modeling of the regional fields of the Earth used in geodesy. An analysis of modern modeling methods is carried out. Their accuracy, disadvantages and advantages are shown.

We propose a system of functions on a spherical trapezoid (STHA-functions) based on spherical functions with real indices, obtain calculation formulas of STHA-functions using hypergeometric series, analytical formulas for finding the full norm of given functions, an algorithm for finding the number of zeros of STHA-functions on a spherical trapezoid depending from their order and degree. Gaussian quadrature formulas have been adapted to STHA functions. Formula for calculating the resolution of the STHA model has been found. The advantages of the proposed method are substantiated compared to other methods.

The formulas for the decomposition of geopotential functionals into a series according to STHA-functions and formulas adapted to programming for calculating the model of the regional gravity field of the Earth by the STHA-method were obtained based on the values of gravity anomalies in free air Δg using the "Remove-Compute-Restore" procedure. The formulas for the decomposition of the components of the Earth's magnetic field in a series according to the STHA-functions and the formula for the decomposition of the ionosphere parameter *VTEC* in a series according to these functions were also obtained.

It is proposed to adopt STHA polynomials as the basic system of functions for representing the local analytical covariance function. To test this approach, a number of covariance and cross-covariance functions were constructed and compared using Legendre polynomials and STHA polynomials. It was established that the discrepancy between these functions is no more than 5%. This approach will make it possible to significantly reduce the number of expansion coefficients in the series of the analytical covariance function.

Approbation of the proposed methodology was carried out by calculating a high-precision STHA model of the geoid on the territory of Vinnytsia and Odesa regions relative to the GRS80 ellipsoid and the Krasovsky ellipsoid to ensure the needs of the "GeoTerrace" network. The accuracy of the obtained geoid model was evaluated in relation to the GNSS leveling data at 485 points of the high-altitude SGN. The standard deviation is ≈ 2.1 cm.

It is practically confirmed that when modeling the Earth's magnetic field, the number of STHA coefficients of the decomposition of components of the magnetic field is significantly smaller compared to the number of SCHA coefficients without loss of accuracy. The accuracy of the calculation of the angle of magnetic inclination according to the (SHA+STHA) model was $\pm 5.5'$, which allows to use this angle when conducting relevant geodetic works.

The method of spatio-temporal STHA modeling of the *VTEC* ionosphere parameter on a regional scale is applied. Each coefficient is arranged in a series of power polynomials. At the same time, the root mean square error of internal convergence was $m = 0.21 \text{ TECu}$, and the root mean square deviation of the obtained model compared to the GIM model from IGS was 1.05 TECu .

The results of the scientific work were implemented within the framework of the state order "Development of a network of active permanent stations of the global navigation satellite system in the southwestern cross-border sector of Ukraine for the expansion of accurate positioning services" (No. DZ / 102 - 2021 dated March 4, 2021), executed in accordance with the order of Cabinet of Ministers of Ukraine "On approval of the list of the most important scientific and technical (experimental) developments according to the priority directions of the development of science and technology within the framework of the implementation of the state order for the most important scientific and technical (experimental) developments and scientific and technical products in 2021-2022" dated August 18, 2021 No. 950.

Keywords: modeling, regional scale, GNSS leveling, Earth's gravity field, geopotential, geoid model, Earth's magnetic field, magnetic field components, *VTEC* ionosphere parameter.