

**ПРОГРАМА**  
вступного іспиту зі спеціальності  
**111 «Математика»**  
для здобувачів вищої освіти  
третього (освітньо-наукового) рівня  
(2022 рік вступу)

1. Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.

2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції, похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.

3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.

4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.

5. Числові ряди: означення збіжності, критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.

6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів, почленне диференціювання та інтегрування; степеневі ряди та їх основні властивості, розвинення елементарних функцій у степеневі ряди.

7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційованість; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.

8. Невластиві інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; властивості функцій, що визначаються невластивими інтегралами. Інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру.

9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невластиві кратні інтеграли,

10. Криволінійні та поверхневі інтеграли; означення, властивості, обчислення; формула Грі на, Гауса-Остроградського і Стокса.

11. Ряди і інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є; перетворення Фур'є.

## 2. Алгебра

1. Означення групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор – групи.
2. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.
3. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
4. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь; необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера-Капеллі); теорема про структуру розв'язків. Формула для обчислення оберненої матриці.
5. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; теорема Гамільтона-Келі.

## 3. Функціональний аналіз

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі  $\mathbb{R}^n$ .
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.
3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла.
4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори: означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і компактні оператори в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з компактними операторами.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.

## 4. Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

## 5. Звичайні диференціальні рівняння

1. Основні поняття та означення теорії диференціальних рівнянь; означення типу та класифікація розв'язків; розв'язність елементарних квазілінійних рівнянь першого порядку.
2. Теорема існування та єдиності розв'язків задачі Коші для рівнянь та системи рівнянь. Особливі точки і особливі розв'язки диференціальних рівнянь.
3. Лінійні диференціальні рівняння: структура загального розв'язку; знаходження розв'язків лінійних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами; методи знаходження частинних розв'язків неоднорідних рівнянь та систем.
4. Стійкість розв'язків систем нелінійних рівнянь: означення; метод функцій Ляпунова; дослідження на стійкість за першим наближенням.
5. Диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: побудова загального розв'язку; розв'язність задачі Коші.

## 6. Рівняння з частинними похідними

1. Класифікація рівнянь з частинними похідними: рівняння 2-го порядку, їх типи та зведення до канонічної форми; гіперболічні, еліптичні та параболічні рівняння довільного порядку.
2. Задача Коші для рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; доведення єдиності методом Хольмгрена.
3. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.
4. Задача Коші та початково-крайові задачі для рівнянь гіперболічного типу: розв'язування задачі Коші для гіперболічних рівнянь методом характеристик; формула Кірхгофа; методи розв'язування початково-крайових задач; загальна схема методу Фур'є розв'язання змішаної задачі для гіперболічних рівнянь.
5. Гармонічні функції: означення, принцип максимуму та його застосування до доведення єдиності розв'язку задачі Діріхле; розв'язування задач Діріхле і Неймана для рівняння Лапласа методом потенціалу.
6. Параболічні рівняння 2-го порядку: принцип максимуму та його застосування до доведення єдиності розв'язків задач Коші і Діріхле; розв'язування задачі Коші; інтеграл Пуассона; методи розв'язування початково-крайових задач.
7. Класифікація за І.Г. Петровським систем диференціальних рівнянь із частинними похідними довільного порядку (гіперболічні, еліптичні, параболічні).

## Форми контролю та критерії оцінювання

Організування та проведення вступних випробувань до аспірантури здійснюється відповідно до Правил прийому до аспірантури Національного університету «Львівська політехніка» у відповідному році.

Вступний іспит зі спеціальності 111 «Математика» проводиться у письмово-усній формі згідно з окремим графіком, який затверджується Ректором Університету та оприлюднюється на інформаційному стенді відділу докторантури та аспірантури й офіційному веб-сайті Університету не пізніше, ніж за 3 дні до початку прийому документів.

Екзаменаційні білети вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» формуються в обсязі програми рівня вищої освіти магістра зі спеціальності 111 «Математика» та затверджуються на засіданні Вченої ради Навчально-наукового інституту прикладної математики та фундаментальних наук.

Результати вступного іспиту зі спеціальності оцінюються за 100-бальною шкалою.

Екзаменаційний білет вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності 111 «Математика» містить:

- письмову компоненту з чотирьох питань: одне питання з розділу «1», одне питання з розділів «2» або «4», одне питання з розділу «3» і одне питання з розділів «5» або «6» (кожне із чотирьох питань екзаменаційного білета оцінюється максимально в 20 балів, максимальна сумарна кількість балів письмової компоненти – 80 балів);

- усну компоненту вступного іспиту з чотирьох питань (кожне із чотирьох питань усної компоненти оцінюється максимально в 5 балів, максимальна сумарна кількість балів усної компоненти – 20 балів).

Критерії оцінювання кожного питання письмової та усної компоненти вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» є такими:

Оцінка «відмінно» (18-20 балів для питань письмової компоненти та 5 балів для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру бездоганно засвоїв теоретичний матеріал щодо місту питання; самостійно, грамотно і послідовно з вичерпною повнотою відповів на питання; демонструє глибокі та всебічні знання, логічно будує відповідь; висловлює своє ставлення до тих чи інших проблем; вміє встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, логічно та обґрунтовано будувати висновки.

Оцінка «добре» (14-17 балів для питань письмової компоненти та 4 бали для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру добре засвоїв теоретичний матеріал щодо змісту питання, аргументовано викладає його; розкриває основний зміст питання, дає неповні визначення понять, допускає незначні порушення в послідовності викладення матеріалу та неточності при використанні наукових термінів; нечітко формулює висновки, висловлює свої міркування щодо тих чи інших проблем, але припускається певних похибок у логіці викладу теоретичного змісту.

Оцінка «задовільно» (10-13 балів для питань письмової компоненти та 3 бали для питань усної компоненти): вступник в аспірантуру в основному засвоїв теоретичний матеріал щодо змісту питання; фрагментарно розкриває зміст питання і має лише загальне його розуміння; при відтворенні основного змісту питання допускає суттєві помилки, наводить прості приклади, непереконливо відповідає, плутає поняття.

Оцінка «незадовільно» (0-9 балів для питань письмової компоненти та 0-2 бали для питань усної компоненти): вступник не засвоїв зміст питання, не знає основних його понять; дає неправильну відповідь на запитання.

Виконання завдань вступного іспиту зі спеціальності 111 «Математика» передбачає необхідність неухильного дотримання норм та правил академічної доброчесності відповідно до Положення про академічну доброчесність у Національному університеті «Львівська політехніка». За порушення зазначених норм та правил вступники в аспірантуру притягаються до відповідальності згідно вимог чинного законодавства.

## Л і т е р а т у р а

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1, 2. – Київ, Либідь, 1994.
2. Костробій П.П., Строчик М.М. Математичний аналіз II. – Львів: Растр-7, 2022. – 392 с.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в двух томах): Учебник для студентов университетов и вузов. – М.: Высш. школа, 1981, т.1 и 2.
4. Дороговцев А.Я. Математический анализ: Справочное пособие. – К.: Вища школа, 1985. – 528 с.
5. Дороговцев А. Я. Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 558с.
6. Рудин У. Основы математического анализа . – М., Мир, 1976.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу, ч. 1, 2, 3. – К.: Вища школа, 1990, 1991, 1992.
8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974.
9. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986. – 304с.
10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М. Наука, 1968.
11. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.
12. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1966.
13. Ильин В.А., Позняк З.Г. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624с.
15. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: Учеб. пособие. – М: Высш.шк., 1982. – 271 с.
16. Березанський Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функціональний аналіз. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 559 с.

17. Кадець В.М. Курс функціонального аналізу та теорії міри. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2012. – 590 с.
18. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А. Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
19. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч. 1. – М.: Наука, 1985. – 336с.
20. Степанов В.В. Курс диференціальних рівнянь – К.: Радянська шк., 1953. – 444с.
21. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.
22. Ляшко І.І., Боярчук О.К., Гай Я.Г., Калайда О.Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Вища шк., 1981. – 504 с.
23. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
24. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
25. Петровский И.Г. Лекций об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
26. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.
27. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
28. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001.
29. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2009. – 387 с.