

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

*На правах рукопису*

**Бубела Іванна Василівна**

УДК 006.91: 621.317

**Опрацювання результатів вимірювання  
при відхиленні їх статистичних властивостей від типових**

05.01.02 – стандартизація, сертифікація та метрологічне забезпечення

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Науковий керівник:  
доктор технічних наук, професор  
**Дорожовець М.М.**

*Ідентичність всіх примірників дисертації*

**ЗАСВІДЧУЮ:**

*Учений секретар спеціалізованої  
вченої ради*

*/ Т.Бубела /*

Львів - 2016

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ПРОБЛЕМИ.....	14
1.1 Методики опрацювання результатів спостережень відповідно до вимог у Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM).....	16
1.2 Особливості опрацювання результатів спостережень з розподілами відмінними від нормального .....	20
1.3 Застосування методу порядкових статистик для визначення «найкращої» оцінки результату .....	23
1.4 Загальна характеристика робастних методів опрацювання результатів спостережень.....	30
1.5 Проблеми, що пов'язані з коригуванням систематичних впливів.....	32
1.6 Застосування методу Монте-Карло до оцінювання непевності результату вимірювання.....	35
Висновки до 1 розділу .....	38
РОЗДІЛ 2 МЕТОДИКА ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ ЯКИМИ Є ЕКСТРЕМАЛЬНІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ.....	40
2.1 Екстремальні спостереження.....	41
2.2 Розподіл екстремальних спостережень .....	43
2.3 Методика оцінювання непевності екстремальних значень при нормальному розподілі.....	48
2.4 Розподіли екстремальних значень при відмінних від нормального розподілах спостережень.....	57
2.5 Перевірка ефективності оцінювання непевності екстремального значення методом Монте-Карло при різних розподілах спостережень.....	63
2.6 Аналіз випадкових впливів .....	70
2.6.1 Теоретичний аналіз випадкових впливів .....	70
2.6.2 Дослідження випадкових впливів.....	72

	3
2.7 Аналіз систематичних впливів .....	79
2.7.1 Теоретичний аналіз систематичних впливів.....	79
2.7.2 Дослідження систематичних впливів .....	81
2.8 Запропонована методика оцінювання непевності екстремальних спостережень.....	86
Висновки до 2 розділу .....	87
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИКА ОПРАЦЮВАННЯ МЕТОДОМ ПОРЯДКОВИХ СТАТИСТИК РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ З АПРІОРИ НЕВІДОМИМИ РОЗПОДІЛАМИ.....	90
3.1 Наближений метод порядкових статистик.....	91
3.2 Застосування наближеного методу порядкових статистик для опрацювання спостережень з плоско-нормальним розподілом.....	98
3.3 Дослідження ефективності застосування наближеного методу порядкових статистик до опрацювання спостережень з плоско-нормальним розподілом методом Монте-Карло .....	105
Висновки до 3 розділу .....	108
РОЗДІЛ 4 РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ МОНТЕ – КАРЛО .....	110
4.1 Стандартна методика дослідження пластмасових виробів на розтяг та розрив .....	110
4.2 Досліджувані зразки .....	112
4.3 Вимірювальна апаратура та умови виконання дослідження.....	114
4.4 Результати лабораторних досліджень контролю параметрів пластмасових виробів .....	116
4.5 Опрацювання результатів вимірювань контрольованих параметрів запропонованою методикою екстремальних значень .....	120
4.5.1 Обчислення середніх значень та оцінок стандартних відхилень контрольованих параметрів згідно із запропонованою методикою екстремальних значень.....	120

4.5.2 Оцінювання за методом типу В стандартної непевності контрольованих параметрів .....	121
4.5.3 Оцінювання за методом типу В сумарної стандартної непевності контрольованих параметрів .....	124
4.5.4 Оцінювання за методом типу А стандартної непевності контрольованих параметрів відповідно до запропонованої методики для мінімального значення .....	125
4.5.5 Обчислення сумарної та розширеної непевності контрольованих параметрів .....	126
4.6 Результати контролю з якості пластмасових труб згідно із запропонованою методикою екстремальних значень .....	128
4.7 Інтерпретація результатів контролю з якості пластмасових труб .....	129
4.8 Перевірка ефективності запропонованого методу оцінювання непевності вимірювання екстремального значення спостережень методом Монте-Карло.	130
Висновки до 4 розділу .....	134
ВИСНОВКИ.....	135
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	138
Додаток А Договір про науково-технічну співпрацю .....	151
Додаток Б Акти впровадження результатів дисертаційної роботи.....	154
Додаток В Результати виконаних обчислень при дослідженні екстремальних спостережень.....	158
Додаток Г Результати виконаних обчислень удосконаленим методом порядкових статистик для плоско-нормального розподілу спостережень .....	167
Додаток Д Експериментальні дослідження пластмасових труб .....	168

## ВСТУП

**Актуальність теми.** У найпоширеніших методиках опрацювання результатів вимірювань з багаторазовими випадковими спостереженнями приймається, що найкращим результатом є їх середнє значення, або інша центральна характеристика (наприклад, медіана) [1-4]. Однак це справедливо, якщо розподіл спостережень є нормальним або близьким до нього

При опрацюванні результатів вимірювань у наукових чи промислових дослідженнях властивостей об'єктів найчастіше знаходять усереднені характеристики цих властивостей, зокрема їх середні значення та параметри розкиду. Однак при контролі параметрів виробів, центральна характеристика спостережень, зокрема середнє значення, не є найкращою оцінкою результату контрольного вимірювання. Тобто, існує відмінність між опрацюванням результатів під час дослідження параметрів об'єктів та під час контролю параметрів на відповідність допустимим значенням. Відповідно до існуючих стандартів, зокрема [5,6,7,8], при контрольних вимірюваннях механічних властивостей параметрів пластмасових труб (на розтяг та розрив) чи, наприклад, під час контролю геометричних параметрів виробів (зокрема, відхилення їх граней від взаємної перпендикулярності та площинності [9]), а також при метрологічній перевірці засобів вимірювальної техніки (ЗВТ) [10] відповідність їх похибок допустимим значенням встановлюють не за середніми значеннями, а за екстремальними відхиленнями, які в подальшому порівнюють із допустимими значеннями. Подібний підхід слід було б використовувати також при контрольних вимірюваннях вмісту шкідливих домішок чи елементів у продуктах харчової чи фармацевтичної промисловості. Хоча середнє значення таких шкідливих сполук може бути в нормі, але в частині продуктів їх максимальна концентрація може перевищувати допустиму, тому такі продукти не можна допускати до споживачів.

Навіть при нормальному розподілі спостережень розподіл самих екстремальних (мінімальних чи максимальних) спостережень відрізняється від нормального, і крім того, залежить від кількості спостережень  $n$ . Оскільки

переважно такі контрольні вимірювання пов'язані з руйнуванням виробів, то кількість доступних спостережень є істотно обмеженою ( $n = 5, \dots, 10$ ), і тому при оцінюванні непевності екстремальних значень неможливо застосувати їх граничні розподіли ( $n \rightarrow \infty$ ) [11]. Отже, такі результати характеризуються статистичними властивостями, які істотно відрізняються від типово прийнятих, і тому до них неможливо безпосередньо застосувати типові методики оцінювання їх непевності.

Таким чином, розроблення методики оцінювання непевності результатів вимірювань, якими є екстремальні спостереження, завдання актуальне.

Крім того, у вимірювальній практиці розподіл зареєстрованих спостережень може бути відомим лише наближено, і він може бути також комбінацією кількох інших розподілів. Відомо [12-18], що якщо спостереження мають розподіл, який істотно відрізняється від нормального, тоді середнє значення не є найкращою (в сенсі мінімального значення стандартної непевності) оцінкою результату вимірювання. У таких випадках для знаходження найкращих оцінок параметрів розташування, ширини та їх непевності необхідно знати розподіл самих спостережень [12]. За відносно невеликої кількості спостережень (кілька десятків) відомі тестові методи [13-15,19-22] не можуть забезпечити належної ідентифікації розподілу. Відома методика [17,18], що базується на порядкових статистиках, гарантує меншу стандартну непевність результату, ніж непевність середнього значення, однак лише за апріорі відомої густини розподілу спостережень. Крім того, у цій методиці необхідно враховувати взаємну кореляцію між впорядкованими спостереженнями навіть якщо самі спостереження були некорельованими. Тому ця методика є дуже складною у використанні, оскільки визначення коваріаційної матриці впорядкованих спостережень передбачає великий обсяг трудомістких обчислень подвійних інтегралів, ядром яких є  $n(n+1)/2$  різних двовимірних густин сумісного розподілу всіх пар порядкових статистик. Числові методи обчислень цих інтегралів при збільшенні  $n$  дають менш точні результати [23].

Тому актуальним є завдання створення простої і надійної методики опрацювання результатів вимірювань з метою визначення найкращих (з мінімальним значенням стандартної непевності) оцінок результатів, які би враховували діапазон можливих відхилень розподілів спостережень від нормального.

Створення таких методик дозволить розширити метрологічну базу та сприятиме розвитку теорії і практики оцінювання непевності результатів під час контролю параметрів якості продукції, й відповідно - до покращення якості виробництва продукції України згідно з потребами споживачів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконувалась в межах пріоритетних напрямків розвитку науки і техніки в Україні, а також в межах держбюджетної науково-дослідницької роботи: «Вимірювання температури мікро- та наноструктурованих об'єктів методом комбінаційного розсіювання світла» (№ держреєстрації 015U000431, 2015-2016 рр.) і в межах договору про науково-технічну співпрацю між ТЗОВ «Ельпласт-Львів» і Національним університетом «Львівська політехніка» (Додаток А).

**Мета і завдання дослідження.** Метою дисертаційної роботи є створення, удосконалення й дослідження ефективності методик опрацювання та оцінювання непевності результатів спостережень, для яких результатом є екстремальне спостереження із всіх зареєстрованих результатів, а також удосконалення методики опрацювання спостережень, якщо їх розподіл істотно відрізняється від нормального.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити такі завдання:

1. Проаналізувати сучасні методи опрацювання результатів спостережень і встановити основні проблеми, які пов'язані з впливом відхилення властивостей розподілу спостережень від нормального.

2. Опрацювати та дослідити методики оцінювання непевності результатів, якими є екстремальні спостереження при нормальному та інших розподілах.

3. На основі методу порядкових статистик удосконалити та дослідити методику опрацювання спостережень з довільним розподілом, яка забезпечить оптимальне (близьке до мінімального) значення непевності результату вимірювання.

4. Реалізувати оцінювання ефективності запропонованих методик за допомогою симуляційних досліджень методом Монте-Карло (ММК).

5. Реалізувати запроповану методику до опрацювання спостережень, отриманих під час реальних вимірювальних експериментів

**Об'єкт дослідження** – екстремальні спостереження, спостереження з розподілами, які відрізняються від нормального та методики оцінювання непевності таких спостережень, які враховують їх специфіку.

**Предмет дослідження** – методи оцінювання непевності екстремальних спостережень та випадкових спостережень при відхиленні їх розподілу від нормального, оцінювання точності та ефективності запропонованих методик.

**Методи дослідження** - методи опрацювання результатів вимірювань з багаторазовими випадковими спостереженнями, теорія похибок і непевності результатів вимірювань, теорія ймовірності та математичної статистики, теоретичні основи вимірювальної техніки, симуляційний метод Монте-Карло при дослідженні ефективності запропонованих методик оцінювання результату вимірювання та його непевності. Експериментальні дослідження проводилися у метрологічній лабораторії ТзОВ «Ельпласт-Львів» за допомогою сучасних ЗВТ та з використанням стандартних і опрацьованих методик виконання досліджень під час контролю.

### **Наукова новизна одержаних результатів.**

1. Вперше для різновидів контролю параметрів виробів, для яких критичним є отримане з декількох контрольних вимірювань мінімальне



(максимальне) значення, на основі врахування ймовірнісних властивостей екстремальних спостережень, опрацьовано методику оцінювання їх непевності, яка ґрунтується на попередньому обчисленні теоретичних параметрів першої (останньої) порядкових статистик, а також експериментальних характеристиках зареєстрованих спостережень, та яка забезпечує обчислення стандартної та розширеної непевності екстремальних значень, і завдяки якій результат контролю встановлюють на основі порівняння з допустимим значенням не самих екстремальних значень, які є випадковими величинами, а з урахуванням їх непевності.

2. Одержано залежності для обчислення стандартної та розширеної непевності екстремального спостереження, у яких стандартна непевність обчислюється як добуток теоретичного стандартного відхилення екстремального спостереження для нормованого розподілу на оцінку стандартного відхилення всіх спостережень, а розширена - як добуток попередньо визначеного коефіцієнта розширення екстремального спостереження на оцінку стандартного відхилення всіх спостережень. Одержані залежності забезпечують просте обчислення характеристик непевності екстремального спостереження і надалі використовуються при порівнянні екстремального значення з допустимим.

3. Показано, що при  $n \leq 10$  розширена непевність екстремальних значень вибірок з широкого класу відмінних від нормального розподілів з достатньою для практики точністю (відхилення  $< 14\%$ , а при  $n \leq 5$  відхилення  $< 3\%$ ) може бути обчислена з використанням коефіцієнта розширення для екстремальних спостережень з нормально розподілених вибірок. Тому ця методика за невеликої кількості спостережень може бути застосована без аналізу розподілу самих спостережень.

4. На основі аналізу інструментальної складової непевності встановлено, що систематичні та випадкові відхилення у результатах вимірювань по різному впливають на непевність екстремальних спостережень. Зміни розширеної непевності при різних розподілах і різному вмісті цих впливів відносно

стандартного відхилення самих спостережень досліджено методом Монте-Карло. Встановлено, що якщо стандартні відхилення цих впливів не перевищують приблизно  $1/3$  від стандартного відхилення самих спостережень, то зміну розширеної непевності від цих впливів можна обчислювати за спрощеними виразами, для яких потрібне знання лише стандартних відхилень цих впливів.

5. На основі асимптотичних властивостей математичного сподівання, дисперсії та коефіцієнта кореляції порядкових статистик запропоновано і отримано прості залежності для безпосереднього обчислення зразкових спостережень, які ідеально відповідають густині розподілу генеральної сукупності, та коваріаційної функції, які необхідні для реалізації удосконаленого методу порядкових статистик, на основі якого можна визначити найкращі (з близьким до мінімального значення стандартної непевності) параметри розташування та ширини вибірки випадкових спостережень з апіорі невідомим розподілом, а лише відомим набором можливих розподілів.

6. Вперше застосовано модифікований метод порядкових статистик для опрацювання спостережень, які є сумою нормально і рівномірно розподілених спостережень з апіорі невідомим взаємним вмістом складових, і які описуються так званим плоско-нормальним розподілом зі змінним параметром, який забезпечує просте і швидке обчислення результату і його непевності, а його точність зростає із збільшенням кількості спостережень.

### **Практичне значення одержаних результатів.**

1. Результати, одержані у дисертаційній роботі, дають можливість вдосконалити метрологічне забезпечення контролю якості продукції, для якої критичним параметром є найменше чи найбільше з вимірних значень.

2. Вперше нову методику оцінювання непевності екстремальних спостережень застосовано у експериментальних дослідженнях з контролю параметрів пластмасових виробів.

3. Розроблена нова методика доведена до рівня практичного застосування у формі алгоритму, у якому вхідними даними є кількість спостережень, значення самих спостережень, рівень довіри, шуканий параметр (мінімальний чи максимальний результат) та його допустиме значення, а вихідними - оцінка шуканого параметру, оцінки його математичного сподівання та стандартного відхилення, а також стандартна та розширена непевність.

4. Одержані результати та запропоновану методику опрацювання результатів вимірювання використано при контролі параметрів (відносного видовження та межі плинності) виробів із пластмаси згідно з договором про науково-технічну співпрацю між ТзОВ «Ельпласт-Львів» і НУ «Львівська політехніка».

5. Розроблено та доведено до рівня практичного застосування спосіб безпосереднього обчислення коваріаційної матриці впорядкованих спостережень, яка необхідна для використання методу порядкових статистик, і який забезпечує підвищення швидкості (у кілька десятків-сотень разів) та точності обчислень необхідних матричних компонентів (особливо при  $n > 50$ ).

Виконане дисертаційне дослідження має наукове значення для таких галузей науки і техніки як метрологія і інформаційно-вимірювальна техніка, зокрема в напрямку метрологічного забезпечення контролю якості виробів, продукції, параметрів технологічних процесів тощо. Отримані в дисертації результати наукових досліджень використовуються в науково-дослідній роботі та навчальному процесі кафедр «Інформаційно-вимірювальні технології» та «Метрологія, стандартизація та сертифікація» Національного університету «Львівська політехніка» (Додаток Б), зокрема при вивченні дисциплін: «Опрацювання результатів вимірювання», «Комп'ютерне опрацювання вимірювальної інформації», «Кваліметрія», «Методи та засоби вимірювань, випробувань і контролю», «Опрацювання результатів вимірювань, випробувань та контролю», «Метрологія та інженерія якості продукції» та «Метрологічне забезпечення виробництва». Також отримані результати дисертаційної роботи

впроваджені на підприємстві ТзОВ «Ельпласт-Львів», що засвідчено відповідним актом впровадження результатів роботи (Додаток Б).

**Особистий внесок здобувача.** Основні наукові результати, викладені в роботі, отримані автором особисто. Із публікацій, написаних у співавторстві, здобувачу належить:

[23,24] - обґрунтування можливості формування матричних компонентів за асимптотичними залежностями дисперсії і коефіцієнтів кореляції, опрацювання наближеного методу порядкових статистик, дослідження його ефективності методом Монте-Карло;

[25,26] – збирання і аналіз вимірювальних даних, обчислення стандартної та розширеної непевності параметрів пластмасових труб;

[27,28,29] – отримання загального виразу нормованого плоско-нормального розподілу та дослідження впливу параметру цього розподілу при опрацюванні спостережень, формування зразкових спостережень, дослідження методу зразкових вибірок;

[30,31] – розроблення методики оцінювання непевності мінімального значення при нормальному розподілі спостережень та дослідження її ефективності ММК;

[32] - застосування нестандартного статистичного методу оцінювання непевності мінімального спостереження, яке приймається за результат контрольного вимірювання при контролі якості пластмасових виробів;

[33] - аналіз статистичної методики оцінювання непевності екстремальних спостережень для  $n = 3, \dots, 10$  при різних розподілах;

**Апробація результатів роботи.** Основні положення і результати роботи апробовано у 7 доповідях, що доповідалися на таких конференціях:

1. Всеукраїнська науково-технічна конференція молодих вчених у царині метрології «Technical Using of Mea-surement-2015», Славське, 2-6 лютого 2015 року;

2. II Міжнародна науково-практична конференція «Управління якістю в освіті та промисловості: досвід, проблеми та перспективи», Львів, 28-30 травня 2015 року;
3. XI Scientific–Technical Conference: Problems and Progress in Metrology. Kościelisko, Poland, 07–10 June 2015;
4. XX Międzynarodowe Seminarium Metrologów MSM'2015, Rzeszów i Iwonicz Zdrój, Poland, 21-24 września 2015;
5. The 8<sup>th</sup> IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. Warsaw, Poland, 24-26 September 2015;
6. The 11<sup>th</sup> International Conference Mechatronics 2015, Warsaw, Poland, 21-23 September 2015;
7. Всеукраїнська науково-технічна конференція молодих вчених у царині метрології «Technical Using of Measurement-2016», Славське, 1-5 лютого 2016 року.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 12 наукових праць, у тому числі 3 статті у наукових фахових виданнях України, 4 статті у наукових періодичних виданнях інших держав та 5 праць у матеріалах науково-технічних конференцій, із 12 друкованих праць 2 публікації знаходяться у виданнях, що включені до науково-метричної бази SCOPUS.

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ТА АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ПРОБЛЕМИ

Для виявлення чи запобігання випуску недоброякісної продукції на підприємствах, для захисту виробників чи споживачів від неякісних матеріалів, сировини, послуг тощо, для забезпечення належного перебігу різних процесів здійснюють контроль якості таких об'єктів [34-44].

Однією з найважливіших складових контролю є виконання вимірювань відповідних параметрів цих об'єктів і процесів у такий спосіб, щоб отримати достовірні результати вимірювань, на основі яких встановлюють відповідність параметрів об'єктів чи процесів нормам, встановлених в нормативно технічній документації (НТД).

Іншою важливою складовою контролю є методика опрацювання отриманих під час вимірювань результатів спостережень. Методика опрацювання при заданій кількості спостережень має забезпечити найбільш достовірні результати, тобто результати з найменшою непевністю.

У наукових і технічних вимірювальних експериментах опрацювання результатів вимірювань зазвичай становить важливу проблему, від вирішення якої суттєво залежить достовірність отриманих результатів. Підґрунтям зазначених досліджень завжди є стандартизовані методики до опрацювання результатів вимірювань [45]. Слід пам'ятати проте, що далеко не всі стандарти, що мають у своїй назві слова «методи» або «вимірювання», містять сукупність конкретно описаних операцій, виконання яких забезпечує одержання результатів вимірювань із встановленими показниками точності, тобто повноцінну методику виконання вимірювань (МВВ). Не вистачає лише знань про метрологічні властивості засобів вимірювань. Необхідно мати інформацію про сам об'єкт, про вимірювану величину та її властивості, а також про саму методику опрацювання первинних результатів. Інакше оцінювання характеристик точності результатів

вимірювань лише на основі характеристик ЗВТ не забезпечить повної легалізації результатів, особливо при конфліктній ситуації.

Методика вимірювань (англ. *measurement procedure*) – спеціально описана сукупність операцій, які використовуються при виконанні конкретних вимірювань відповідно до даного методу [1]. Методики виконання вимірювань – сукупність процедур і правил, виконання яких забезпечує одержання результатів вимірювання з потрібною точністю [46].

Сьогодні існує велика кількість стандартів, вказівок та рекомендацій, які містять у своїй назві слово «метод», або «методика». Однак лише деякі з них можна назвати методикою вимірювання. Головна причина в тому, що вони не містять відомостей про всі складові, що впливають на точність вимірювання. Показниками точності у методиках вимірювань можуть бути характеристики похибки вимірювання (старші нормативні документи), показники непевності вимірювання (новітні нормативні документи). Загалом кожна методика повинна передбачити однозначне оцінювання характеристик непевності результатів за відомими метрологічними властивостями ЗВТ, умов вимірювань, означення вимірювальної величини (англ. *measured*), властивостей об'єкту вимірювання, тощо.

Метод вимірювання (англ. *method of measurement*) - описана в загальному виді логічна послідовність операцій, які використовуються при виконанні вимірювань [1]. Метод вимірювання – сукупність способів використання ЗВТ та принципу вимірювань для створення вимірювальної інформації [46].

Методику виконання вимірювань зазвичай оформляють у вигляді документа, який часто офіційно називають «методика вимірювання» і зазвичай вміст інформації у ній є достатнім для оператора, щоб виконувати вимірювання без додаткової інформації [1,46,47]. Не всі методики можуть бути описані, або регламентовані документом на методику виконання вимірювання. Наприклад, такі найпростіші вимірювання, як вимірювання тиску за допомогою манометрів, електричних величин щитовими приладами, лінійно-кутові вимірювання, вимірювання маси і багатьох інших величин за допомогою простих засобів

вимірювань, не вимагають задокументованих методик. Необхідність документації методики встановлює розробник конструкторської, технологічної або проектної документації. Або ж розробку документа на методику може вимагати замовник.

При можливості використання конкуруючих методик виконання вимірювань слід вибирати не ту методику, яка забезпечує найвищу точність результатів вимірювань, а таку, яка вимагає найменших затрат з урахуванням наявних матеріальних ресурсів, або дозволяла мінімізувати витрати на проектування процесів вимірювань при необхідності придбання чи розробки нових засобів вимірювань.

Загалом під час науково-дослідних та лабораторних досліджень обов'язковим етапом є опрацювання результатів та оцінювання їх характеристик точності згідно із загальними вимогами та особливостей конкретного вимірювального експерименту [48-53].

### **1.1 Методики опрацювання результатів спостережень відповідно до вимог у Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)**

Загальні вимоги щодо оцінювання якості результатів вимірювань сформульовані у так званому «Провіднику з вираження непевності у вимірюваннях» (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)) [1].

Згідно з [1] найперше слід скоригувати систематичні впливи виявлені у результатах спостережень  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ . Параметри непевності результату вимірювання можуть бути знайдені двома способами [1]:

1. За методом типу А (статистичним методом) - на підставі серії результатів спостережень.
2. За методом типу В - на підставі апіорі відомої густини розподілу кожного джерела непевності.

Згідно з GUM [1] методика оцінювання найкращого результату та його стандартної непевності  $u_A(x)$  за методом типу А складається з наступних етапів:



1. Обчислити середнє значення (найкращого результату вимірювання):

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad (1.1)$$

2. Обчислити оцінки дисперсії результатів спостережень:

$$s^2(x_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 ; \quad (1.2)$$

3. Визначити експериментальну оцінку стандартного відхилення:

$$s(x_i) = \sqrt{s^2(x_i)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} ; \quad (1.3)$$

4. Обчислити значення стандартної непевності типу А результату за невідомого стандартного відхилення спостережень за формулою (1.4), або за відомого стандартного відхилення за формулою (1.5):

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \frac{s(x_i)}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} ; \quad (1.4)$$

$$u_A(\bar{x}) = \frac{\sigma(x_i)}{\sqrt{n}} ; \quad (1.5)$$

5. Обчислити кількість ступенів свободи:

$$\nu = n - 1 ; \quad (1.6)$$

6. Визначити розширену непевність:

$$U_p = t_p(\nu) \cdot u_A(x) ; \quad (1.7)$$

де  $t_p(\nu)$  - коефіцієнт розширення – квантиль розподілу Стюдента;

$p$  - рівень довіри;

7. Представлення результату вимірювання, наприклад, мінімальна за обсягом форма результату вимірювання має вигляд:  $X = \bar{x} \pm U_p$ ,  $P =$ ,  $\nu =$ ,  $t_p(\nu) =$ ,  $n =$ .

Оцінювання непевності результатів вимірювання за методом типу В згідно з GUM [1]: стандартну непевність визначають за методом типу В на основі апіорних відомостей даних, наприклад, про розподіл можливих значень величини (густину розподілу  $p(x)$ ). Стандартну непевність обчислюють за виразом:

$$u_B(x) = \sigma_x = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx}; \quad (1.8)$$

Для відомого розподілу стандартна непевність типу В визначається за виразом:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_{гр}}{k_p}; \quad (1.9)$$

де  $\Delta_{гр}$  – допустимі граничні відхилення показів та інших ЗВТ;

$k_p$  - коефіцієнт, що пов'язаний із формою розподілу, наприклад для рівномірного розподілу  $k_p = \sqrt{3}$ , для трикутного  $k_p = \sqrt{6}$ .

Для відомих допустимих граничних відхилень показів приладів та інших ЗВТ і при браку інформації щодо розподілу цих відхилень приймають рівномірний розподіл [1], і тоді:

$$u_B(x) = \frac{\Delta_{гр}}{\sqrt{3}}. \quad (1.10)$$

Сумарну (комбіновану) стандартну непевність  $u_c(x)$  результату вимірювання  $x$  обчислюють за виразом:

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}. \quad (1.11)$$

При більшій кількості складових непевності їх враховують при обчисленні сумарної (комбінованої) стандартної непевності  $u_c(x)$  результату вимірювання у виразі (1.11).

Розширену непевність визначають за виразом [1]:

$$U_p = k_p \cdot u_c(x). \quad (1.12)$$

де  $u_c(x)$  - комбінована (сумарна) стандартна непевність (яка є результатом всіх складових непевностей);

$k_p$  - коефіцієнт розширення, значення якого залежить від рівня довіри  $p$ , виду густини розподілу та кількості, так званих, ступенів свободи.

Проблеми застосування методики опрацювання результатів спостережень згідно з вимогами у GUM [1] наступні:

1. Результати спостережень повинні бути взаємно некорельовані;
2. Генеральна сукупність результатів спостережень підпорядковується нормальній густині розподілу, або близька до неї;
3. У разі відхилення справжньої густини розподілу результатів спостережень від нормального:
  - а) середнє значення результатів спостережень може бути не найкращою оцінкою результату вимірювань і у такому разі треба використати інший параметр розподілу [12];
  - б) стандартне відхилення результатів спостережень, поділене на корінь із кількості спостережень, може не бути найкращою (найефективнішою) оцінкою стандартної непевності результату, і у такому разі останню треба знаходити іншим способом.

Неврахування цих проблем може призвести, як до занадто оптимістичних оцінок непевності, так і, навпаки, до занадто песимістичних, тобто до таких, які не відповідають дійсності.

У даній роботі вплив взаємної кореляції спостережень не розглядається. Цій проблемі присвячена низка досліджень [54-59].

Однією з найважливіших проблем методики за GUM [1] є те, що вона не може бути застосована у випадку, якщо розподіл вимірювальної величини істотно відрізняється від нормального. Тобто спостереження можуть відхилятися від типових властивостей, для яких існують стандартизовані методики опрацювання та оцінювання непевності результатів, це насамперед розподіл нормальний, або близький до нього, та відсутність взаємного статистичного зв'язку між спостереженнями. Це може бути навіть тоді, коли

самі спостереження підпорядковані нормальному розподілу, але результатом не є середнє значення. Зокрема, під час контролю механічних властивостей виробів (наприклад, на розтяг, розрив та витривалість тощо) інформативним параметром є найменший результат, значення якого не може бути меншим ніж граничне допустиме [5-8].

Під час контролю вмісту шкідливих домішок у продуктах харчування інформативним параметром є найбільший результат, значення якого не може перевищувати гранично допустиме [60-68].

При невеликих кількостях  $n$  досліджуваних проб густина розподілу найменшого і найбільшого елементів відрізняється від нормального, при  $n$  великих вони прямують до експоненційного [11] навіть при нормальному розподілі самих спостережень (рисунок 1.1).

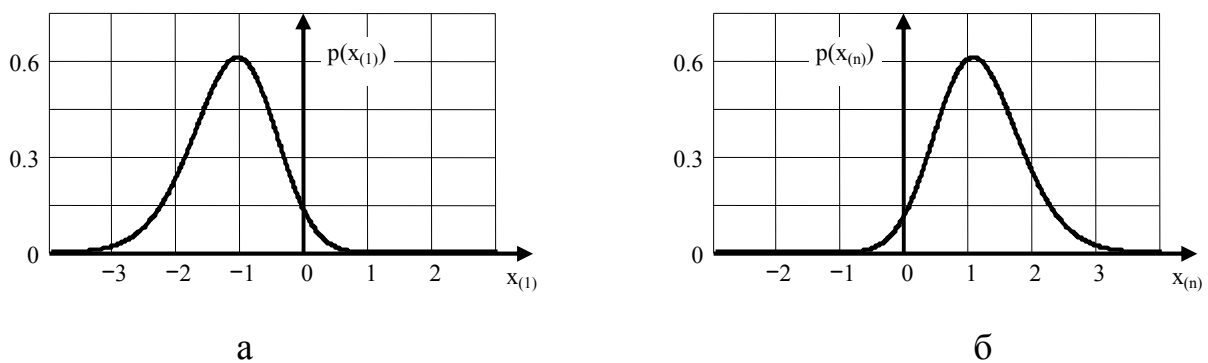


Рисунок 1.1 - Густини розподілів крайніх спостережень (обсягом  $n = 5$ ) вибраних із генеральних сукупностей з нормальним розподілом:  
а - для першого  $x_{(1)}$  елементу, б – останнього  $x_{(n)}$  елементу вибірки

## 1.2 Особливості опрацювання результатів спостережень з розподілами відмінними від нормального

У певних випадках за апіорі відомих розподілів спостережень відмінних від нормального існують інші параметри вибірок, які мають менші непевності ніж непевність середнього значення [2,3,12,16,47,69].

Зокрема, якщо є переконливі аргументи [12], що досліджувана вибірка підпорядкована моделі рівномірного розподілу тоді найкращою оцінкою

результату вимірювання є середина розмаху (середнє значення із двох крайніх елементів впорядкованої за зростанням вибірки):

$$x_{c.p.} = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}, \quad (1.13)$$

де  $x_{(1)}$ ,  $x_{(n)}$  – перший та останній елемент впорядкованої вибірки.

Математичне сподівання  $M[V]$  розмаху вибірки  $V = x_{(n)} - x_{(1)}$  (різниця між найбільшим  $x_{(n)}$  та найменшим  $x_{(1)}$  значенням впорядкованої вибірки), як експериментальна оцінка розмаху  $R$  генеральної сукупності з рівномірним розподілом, з якого отримана експериментальна вибірка розміром  $n$  спостережень і дисперсія середини розмаху  $D(x_{c.p.})$  становлять [19]:

$$M[V] = \frac{n+1}{n-1} \cdot R, \quad D(x_{c.p.}) = \frac{R^2}{2(n+1)(n+2)}. \quad (1.14)$$

Тоді стандартна непевність результату (середини розмаху) становить [2,3,12,16,47,69]:

$$u_A(x_{c.p.}) = \frac{V}{(n-1)} \sqrt{\frac{n+1}{2 \cdot (n+2)}}, \quad (1.15)$$

Розширена непевність безпосередньо пов'язана із розмахом вибірки та рівнем довіри та обсягом вибірки. Розширену непевність середини розмаху для заданого рівня довіри  $P$  результату вимірювання обчислюють за виразом [2,3,12,16,47,69]:

$$U_p(x_{c.p.}) = \frac{V}{2} \left[ (1-P)^{1/n-1} - 1 \right]; \quad (1.16)$$

Для коректного підсумовування непевностей знаходять еквівалентну кількість ступенів свободи:

$$\nu_{eff}(n, p) \approx \frac{1}{3} \frac{t_p^2}{\left( (1-P)^{1/n-1} - 1 \right)^2} - 1. \quad (1.17)$$

Отже, якщо є впевненість у тому, що вибірка підпорядкована рівномірному розподілу, то середина розмаху і його стандартна непевність,

порівняно із середнім значенням і його стандартною непевністю є значно кращими, оскільки при зростанні обсягу вибірки  $n$  стандартна непевність середини розмаху зменшується приблизно пропорційно до  $n$  разів, а стандартна непевність середнього значення зменшується лише у  $\sqrt{n}$  разів.

Якщо можна прийняти модель розподілу Лапласа для генеральної сукупності результатів спостережень то найкращою оцінкою результату вимірювання із отриманої скінченної за обсягом вибірки є їхня медіана [2,3,12,16,47,69] (як результат спостережень із серединним номером впорядкованої вибірки  $x_{s,1} \leq x_{s,2} \leq x_{s,3} \leq \dots \leq x_{s,n}$ ) при непарній кількості спостережень за формулою (1.18), при парній за формулою (1.19):

$$x_{med} = x_{s, (n+1)/2}, \quad (1.18)$$

$$x_{med} = (x_{s, n/2} + x_{s, n/2+1})/2. \quad (1.19)$$

Стандартна непевність медіани – експериментальне стандартне відхилення медіани вибірки, приблизно у  $\sqrt{2}$  разів менше від експериментального стандартного відхилення середнього значення вибірки [2,3,12,16,47,69]:

$$u_A(x_{med}) = S_{med} \approx \sqrt{\frac{S_x^2}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \frac{S_x}{\sqrt{2}} = \frac{u_A(\bar{x})}{\sqrt{2}}. \quad (1.20)$$

Границі розширеної непевності результату (медіани) ліву  $U_{P,l}(x_{med})$  та праву  $U_{P,r}(x_{med})$  на рівні значущості  $P$  знаходять за виразами [2,3,12,16,47,69]:

$$U_{P,l}(x_{med}) = x_{n_l}, \quad U_{P,r}(x_{med}) = x_{n_r}, \quad (1.21)$$

$$n_l = \lfloor [n + 1 - z_p \sqrt{n}] / 2 \rfloor, \quad n_r = \lceil [n + 1 + z_p \sqrt{n}] / 2 \rceil, \quad (1.22)$$

де  $x_{n_l}$  та  $x_{n_r}$  – елементи просортованої вибірки з номерами  $n_l$  та  $n_r$  причому перше значення  $n_l$  заокруглюють до меншого цілого, а друге  $n_r$  – до більшого цілого;

Для подальшого підсумовування непевностей знаходять ефективну кількість ступенів свободи [2,3,12,16,47,69]:

$$v_{eff}(P, n) \approx 2 \frac{z_p^2}{\ln^2(1 - z_p/\sqrt{n})} - 1. \quad (1.23)$$

Отже, якщо є впевненість у тому, що вибірка підпорядкована розподілу Лапласа, тоді для отримання однакової стандартної непевності у разі визначення медіани потрібно вдвічі менше результатів спостережень, ніж у разі визначення середнього значення.

### 1.3 Застосування методу порядкових статистик для визначення «найкращої» оцінки результату

Якщо розподіл спостережень  $p(x)$  відомий, тоді існує метод знаходження найкращої (з мінімальною непевністю) оцінки розташування і ширини вибірки випадкових спостережень. Цей метод базується на так званих порядкових статистиках [17,18,23,24] з безпосереднім використанням інформації про розподіл  $p(x)$ .

Порядкові статистики – це впорядковані спостереження  $X_S = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})^T$  випадкової величини, які показані на рис. 1.2.

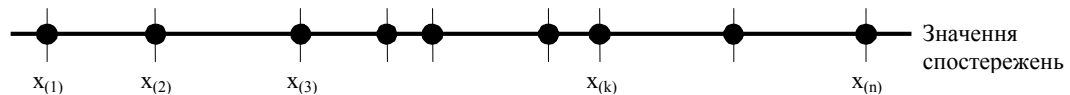


Рисунок 1.2 – Приклад впорядкованих спостережень – порядкових статистики (вигенеровані спостереження з рівномірним розподілом та кількістю спостережень  $n = 9$ )

Суть методу порядкових статистик полягає у виконанні наступних операцій [17,18,70]:

1. Впорядкуванні отриманих результатів спостережень  $X_S$ ;
2. Порівнянні впорядкованих спостережень  $X_S(x_k)$  із послідовністю так званих зразкових спостережень – математичних сподівань порядкових статистик  $x_{ref} = (x_{ref_1}, x_{ref_2}, \dots, x_{ref_k}, \dots, x_{ref_n})^T$  ( $k$  - номер  $k$ -ої порядкової статистики серед  $n$  спостережень), які ідеально відповідають вибраній моделі густини розподілу  $p(x)$ .

Приклади зразкових спостережень, обчислені за формулою (1.24) показано на рисунку 1.3 (теоретичні положення спостережень при нормальному розподілі,  $n=19$ ), а їх порівняння з впорядкованими спостереженнями графічно подано на рисунку 1.4 (де  $v_k$  - відхилення відповідних членів вибірки від зразкових, тобто  $v_k = x_{(k)} - xref_k$ );

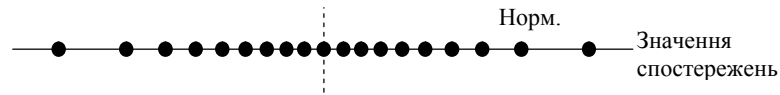


Рисунок 1.3 - Приклад зразкових спостережень – математичних сподівань порядкових статистик для нормальної густини розподілу  $p(x)$   $n=19$

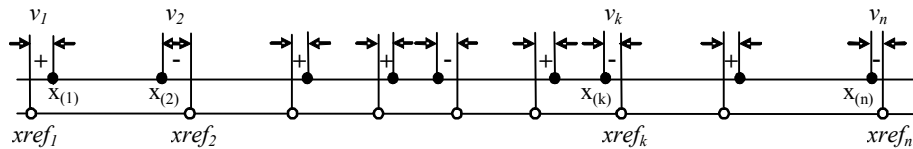


Рисунок 1.4 - Порівняння вхідних спостережень із зразковими

Згідно з означення [19] зразкове спостереження  $xref_k$  – є математичними сподіваннями  $k$ -ої порядкової статистики, тому що вони теоретично ідеально відповідають вибраному розподілу, а реальні спостереження мають відхилення відносно очікуваних значень, тобто:

$$xref_k = M[x_{(k)}] = xref_k = \int_{-\infty}^{\infty} x_k \cdot p_k(x_k) dx_k = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_k(x) dx, \quad (1.24)$$

де

$$p_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(x))^{k-1} (1-F(x))^{n-k} p(x), \quad (1.25)$$

де  $p_k(x_k) = p_k(x)$  - густина розподілу  $k$ -ої порядкової статистики (для спрощення запису виразів індекс  $k$  при  $x$  не вписуємо);

$p(x)$  – густина розподілу величини  $x$ ;

$F(x)$  - функція розподілу величини  $x$ .

3. Визначення параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  (параметр розташування і ширини це не обов'язково математичне сподівання і стандартне



відхилення (у випадку нормального розподілу), це може бути інший параметр наприклад: медіана (у випадку розподілу Лапласа), середина розмаху (у випадку рівномірного розподілу) та ін. відповідно до [19]) результатів спостережень розподілу із застосуванням вагового методу найменших квадратів (ВМНК):

$$(\hat{\mu}, \hat{\sigma})^T = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{X}_s = \mathbf{REC} \cdot \mathbf{X}_s. \quad (1.26)$$

де  $\mathbf{A}^T$  - матриця зразкових спостережень:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ xref_1 & xref_2 & \dots & xref_n \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

де  $xref_k$  - зразкові спостереження;

$\mathbf{REC}$  - реконструктивна матриця:

$$\mathbf{REC} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W}, \quad (1.28)$$

де  $\mathbf{W}$  - є ваговою матрицею:

$$\mathbf{W} = \mathbf{COV}^{-1}, \quad (1.29)$$

Вагова матриця  $\mathbf{W}$  є зворотною до коваріаційної матриці  $\mathbf{COV}$  порядкових статистик, елементи якої визначають з обчислення подвійного інтегралу:

$$\mathbf{COV}_{k,l} = \iint_{x_l > x_k} s \cdot z \cdot p2_{k,l}(s, z) ds dz - xref_k \cdot xref_l, \quad (1.30)$$

$$p2_{k,l}(s, z) = C(n, k, l) \cdot [F(s)]^{k-1} [F(z) - F(s)]^{l-k-1} [1 - F(z)]^{n-l} p(s)p(z), \quad (1.31)$$

$$C(n, k, l) = \frac{n!}{(n-l)! \cdot (l-k-1)! \cdot (k-1)!}, \quad (1.32)$$

де  $p2_{k,l}(s, z)$  - сумісний розподіл імовірностей  $k$ -тої ( $s$ ) і  $l$ -тої ( $z$ ) порядкових статистик [23,24,28,71];

4. Для знаходження стандартних непевностей обчислюють незміщену оцінку дисперсії  $S_R^2$  відхилень  $v_k$  (рисунок 1.4) вхідних спостережень від зразкових використовуючи стандартну процедуру для вагового методу найменших квадратів (ВМНК) [13-15,23,24,28,29,70,72-71,74]:

$$S_R^2 = \frac{\mathbf{X}_s^T \cdot \mathbf{MS2} \cdot \mathbf{X}_s}{n - 2}, \quad (1.33)$$

де  $\mathbf{MS2}$  – вагова матриця (у якій  $\mathbf{I}$  - діагональна одинична матриця розміром  $n \times n$ ):

$$\mathbf{MS2} = \mathbf{W} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{REC}), \quad (1.34)$$

5. Обчислення стандартних непевностей  $u_A(\hat{\mu})$  і  $u_A(\hat{\sigma})$  найкращих оцінок параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$ :

$$u_A(\hat{\mu}) = \sqrt{d_{0,0}^2 \cdot S_R^2}, \quad u_A(\hat{\sigma}) = \sqrt{d_{1,1}^2 \cdot S_R^2}, \quad (1.35)$$

де  $d_{0,0}^2, d_{1,1}^2$  - діагональні елементи матриці  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} d_{0,0}^2 & 0 \\ 0 & d_{1,1}^2 \end{pmatrix}; \quad (1.36)$$

Це так звана дисперсійна матриця розмірністю  $2 \times 2$ , яка у разі симетричної густини розподілу генеральної сукупності спостережень є діагональною, що свідчить про відсутність кореляції між параметрами розташування та ширини дослідженої вибірки [27].

6. Обчислення розширених непевностей  $U_p(\hat{\mu})$  і  $U_p(\hat{\sigma})$  найкращих оцінок параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  за формулою (1.7), але враховуючи, що кількість ступенів свободи  $\nu = n - 2$ , тому що оцінюється два параметри (розташування та ширини).

Структурна схема реалізації алгоритму опрацювання спостережень відповідно до методу порядкових статистик при порівнянні впорядкованих спостережень з однією послідовністю зразкових спостережень показана на рисунку 1.5.

В [13-15,23,24] доведено, що в методі порядкових статистик дисперсія  $\text{var}(\hat{\mu})$  оцінки параметра розташування  $\hat{\mu}$  завжди є меншою за дисперсію середнього значення  $\text{var}(\bar{x})$ :

$$\text{var}(\hat{\mu}) \leq \frac{\sigma^2}{n} = \text{var}(\bar{x}). \quad (1.37)$$

рівність  $\hat{\mu} = \bar{x}$  має місце тільки для нормального розподілу.

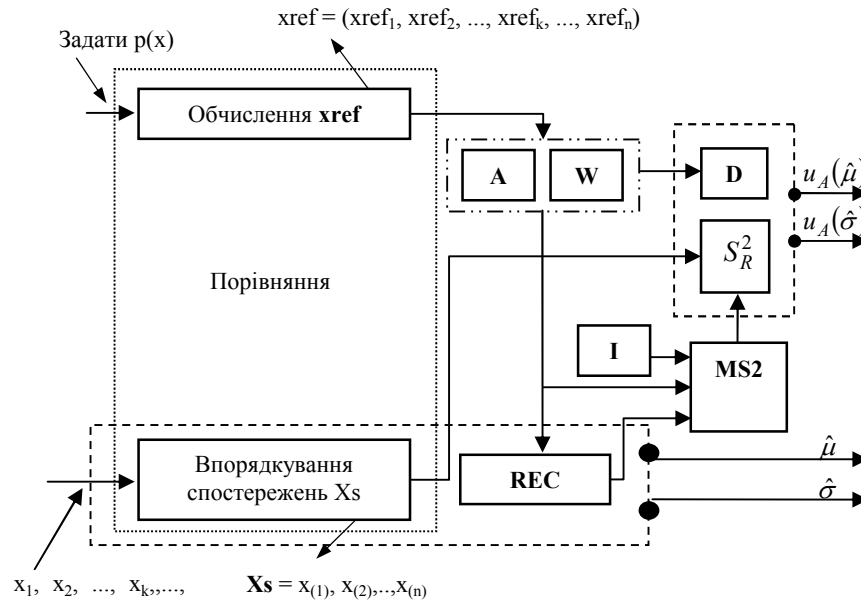


Рисунок 1.5 - Структурна схема алгоритму опрацювання результатів спостережень на основі методу порядкових статистик (порівняння впорядкованих спостережень з однією послідовністю зразкових)

Тобто для відомого розподілу спостережень, який відрізняється від нормального завжди існує кращий (з меншою стандартною непевністю) параметр інший ніж середнє значення. Однак необхідною умовою для визначення такого найкращого результату з найменшою стандартною непевністю є знання розподілу ймовірності спостереження  $p(x)$ .

Відповідно до суті застосування метод порядкових статистик неможливо застосувати, якщо густина розподілу спостережень  $p(x)$  є апіорі невідомою. Однак, якщо відомо, що розподіл може бути одним з декількох можливих моделей, тоді можна використовувати розширений метод порядкових статистик, описаний у [2,23,70,72-74].

Відповідно до цього методу умова визначення найкращої оцінки параметра розташування  $\hat{\mu}$  результатів спостереження і параметра ширини  $\hat{\sigma}$  розподілу вибірки дослідження полягає у наступному [23,24,28,29] (рисунок 1.7):

1. Впорядкуванні спостережень  $X_S$ ;
2. Вхідні просортовані спостереження порівнюють не з однією послідовністю зразкових спостережень, а з набором  $j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) зразкових спостережень  $xref_1=(xref_{1,1}, xref_{2,1}, \dots, xref_{n,1})^T$ ,  $xref_2=(xref_{1,2}, xref_{2,2}, \dots, xref_{n,2})^T$ , ...,  $xref_J=(xref_{1,J}, xref_{2,J}, \dots, xref_{n,J})^T$  (рисунок 1.6), які відповідають передбачуваним густинам розподілу  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$ , ...,  $p_J(x)$  ( $xref_{k,j}$  – зразкові спостереження, обчислюються за формулою (1.24));

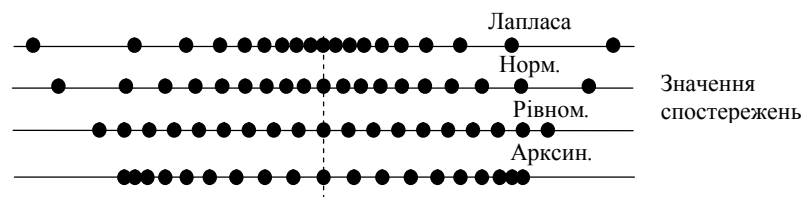


Рисунок 1.6 - Приклади наборів зразкових спостережень – математичних сподівань порядкових статистик для різних густин розподілів ( $n=19$ ) [23]

3. Для кожної моделі густини  $p_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) на основі зваженого методу найменших квадратів обчислюють найкращі оцінки параметрів  $\hat{\mu}_j$  і  $\hat{\sigma}_j$  вхідних спостережень за формулою (1.26) з якої **РЕС** обчислюють за формулою (1.28).
4. Для кожної моделі густини  $p_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) обчислюють незміщену оцінку дисперсії залишкових відхилень  $S_{R,j}^2$  за формулою (1.33).
5. Визначають для якого розподілу отримали мінімальне значення дисперсії залишкових відхилень 
$$j = \min_j (S_{R,1}^2, S_{R,2}^2, \dots, S_{R,J}^2).$$
6. За результат приймають значення для яких отримано мінімальні дисперсії параметрів  $\hat{\mu} = \hat{\mu}_j$  і  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_j$ .
7. Стандартні  $u_A(\hat{\mu})$  і  $u_A(\hat{\sigma})$  і розширені  $U_p(\hat{\mu})$  і  $U_p(\hat{\sigma})$  непевності цих результатів обчислюють, як для звичайного методу порядкових статистик, підставляючи відповідну матрицю  $D_J$  та оцінку дисперсії  $S_{R,j}^2$ .

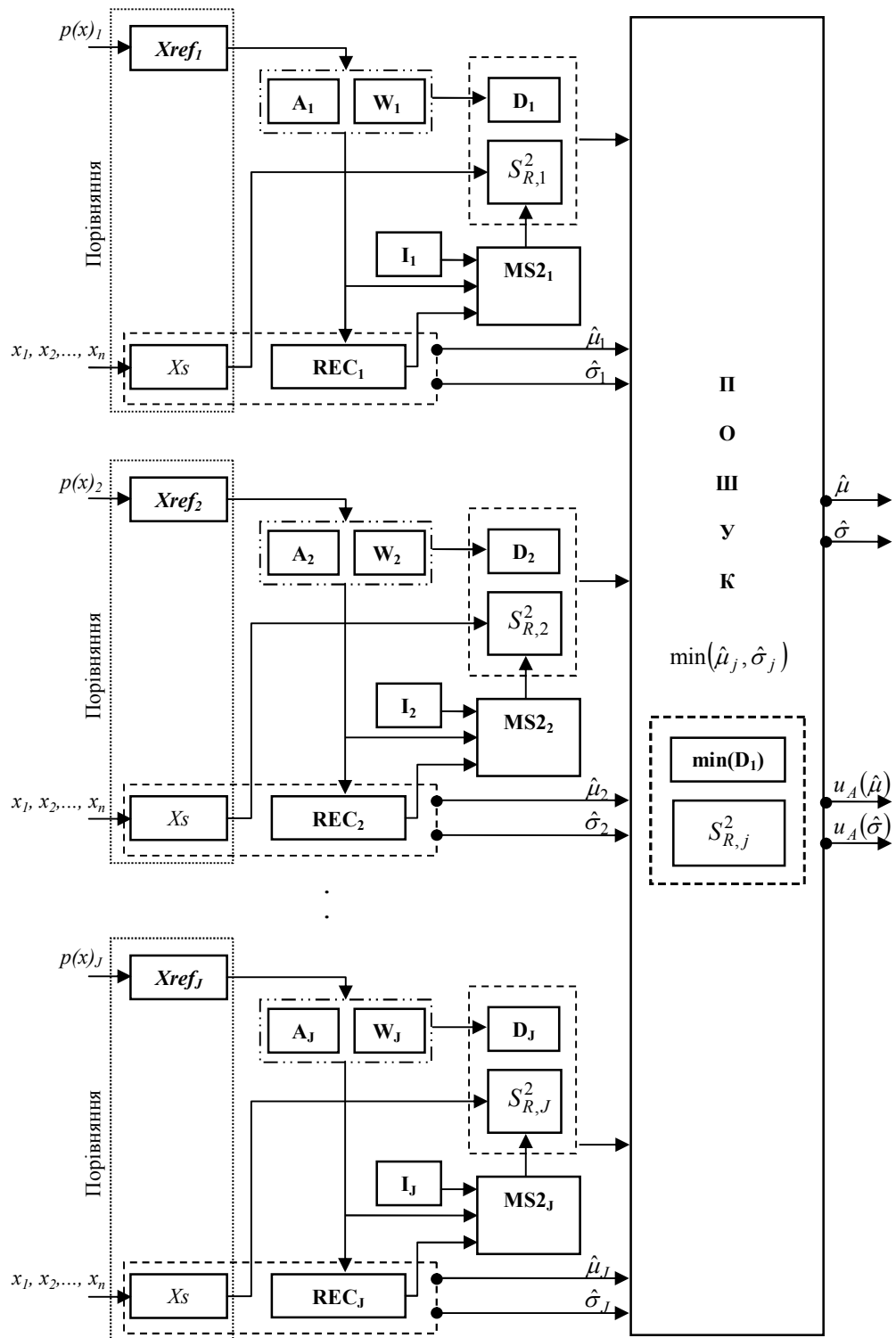


Рисунок 1.7 - Структурна схема алгоритму опрацювання результатів спостережень на основі методу порядкових статистик (порівняння впорядкованих спостережень з набором  $j$  зразкових)

Проблемою застосування розширеного методу порядкових статистик є ще більша обчислювальна складність пов'язана з розрахунком  $j$  коваріаційних **COV** матриць та інших матричних компонентів за формулами (1.30)-(1.31)-(1.32).

Це пояснюється тим, що для обчислення елементу коваріаційної матриці  $\text{COV}_{k,l}$  необхідно обчислювати подвійний інтеграл від виразу (1.30), що залежить від сумісного розподілу імовірностей  $p_{2k,l}(s,z)$   $k$ -тої ( $s$ ) і  $l$ -тої ( $z$ ) порядкових статистик [71], який загалом є складною залежністю густини та функції розподілу випадкової величини. Точність розрахунку коваріаційної матриці на основі числових методів обчислення подвійних інтегралів за формулою (1.30), а далі оберненої до неї вагової матриці зменшується зі збільшенням кількості спостережень  $n$ . Тому для практичного застосування цього ефективного методу слід опрацювати інші простіші і точніші способи обчислення коваріаційної і оберненої до неї вагової матриці.

#### **1.4 Загальна характеристика робастних методів опрацювання результатів спостережень**

При оцінюванні непевності типу А (тобто статистичним методом) можуть виникати аномальні спостереження (англ. outliers), їх потрібно виявити і вилучити, або якимось чином врахувати [75-78].

Для перевірки результатів спостережень на аномальність використовують різні статистичні критерії (Райта, Шевене, Романовського, Греббса тощо) [2,12,47,79-82]. Використання цих критеріїв базується на перевірці пронормованих до оцінки стандартного відхилення вибірки чи генеральної сукупності відхилень найвіддаленіших членів варіаційного ряду від середнього значення із допустимими значеннями, які залежать від густини розподілу результатів, їх кількості та  $\alpha$  – рівня істотності [47]. Для рівномірного розподілу спостережень можна використати інші критерії, зокрема описані у [75].

Для нормального розподілу генеральної сукупності найповніше розроблено статистичні критерії виявлення та відкидання аномальних результатів.

Більшість методів перевірки на аномальність ґрунтуються на обчисленні нормованих до  $\sigma_x$  чи  $s_x$  відхилень підозрілих результатів  $x^*$  від середнього

значення  $\bar{x}$  та їх порівнянні із допустимим (граничним) значенням відхилення, які вибираються із відповідних таблиць [2,47,80].

Загалом завдання типових рівнів істотності:  $\alpha = 0,10$  (10%),  $\alpha = 0,05$  (5%),  $\alpha = 0,075$  (7,5%),  $\alpha = 0,025$  (2,5%),  $\alpha = 0,01$  (1%) не завжди є оправданим [81]. Зокрема у [81] обґрунтовано вказано, що для промахів імовірність виходу має встановлюватися нижче 1%, тобто  $\alpha \leq 0,01$ .

Проблеми з'являються, якщо розподіл спостережень відрізняється від нормального чи рівномірного. Тоді слід виконувати додаткові дослідження з метою об'єктивного виявлення аномальних результатів.

Останніми десятиріччями розвивається галузь математичної статистики, яка відповідає рівню апріорної інформації з точно невідомим розподілом точно, але знаємо його приблизно — робастна статистика [78,83-87]. Основна ідея робастних (англ. *robust*) методів полягає в тому, що до основного нормального розподілу з (малим (нижчим) ваговим коефіцієнтом) заданим значенням стандартного відхилення і математичного сподівання додається нормальний розподіл, але з більшим значенням стандартного відхилення і нульовим математичним сподіванням  $m = 0$ . Тобто, це штучна модель, яка орієнтована на зменшення впливу спостережень, які істотно відхиляються від решти, це модель Тьюкі  $T(\varepsilon, \tau)$  у якій функція розподілу  $F$  досліджуваної випадкової величини має наступний вигляд [76,77]:

$$F(x) = (1 - \varepsilon) \cdot p(x) + \varepsilon \cdot p(x/\tau). \quad (1.38)$$

де  $p(x)$  - густина нормального розподілу з середнім значенням і заданою дисперсією;

$\varepsilon$  – частка (зазвичай відносно невелика) аномальних спостережень;

$p(x/\tau)$  - густина нормального розподілу (чи іншого розподілу) з тим самим середнім значенням, але з іншою (більшою) дисперсією.

Ефективність моделі Тьюкі для різних комбінацій  $\varepsilon, \tau$  показані в таблицях в [76], зокрема ефективність збільшується коли «хвости» (краї) розподілу стають

важчими (зокрема термін «важкі хвости» не обов'язково відображає ту швидкість з якою  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ).

Основними типами робастних оцінок є: M-оцінки [76,78], які є оцінками типу максимальної вірогідності - це найбільш гнучкі оцінки, вони допускають пряме узагальнення на багатопараметричний випадок; W-оцінки [78,88] – це альтернативна форма M-оцінок; L-оцінки [89], які відповідають лінійним комбінаціям порядкових статистик; R-оцінки [90], які відповідають відповідно оцінкам, одержуваних в рангових умовах.

Основні проблеми робастних методів:

- вони не вирішують проблеми радикальної зміни густини розподілу (не тільки на краях розподілу);
- незручністю є і те, що їх не так легко оптимізувати, і що визначення критерію функції беззастережно вимагає необхідність попередньої інформації про вагу шумового забруднення;
- основна модель Тьюкі не передбачена для інших розподілів, ніж нормальний;
- більшість робастних методів орієнтована на зменшення впливу спостережень з іншої генеральної сукупності, які істотно відрізняються від основних спостережень.

### **1.5 Проблеми, що пов'язані з коригуванням систематичних впливів**

Обов'язковим елементом опрацювання результатів вимірювань є виявлення і коригування систематичних впливів, зокрема і часових дрейфів [3,47,91-94]. Джерелами систематичних впливів на результат вимірювання можуть бути об'єкт, метод вимірювання, засоби вимірювання, умови вимірювання і експериментатор. При цьому оцінювання систематичних складових - це досить важке метрологічне завдання. Його важливість визначається тим, що знання систематичних впливів дозволяє ввести відповідну поправку із знаком, протилежним до знаку виявленого систематичного впливу в результат вимірювання і тим підвищити його точність.



Однією з умов правильного обчислення непевності є виявлення та скоригування систематичних впливів. Проблема полягає в складності виявлення систематичних впливів, оскільки їх неможливо виявити через повторні вимірювання (спостереження).

Найчастіше застосовують методи [2,3,47,93-97]:

- коригування сталих у часі систематичних впливів (введення поправок до показів приладу; визначення фактичних значень коефіцієнтів впливу та значень впливних факторів для введення поправок до показів приладу; компенсації впливу зміною його знаку; використання зразкових величин; вимірювання методом заміщення; вимірювання методом протиставлення);
- коригування змінних у часі систематичних впливів (вимірювання із симетричними в часі спостереженнями для коригування дрейфів; усереднення періодичних впливів);
- аналітичні методи розрахунку та внесення поправок;
- метод практичної рандомізації систематичних впливів.

Метод введення поправок до показів приладу дозволяє досить просто виключити з результату вимірювання систематичні впливи. Поправки визначають експериментально, або через спеціальні теоретичні дослідження. Після внесення поправки непевність показів приладу зменшується приблизно у 2...2,5 рази [3].

При коригуванні впливу адитивного зміщення показу приладу зростає вплив випадкових чинників та квантувань, зокрема, за відсутності кореляції їхній вплив на непевність результату зростає у  $\sqrt{2}$  разів, коли чинники непевності в обох вимірюваннях тісно корельовані, стандартна непевність скоригованого результату стає ще більшою [3].

Метод компенсації впливу зміною його знаку більш частіше застосовують при вимірюванні екстремальних значень (максимуму і нуля) невідомої фізичної величини. Теоретично забезпечується повна корекція систематичного впливу, у реальних вимірюваннях ефективність коригування обмежена різними

факторами, насамперед випадковими впливами в обох вимірюваннях та ефектами квантування результатів обидвох вимірювань [3]. Вплив квантування визначається одиницею молодшого розряду (ОМР) показу приладу [3].

Тестові методи коригують різні систематичні впливи, як зовнішні так і внутрішні, спричинені ЗВТ [3,95]. Суть методу полягає у подачі на вхід ЗВТ відомих, так званих тестових величин (зразкових величин) і на основі опрацювання отриманих результатів вимірювань виконують коригування впливів. Умова методу: кількість тестових величин має бути не меншою за кількість впливів коригування; для аналізу непевності скоригованого результату потрібно знати непевності значень тестових величин та алгоритм опрацювання результатів з тестовими вимірюваннями.

Основні проблеми при виявленні і коригуванні систематичних впливів:

1. В реальних умовах повністю виключити систематичні складові впливів неможливо;
2. Скоригований результат завжди містить нескориговані залишки, оскільки переважно не вистачає даних для повного аналітичного визначення систематичних впливів, а експериментальні методи обмежені недосконалістю використовуваних ЗВТ [3];
3. Завжди залишаються якісь невиключені чинники, наприклад: вплив внутрішніх і зовнішніх випадкових шумів, регулярні завади, вплив квантування, недостатня чутливість приладу, вплив умов вимірювання на зразкові величини та ін., які потрібно враховувати і які викликать систематичний вплив на результат вимірювання;
4. Систематичні впливи випадкові і їх визначення обумовлено лише прийнятими методами опрацювання і подання результатів вимірювання;
5. Типові методи коригування не забезпечують повного усунення систематичних впливів;
6. Обмеження ефективності коригування впливів зумовлюють переважно випадкові впливи на послідовні результати, квантування результатів, часову нестабільність самих систематичних впливів.

Для результату вимірювання невиявлена систематична складова впливу набагато небезпечніша від випадкового впливу: якщо випадкова складова викликає варіацію (розкид) результатів, то систематична - стійко їх спотворює (зміщує).

Коригувати систематичні впливи доцільно, якщо вплив випадкових чинників та квантування порівняно з самим систематичним впливом є малим [3]. За умови значних випадкових змін показів та малої кількості квантів замість покращення результату вимірювання можна отримати його погіршення [3].

Результати вимірювань, що містять систематичний вплив, відносяться до невивірених. У будь-якому випадку відсутність, або незначність (нехтування) систематичних впливів треба довести.

## **1.6 Застосування методу Монте-Карло до оцінювання непевності результату вимірювання**

В певних випадках для оцінювання непевності результату вимірювання рекомендують застосовувати метод Монте-Карло, засади якого подані у Додатку 1 до Провідника з вираження непевності у вимірюваннях GUM [98].

Основні застосування ММК - це аналіз характеристик точності результатів експериментальних вимірювань, дослідження очікуваних метрологічних характеристик нових метрологічних процедур та вимірювальних засобів на етапі їх проектування [20,98].

Метод Монте-Карло особливо ефективний у випадках, коли аналітичні методи обчислення непевності непридатні та неефективні внаслідок їх складності через величезний обсяг обчислень та занадто великих часових затрат на розв'язання задачі, а відповідні спрощення задачі не забезпечують потрібної точності [20,98]. Оскільки метод Монте-Карло імовірнісний, то важливо забезпечити статистичну стійкість результатів моделювання [20]. З цією метою обчислення проводять з великої кількості реалізацій  $M$ . Якщо кількість симуляцій становить  $M$ , то стандартне відхилення (статистична нестабільність,

непевність) досліджуваного параметру буде мати порядок  $\sim 1/\sqrt{M}$ . Тобто при  $M=10^4$  (10 тис.) статистична нестабільність має порядок 1%, а при  $M=10^6$  (1 млн.) статистична нестабільність має порядок 0,1%. Тому на практиці рекомендують вибирати кількість статистичних симуляцій у методі Монте-Карло між  $10^4$  та  $10^6$ .

Алгоритм опрацювання та оцінювання непевності результату вимірювання за стимуляційним методом Монте-Карло полягає у виконанні наступної послідовності (рисунок 1.6) [20,98]:

1. Прийняття моделі густини розподілу ймовірності  $p_1(x_1)$ ,  $p_2(x_2)$ ,  $p_3(x_3)$ , ...,  $p_n(x_n)$  для кожної так званої вихідної випадкової величини  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ , ...,  $x_n$  з параметрами математичним сподіванням величини  $m_x$  та стандартним відхиленням  $\sigma_x$ ;
2. Встановлення кількості спостережень  $n$ ;
3. Присвоєння кількості реалізацій (симуляцій)  $M$  у ММК;
4. Генерування  $j = 1, 2, \dots, M$  випадкових значень кожної із вхідних величин із заданими розподілами та їх параметрами:

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,M} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,M} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & \cdots & x_{3,j} & \cdots & x_{3,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,j} & \cdots & x_{n,M} \end{pmatrix}; \quad (1.39)$$

5. За основним рівнянням (моделлю) вимірювання  $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  для кожного з  $M$  наборів згенерованих випадкових значень вхідних величин обчислюють значення вихідної величини  $y_j = f(x_{1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \dots, x_{n,j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ ;

6. Виконуємо необхідні статистичні опрацювання отриманих результатів [1,3]:

- обчислення середнього значення  $\bar{y}$ , яке використовують як найкращу оцінку шуканої величини  $\hat{y} = \bar{y}$ :

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M y_j ; \quad (1.40)$$

- обчислення оцінки стандартного відхилення  $s_y$ , яку використовують як стандартну непевність оцінки величини  $u(\hat{y}) = s_y$ ;

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{(M-1)} \sum_{j=1}^M (y_j - \bar{y})^2} ; \quad (1.41)$$

- сортування значень  $y_j$  вихідної величини  $ys_j$  за зростанням:

$$ys_j = \text{sort}(y_j); \quad (1.42)$$

- обчислення максимального  $\max(y)$  та мінімального  $\min(y)$  експериментального значення;
- побудова експериментальної функції розподілу  $Fe_j(ys_j) = j/M$ , за якою для заданого рівня довіри  $\beta$  визначають нижню  $y_n$  та верхню  $y_e$  границі інтервалу покриття оцінки результату, де символ  $[ ]$  означає цілу частину виразу:

$$y_n = ys_{\left[\frac{1-\beta}{2}M\right]}; \quad y_e = ys_{\left[\frac{1+\beta}{2}M\right]}. \quad (1.43)$$

- побудова гістограм;
- обчислення стандартної та розширеної непевності результатів спостережень;
- оцінювання асиметрії (контрексесу) та сплюсненості (ексцесу) розподілу та визначення інших необхідних статистичних параметрів отриманих результатів.

Недолік методу Монте-Карло – невизначена тривалість і наближений результат розрахунку – статистична непевність обчислень, яка залежить від кількості випробувань  $\varepsilon \approx 1/\sqrt{n}$  [20].

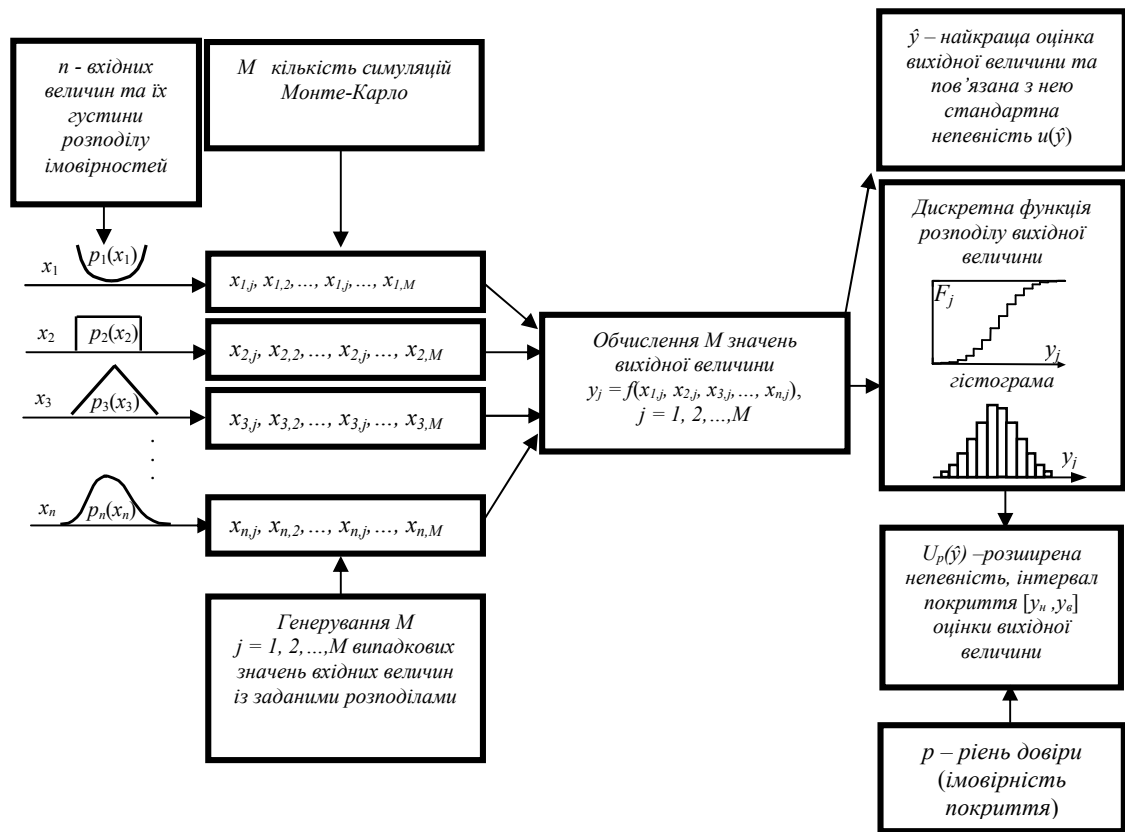


Рисунок 1.8- Загальна схема дослідження невпевності результату вимірювання ММК [20]

## Висновки до 1 розділу

1. Подано коротку характеристику існуючих методів опрацювання результатів вимірювань та причини необхідності розроблення нових методик опрацювання результатів спостережень.

2. На основі проведеного аналізу широко використовуваних методів до опрацювання результатів спостережень встановлено їх основні проблеми, які пов'язані з тим, що існуючі методи дають оптимальні (з погляду мінімального значення стандартної невпевності) результати лише при нормальному, або близькому до нормального розподілу спостережень. При відхиленні розподілу спостережень від нормального ефективність середнього значення зменшується, тобто стандартне відхилення середнього значення збільшується тим більше, чим більше розподіл спостережень відхиляється від нормального розподілу.

3. Виконано огляд поетапного застосування методу порядкових статистик, який забезпечує мінімальну стандартну непевність результату за відомої густини розподілу, що на практиці завжди є можливим.

4. Аналіз розширеного методу порядкових статистик, у якому підбирається «найближчий» розподіл до розподілу спостережень, показав, що його основною проблемою є складність обчислень матричних компонентів, які необхідні для реалізації методу, а також погіршення точності та тривалості обчислень цих компонентів при збільшенні кількості спостережень.

5. Обґрунтовано застосування методу Монте-Карло для виконання досліджень, оскільки при інших моделях розподілів, ніж нормальний чи рівномірний отримати точні аналітичні залежності оцінок параметрів розташування і ширини та їх непевності практично неможливо.

6. На основі виконаного аналізу сформульовано подальші дослідження з метою:

- опрацювання методики оцінювання характеристик стандартної та розширеної непевності екстремальних (мінімального чи максимального) спостережень, які для довільних розподілів спостережень (навіть нормального) мають розподіл, що істотно відрізняється від нормального;

- опрацювання простого і додатного до практичного застосування методу порядкових статистик, який забезпечує найкращі (з мінімальною стандартною непевністю) оцінки розташування та ширини при широкому діапазоні можливих розподілів спостережень;

- дослідження методом Монте-Карло ефективності запропонованих методів;

- експериментальна перевірка запропонованої методики оцінювання непевності екстремальних спостережень під час контролю механічних параметрів пластмасових труб.

## РОЗДІЛ 2

### МЕТОДИКА ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ ЯКИМИ Є ЕКСТРЕМАЛЬНІ СПОСТЕРЕЖЕННЯ

У певних випадках, зокрема під час випробувань зразків продукції, екстремальне (мінімальне або максимальне) значення спостережень є результатом вимірювання і непевність цього значення має бути знайденою, проте рекомендацій щодо її оцінювання не подано в GUM [1].

Задачі оцінювання непевності випадкових екстремальних спостережень за своєю суттю є близькими до задач виявлення та виключення так званих аномальних спостережень (промахів, англ. outliers) [2,12,81,82,99,100]. Однак, між цими задачами є істотна відмінність, яка полягає у наступному:

1. Під час досліджень на аномальність аналізують максимальне значення модуля відхилення спостережень від середнього значення вибірки, переважно пронормованого до стандартного відхилення (або його оцінки), наприклад, як у широко використовуваному критерії Граббса [82], тобто під час дослідження немає значення яке спостереження (мінімальне або максимальне) може бути аномальним. Натомість залежно від змісту контролю конкретного параметру виробу аналізові непевності підлягає лише одне крайнє спостереження: або лише мінімальне (якщо значення контрольованого параметру має задовольняти умові  $x_{\text{дон}} \geq x_{\text{min}}$ ), або лише максимальне (якщо значення контрольованого параметру має задовольняти умові  $x_{\text{max}} \leq x_{\text{дон}}$ ), але не одночасно. При цьому інше значення, наприклад, максимальне, не аналізують, якщо критичним параметром під час контролю є мінімальне спостереження і навпаки.

2. Під час досліджень на аномальність не враховують можливі зміни спостережень внаслідок інструментальних впливів, зокрема систематичних, які ніяким чином не проявляються і не можуть бути виявленні лише самими статистичними тестами. У задачах контролю під час оцінювання непевності екстремальних спостережень такі впливи мусять бути враховані.



3. Відмінність цих задач закладена також у їх кінцевій меті: дослідження на аномальність має на меті виявити (за відповідним статистичним критерієм) і вилучити аномальне спостереження і далі опрацьовувати решта спостережень без цього спостереження, а під час контролю непевність екстремального спостереження оцінюють з метою подальшої можливості обґрунтованого порівняння з допустимим значенням, яке встановлене відповідно лише до вимог щодо якісних показників виробу і незалежне від статистичних критеріїв виявлення аномальних спостережень.

Тому, цей розділ присвячено розробленню нових та вдосконаленню існуючих методів оцінювання непевності вимірювань, коли результатом вимірювання є екстремальне значення, а також проводитимуться дослідження спостережень, які можуть мати довільний розподіл, зокрема нормальний, рівномірний, Лапласа, арксинусоїдний та навіть Коші, але у всіх випадках розподіл екстремальних значень не збігається з розподілом самих спостережень.

## 2.1 Екстремальні спостереження

У практиці вимірювань зустрічаються випадки, коли результатом експериментального вимірювання не є, як зазвичай у більшості випадках прийнято, середнє значення. Результатом експерименту можуть стати екстремальні значення, тобто мінімальне або максимальне значення вибірки з декількох спостережень (рисунок 2.1) і непевність цього значення необхідно знайти, аби забезпечити правильність виконання опрацювання результатів вимірювань. Мінімальне або максимальне значення є випадковими величинами.

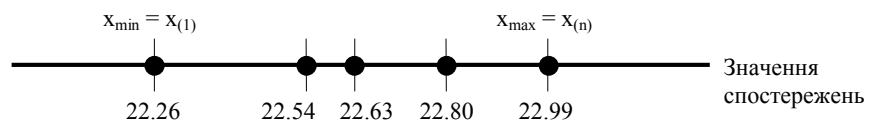


Рисунок 2.1 – Приклад екстремальних спостережень із  $n = 5$  спостережень

Зокрема при дослідженні механічних властивостей параметрів виробу результатом вимірювання є мінімальне значення  $x_{\min}$ , яке є першим з

впорядкованих спостережень  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , тобто  $x_{\min} = x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . В більшості досліджень у харчовій промисловості результатом може бути є максимальне значення  $x_{\max}$  - останнє з впорядкованих спостережень  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq x_{(3)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ , тобто  $x_{\max} = x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Отже, при дослідженні на міцність, розтяг чи інших механічних властивостей параметрів матеріалів у виробничому процесі, а також при дослідженні вмісту шкідливих домішок чи елементів у продуктах харчової промисловості за результат вимірювання доцільно приймати екстремальне спостереження. Особливо це стосується контролювання параметрів виробів, які можуть спричинити небезпечну ситуацію для здоров'я чи навіть життя людини.

Оскільки під час контрольних вимірювань, як було зазначено вище  $x_1$  та  $x_n$  є випадковими величинами і кожна з них характеризується можливим розкидом значень – непевністю, тому, мінімальне спостереження  $x_1$  слід порівнювати з допустимим значенням  $x_{\text{доп.,min}}$  та максимальне спостереження  $x_n$  слід порівнювати з допустимим значенням  $x_{\text{доп.,max}}$  із врахуванням їх розширеної непевності (рисунок 2.2).

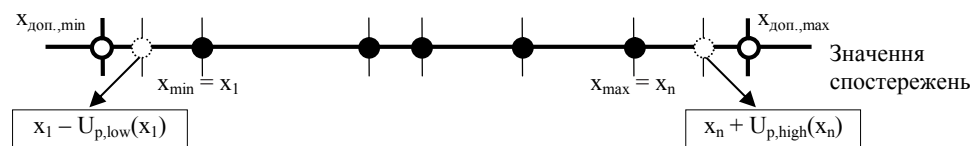


Рисунок 2.2 – Порівняння екстремальних спостережень з допустимими значеннями

Виходячи із суті контрольних порівнянь (рисунок 2.2) при порівнянні з допустимими значеннями застосовуємо односторонні розширені непевності:

- для мінімального  $x_1$  спостереження – нижню (ліву)  $U_{p,low}(x_1)$ ;
- для максимального  $x_n$  спостереження – верхню (праву)  $U_{p,high}(x_n)$ .

Тобто, після обчислення розширеної непевності  $U_{p,low}(x_1)$  та  $U_{p,high}(x_n)$  за формулами:

$$U_{p,low}(x_1) = k_{1,low}(n, p) \cdot u_c(x_1), \quad (2.1)$$

$$U_{p,high}(x_n) = k_{1,high}(n, p) \cdot u_c(x_n), \quad (2.2)$$

порівняння (рисунок 2.2) має відбуватися згідно з залежностей [30-33]:

$$x_1 - U_{p,low}(x_1) \geq x_{доп.,min} , \quad (2.3)$$

$$x_n + U_{p,high}(x_n) \leq x_{доп.,max} . \quad (2.4)$$

При симетричних розподілах спостережень розширені непевності мінімального та максимального спостереження однакові  $U_{p,low}(x_1) = U_{p,high}(x_n)$  з врахуванням протилежного знаку. Тому далі для аналізу достатньо обчислити розширену непевність лише мінімального спостереження.

Тому для опрацювання та оцінювання непевності результатів спостережень, у яких інформативним параметром є екстремальне значення, не може застосовуватись стандартна методика до опрацювання результатів таких спостережень згідно з GUM [1]. Для цього потрібно детально дослідити ймовірнісні та статистичні характеристики екстремальних спостережень.

## 2.2 Розподіл екстремальних спостережень

При опрацюванні результатів вимірювань при контролюванні якості виробів чи продукції одержують вибірку певного обсягу, зазвичай невеликого  $n = 4, \dots, 10$  спостережень.

На рисунку 2.3, а показані приклади для кількості реалізацій  $M = 6$  по  $n = 5$  випадкових спостережень з нормальним розподілом ( $m_x = 10, \sigma_x = 1$ ) (рисунок 2.3, б). Випадкові мінімальні спостереження (рисунок 2.3, а) всіх  $M = 6$  реалізацій позначено як  $x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}, x_{5,1}, x_{6,1}$  та максимальні  $x_{1,5}, x_{2,5}, x_{3,5}, x_{4,5}, x_{5,5}, x_{6,5}$  у впорядкованих вибірках. Екстремальні (мінімальні або максимальні) спостереження у різних вибірках є випадковими величинами із певною густиною розподілу  $p_1(x_1), p_n(x_n)$  (рисунок 2.3, в).

Для довільної густини розподілу  $p(x)$  та функції розподілу  $F(x)$  випадкової величини  $x$  теоретична густина розподілу  $p_1(x_1)$  мінімального елемента  $x_1$  (далі мінімальне спостереження  $x_{(1)}$  позначається, як  $x_1$ ) за відомих параметрів розподілу спостережень описується, як розподіл 1-ої порядкової статистики:

$$p1(x_1) = n \cdot [1 - F(x_1)]^{n-1} \cdot p(x_1), \quad (2.5)$$

а для  $pn(x_n)$  максимального елементу  $x_n$  (далі максимальне спостереження  $x_{(n)}$  позначається, як  $x_n$ ) описується, як розподіл остаточної  $n$ -ої порядкової статистики, тобто [30-33,71]:

$$pn(x_n) = n \cdot F(x_n)^{n-1} \cdot p(x_n). \quad (2.6)$$

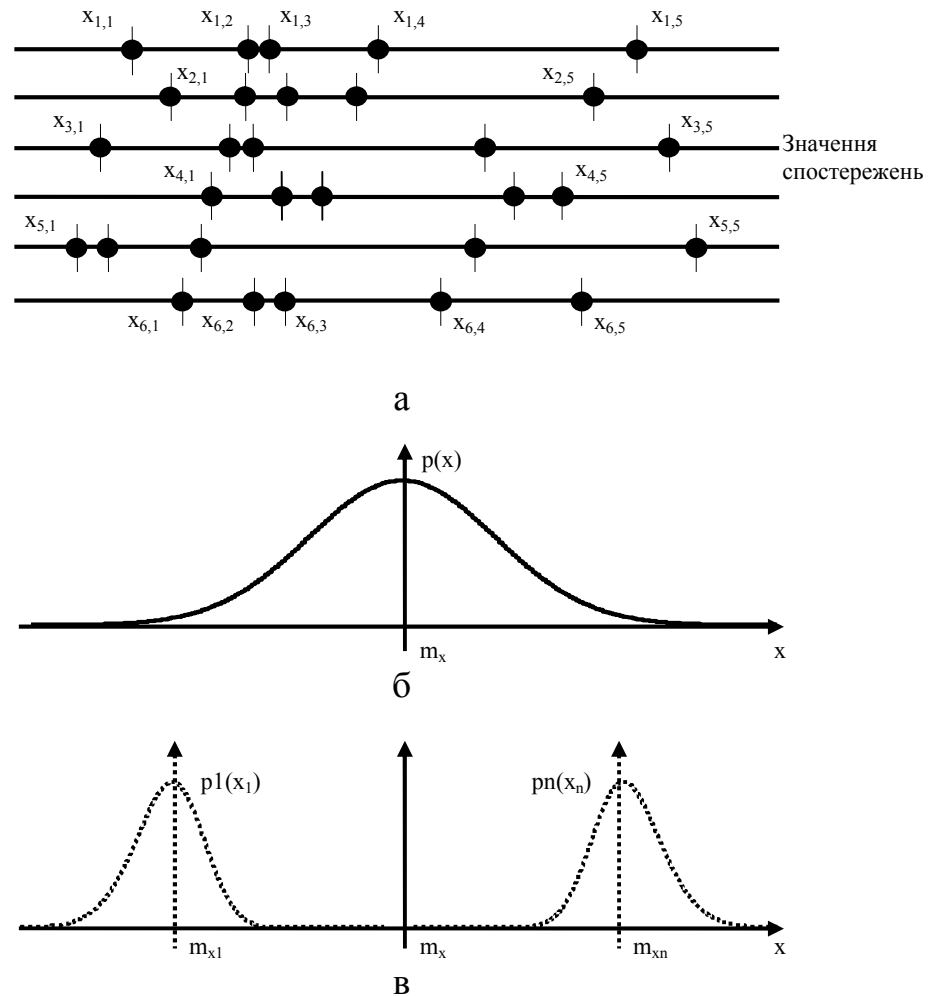


Рисунок 2.3 –Спостереження із генеральної сукупності з нормальним розподілом та розподіли екстремальних спостережень:

а –  $M = 6$  вибірок по  $n = 5$  спостережень,

б – густина нормального розподілу  $p(x)$  з  $m_x = 10$ ,  $\sigma_x = 1$ , в - густини розподілів мінімального  $p1(x_1)$  та максимального  $pn(x_n)$  спостереження

Розподіли мінімального спостереження  $p1(x_1)$  описаний за (2.5) та максимального  $pn(x_n)$  за (2.6) показано на рисунку 2.3, в.

Із виразів (2.5) та (2.6) випливає, що розподіли екстремальних спостережень є несиметричними і відмінні від нормального, навіть якщо самі спостереження отримано з генеральної сукупності з нормальним розподілом. Відхилення розподілів екстремальних спостережень від нормального залежить від кількості спостережень  $n$  і є тим більшим, чим більше розподіл генеральної сукупності відхиляється від нормального. При цьому густини розподілів  $p_1(x_1)$  та  $p_n(x_n)$  (рисунок 2.3, в) є симетричними відносно математичного сподівання  $m_x$  це пояснюється тим що для симетричних густин розподілу спостережень для функції розподілу справедлива залежність:  $F(x) = 1 - F(-x)$ , або  $F(-x) = 1 - F(x)$  рисунок 2.4.

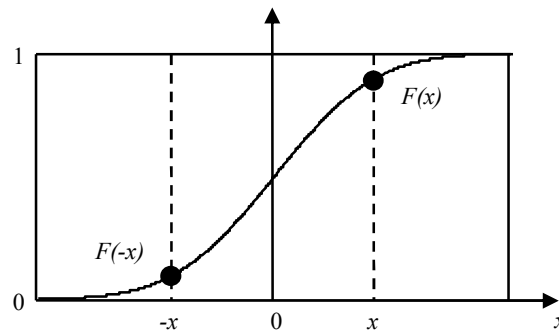


Рисунок 2.4 – Приклад функції розподілу для симетричної густини розподілу

Отже, густина розподілу  $p_1(x_1)$  та математичне сподівання  $m_{x_1} = m_1 = M[x_1]$  мінімального спостереження є симетричні до густини розподілу  $p_n(x_n)$  та математичного сподівання  $m_{x_n} = m_n = M[x_n]$  максимального, тобто:

$$F(x_1) = 1 - F(x_n), \quad (2.7)$$

$$M[x_n] = -M[x_1], \quad m_n = -m_1, \quad (2.8)$$

а дисперсії  $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_1^2 = D^2[x_1]$ ,  $\sigma_{x_n}^2 = \sigma_n^2 = D^2[x_n]$  є однаковими:

$$D^2[x_1] = D^2[x_n], \quad \sigma_1^2 = \sigma_n^2. \quad (2.9)$$

Математичне сподівання  $m_1$  та дисперсія  $\sigma_1^2$  для мінімального спостереження  $x_1$  згідно з (2.5) можуть бути описані наступними виразами:

$$m_1 = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot [1 - F(x_1)]^{n-1} \cdot p(x_1) dx_1, \quad (2.10)$$

$$\sigma_1^2 = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 \cdot [1 - F(x_1)]^{n-1} \cdot p(x_1) dx_1 - m_1^2, \quad (2.11)$$

а математичне сподівання  $m_n$  та дисперсія  $\sigma_n^2$  для максимального спостереження  $x_n$  за (2.6) описані виразами:

$$m_n = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_n \cdot [F(x_n)]^{n-1} \cdot p(x_n) dx_n = -m_1, \quad (2.12)$$

$$\sigma_n^2 = n \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 \cdot [F(x_n)]^{n-1} \cdot p(x_n) dx_n - m_n^2 = \sigma_1^2. \quad (2.13)$$

Завдяки симетрії розподілів  $p_1(x_1)$  та  $p_n(x_n)$  їх непарні моменти відрізняються лише знаком, а парні, наприклад, дисперсія є однаковою (2.9). Тому параметри непевності максимального значення можна обчислити так само, як і для мінімального значення. Однак слід прийняти до уваги протилежний знак відхилення максимального значення від очікуваного [30-33].

Зокрема, при нормованому ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) нормальному розподілі спостережень теоретичні розподіли  $p_{1\text{норм}}(x_1) = p_1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  (2.14) та  $p_{n\text{норм}}(x_n) = p_n(x_n)$  максимального значення  $x_n$  (2.15) згідно з (2.5), (2.6) можна описати наступними виразами:

$$p_1(x_1) = n \cdot \left[ 1 - \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} \exp \frac{-x_1^2}{2} dx_1 \right) \right]^{n-1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x_1^2}{2} \right), \quad (2.14)$$

$$p_n(x_n) = n \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_n} \exp \frac{-x_n^2}{2} dx_n \right)^{n-1} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x_n^2}{2} \right). \quad (2.15)$$

Одержані залежності для  $n = 3$  та  $n = 10$  при нормальному розподілі спостережень згідно з (2.14), (2.15) зображено на рисунку 2.5, з яких видно, що вони для мінімального і максимального спостереження є взаємно симетричними

та їх математичні сподівання різняться тільки знаком, а дисперсії є однаковими, а саме:

- для  $n = 3$ :  $m_1 = -0,84628$ ,  $m_n = 0,84628$ ,  $\sigma_1^2 = \sigma_n^2 = 0,74798$ ;

- для  $n = 10$ :  $m_1 = -1,53875$ ,  $m_n = 1,53875$ ,  $\sigma_1^2 = \sigma_n^2 = 0,58681$ .

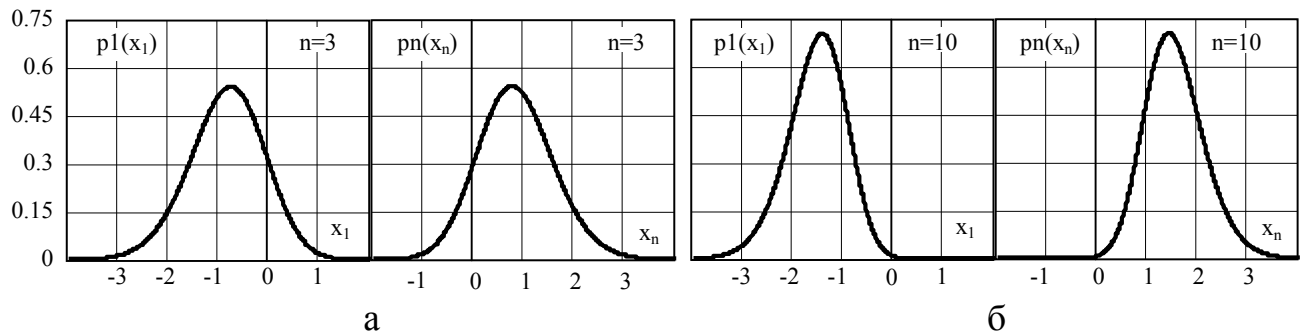
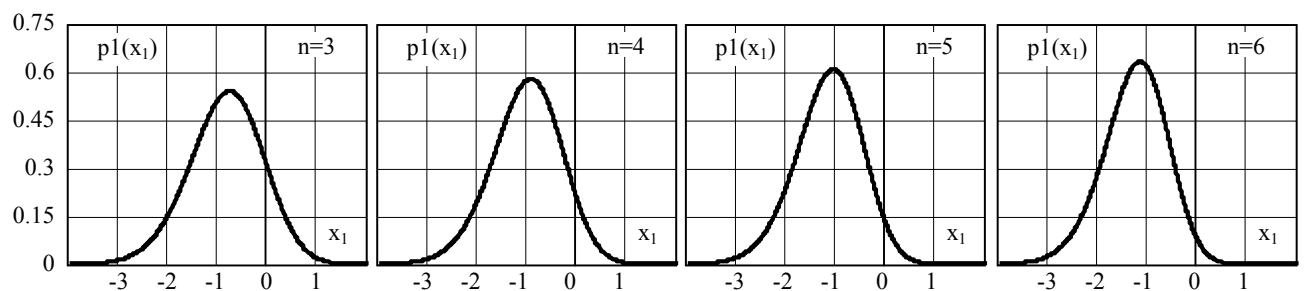


Рисунок 2.5 – Теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  та  $pn(x_n)$  при нормальному розподілі спостережень ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ): а - мінімального значення  $x_1$  при  $n = 3$ , б - максимального значення  $x_n$  при  $n = 10$

Зокрема, для нормованого ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) нормального розподілу математичне сподівання  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$  (індекс «0» означає, що даний параметр відноситься до нормованого розподілу ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ )) розраховане за формулою (2.10), (2.12) і стандартне відхилення  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  за формулою (2.11), (2.13) (для мінімального та максимального значення однакове відповідно до (2.9)) для кількості спостережень  $n = 5$  подано в таблиці 2.1 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.1).

Далі аналізуватимуться лише характеристики мінімального значення, оскільки всі характеристики для максимального є симетричними до нього. На рисунку 2.6 показано теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  мінімального значення.



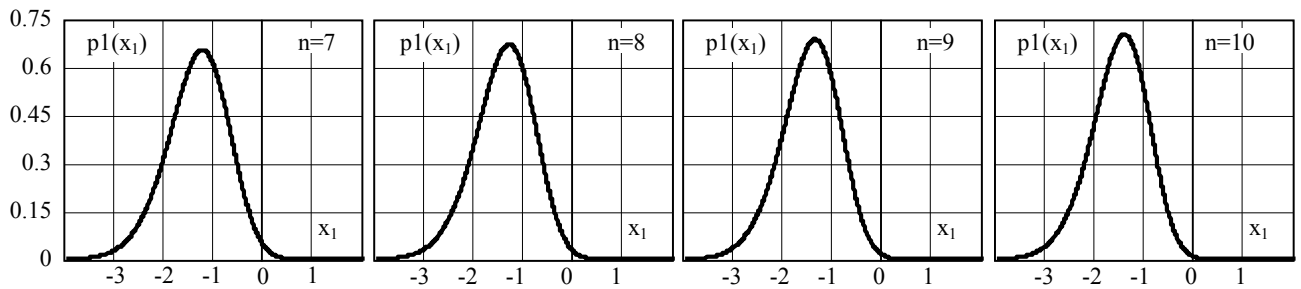


Рисунок 2.6 - Теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  при нормальному розподілі спостережень ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) для  $n = 3, \dots, 10$

Таблиця 2.1

Очікувані значення  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$ ,  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для нормованого нормального розподілу

n	$m_{0,1}$	$m_{0,n}$	$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$	$\sigma_{0,n} = \sigma_{0,1}$
5	-1,16296	1,16296	0,66898	0,66898

### 2.3 Методика оцінювання непевності екстремальних значень при нормальному розподілі

Для оцінювання стандартної та розширеної непевності мінімального значення спостережень слід знайти залежності цих непевностей від теоретичних і експериментальних характеристик зареєстрованих спостережень.

Якщо математичне сподівання спостережень  $m_x \neq 0$  та стандартне відхилення  $\sigma_x \neq 1$ , тоді випадкову величину  $x$  можна пронормувати наступним чином:

$$x_0 = (x - m_x) / \sigma_x . \quad (2.16)$$

Тоді для мінімального спостереження  $x_1$  для відомих значень параметрів  $m_{0,1}$  та  $\sigma_{0,1}$  обчислених для нормованого розподілу ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) параметри  $m_1$  (2.10) та  $\sigma_1$  (2.12) враховуючи, що для мінімального спостереження  $x_1$  із (2.16)  $x_{0,1} = (x_1 - m_x) / \sigma_x$ , звідки  $x_1 = m_x + x_{0,1} \cdot \sigma_x$  можна обчислити за виразами [19,76,101]:



$$m_1 = M[x_1] = M[m_x + x_{0,1} \cdot \sigma_x] = m_x + m_{0,1} \cdot \sigma_x, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= M[(x_1 - m_1)^2] = M[(m_x + x_{0,1} \cdot \sigma_x - m_x - m_{0,1} \cdot \sigma_x)^2] = \\ &= \sigma_x^2 \cdot M[(x_{0,1} - m_{0,1})^2] = \sigma_x^2 \cdot \sigma_{0,1}^2, \\ \sigma_1 &= \sigma_x \cdot \sigma_{0,1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Оскільки для максимального спостереження  $x_n$  очікуване значення математичного сподівання  $m_n = -m_1$ , тому згідно з виразу (2.12), а згідно з (2.13) стандартне відхилення  $\sigma_n = \sigma_1$ , то математичне сподівання  $m_n$  і стандартне відхилення  $\sigma_n$  максимального спостереження  $x_n$  можна обчислити за виразами [30-33]:

$$m_n = M[x_n] = m_x - m_{0,1} \cdot \sigma_x, \quad (2.19)$$

$$\sigma_n = \sigma_{0,1} \cdot \sigma_x. \quad (2.20)$$

Отже, теоретична стандартна непевність мінімального та максимального спостережень є однаковою і рівною:

$$u_A(x_1) = u_A(x_n) = \sigma_{0,1} \cdot \sigma_x = \sigma_{0,1} \cdot u(x), \quad (2.21)$$

де  $u_A(x)$  – стандартна непевність спостережень.

На практиці очікувані значення математичного сподівання  $m_x$  і стандартного відхилення  $\sigma_x$  спостережень є невідомими. Однак можливо обчислити їх оцінки: середнє значення  $\bar{x}$  за формулою (1.1) та стандартне відхилення  $s_x$  за формулою (1.2). Використовуючи оцінки  $\bar{x}$ ,  $s_x$  у формулі (2.17), (2.19), можна обчислити оцінки математичного сподівання  $\hat{m}_1$  або  $\hat{m}_n$  та стандартного відхилення  $\hat{\sigma}_1$  або  $\hat{\sigma}_n$  мінімального  $x_1$  або максимального  $x_n$  спостереження [30-33]:

$$\hat{m}_1 = \bar{x} + m_{0,1} \cdot s_x, \quad \hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_n = \sigma_{0,1} \cdot s_x, \quad (2.22)$$

$$\hat{m}_n = \bar{x} - m_{0,1} \cdot s_x, \quad \hat{\sigma}_n = \sigma_{0,1} \cdot s_x. \quad (2.23)$$

Натомість експериментальна стандартна непевність  $u_A(x_1)$  мінімального та  $u_A(x_n)$  максимального спостереження може бути обчислена на основі (1.2) та (2.18), (2.20), (2.21) за виразом з підстановкою  $s_x$  замість  $\sigma_x$  [30-33]:

$$u_A(x_1) = u_A(x_n) = \sigma_{0,1} \cdot s_x. \quad (2.24)$$

У (2.24)  $\sigma_x$  замінено на оцінку стандартного відхилення  $s_x$ .

Таким чином, для обчислення стандартної непевності мінімального та максимального спостережень відповідно до (2.24) слід обчислити оцінку  $s_x$  стандартного відхилення спостережень та використати, а як масштабний коефіцієнт - стандартне відхилення  $\sigma_{0,1}$  мінімального (максимального) спостережень для нормованого розподілу ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ).

Складова інструментальної непевності  $u_c(x_1)$  детально проаналізована у 2 розділі п. 2.6 та п. 2.7, а у розділі 4 п. 4.5.5 обчислена відповідно до конкретних ЗВТ та результатів вимірювань при контролі пластмасових труб.

Для обчислення розширеної непевності мінімального значення необхідно мати густину розподілу  $p_1(z_1)$  або  $pn(z_n)$  нормованого до  $s_x$  відхилення мінімального спостереження  $x_1$  або максимального  $x_n$  від середнього значення  $\bar{x}$  [30-33]:

$$z_1 = \frac{x_1 - \bar{x}}{s_x}. \quad (2.25)$$

$$z_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s_x}. \quad (2.26)$$

Як було зазначено вище, відхилення  $z_1$  мінімального спостереження  $x_1$  і  $z_n$  максимального  $x_n$  є випадковими величинами, що мають симетричні відносно  $\bar{x}$  розподіли.

Густину розподілу  $p_1(z_1)$  (аналогічно  $pn(z_n)$ ) можна знайти із  $n$  вимірної густини розподілу порядкових статистик [71]:

$$p_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = n! \cdot p(x_1) \cdot p(x_2) \cdot p(x_3) \cdot \dots \cdot p(x_n), \quad (2.27)$$

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_n$$

Цю процедуру можна описати наступними кроками [71]:

- для всіх  $x_i$  потрібно зробити заміну:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}; \quad (2.28)$$

- оскільки для обчислених  $\bar{x}$  і  $s_x$  серед  $n$  значень  $x_i$  залишається лише  $(n - 2)$  незалежні значення, тому необхідно виразити два довільні значення, наприклад два останні  $x_{n-1}$  та  $x_n$  при знаходженні розподілу  $p_1(z_1)$ , або два перші  $x_1, x_2$  при знаходженні розподілу  $p_n(z_n)$  через решта змінних та  $\bar{x}$  і  $s_x$ ;

- обчислити якобіан перетворення (2.28):

$$j_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-2}, \bar{x}, s_x), \quad \text{або} \quad j_n(z_3, z_4, \dots, z_n, \bar{x}, s_x); \quad (2.29)$$

- обчислити густину розподілу  $p_1(z_1)$  або  $p_n(z_n)$  завдяки  $(n - 2)$  кратного інтегрування  $n$  вимірної сумісної густини розподілу  $(n - 2)$  порядкових статистик пронормованих згідно з (2.27) та  $\bar{x}$  і  $s_x$  з урахуванням якобіана (2.29):

$$p_1(z_1) = \int_{l_2} \int_{l_3} \dots \int_{l_{n-2}} n! \cdot p_n(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-2}, \bar{x}, s_x) \cdot j_1(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-2}, \bar{x}, s_x) dz_{n-2}, \dots, dz_3 dz_2, \quad (2.30)$$

де  $l_2, l_3, \dots, l_{n-2}$  – межі для інтегрування змінних  $z_1, z_2, z_{n-2}$ , які враховують:

- впорядкованість  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_{n-2}$ ;
- додатне значення якобіану  $j_1(z_1, z_2, z_3, \dots, z_{n-2}, \bar{x}, s_x) > 0$ ;
- взаємну незалежність  $\bar{x}$  та  $s_x$  для симетричних розподілів спостережень [71] і незалежність відхилень  $z_1$  або  $z_n$  від  $\bar{x}$  та  $s_x$ .

В загальному випадку при довільних розподілах обчислення цих  $(n - 2)$  інтегралів для  $p_1(z_1)$  або  $p_n(z_n)$  у (2.30) є надзвичайно трудомістким завданням. Тому більша частина наступних досліджень, що пов'язані з використанням густин розподілів  $p_1(z_1)$  або  $p_n(z_n)$ , виконана методом Монте-Карло [98].

Загалом розподіли  $p_1(z_1)$  та  $p_n(z_n)$  залежать тільки від густини розподілу спостережень  $p(x)$  і кількості спостережень  $n$  і не залежить від  $\bar{x}$  і  $s_x$  [30-33]. Однак незалежно від густини розподілу спостережень  $p(x)$  діапазон можливих

змін випадкових екстремальних  $x_1, x_n$  спостережень та границі меж ділянок густини розподілу  $p_1(z_1)$  або  $p_n(z_n)$  випадкової величини  $z_1$  (2.25) або  $z_n$  (2.26) залежить лише від номеру ділянки на якій розглядається розподіл. У найгіршому випадку (рисунок 2.7):

-  $i$  впорядкованих спостережень  $x_j$  набувають мінімального значення  $x_1$ :

$$\bullet x_j = x_{\min} = x_1, (j = 1, \dots, i);$$

-  $n - i$  спостережень  $x_j$  набувають максимального значення  $x_n$ :

$$\bullet x_j = x_{\max} = x_n, (j = i + 1, \dots, n).$$

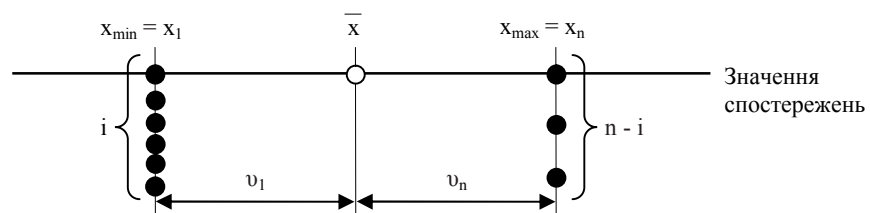


Рисунок 2.7 – Діапазон можливих змін та границі меж між випадковими значеннями екстремальних спостережень при  $n = 9$

Тоді із рисунку 2.7 можемо записати середнє значення  $\bar{x}$  (1.1) та оцінку дисперсії  $s_x^2$  (1.2) результатів спостережень у вигляді:

$$\bar{x}(i) = \frac{i \cdot x_1 + (n - i) \cdot x_n}{n}, \quad (2.31)$$

$$s_x^2(i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( i \cdot (x_1 - \bar{x})^2 + (n - i) \cdot (x_n - \bar{x})^2 \right) = \frac{i \cdot (n - i) \cdot (x_1 - x_n)^2}{n \cdot (n - 1)}, \quad (2.32)$$

Відповідно до рисунку 2.7 та у (2.32) відхилення  $v_1$  мінімального спостереження  $x_1$  від середнього значення  $\bar{x}$  та відхилення  $v_n$  максимального спостереження  $x_n$  від середнього значення  $\bar{x}$  становлять:

$$v_1 = x_1 - \bar{x} = \frac{(n - i) \cdot (x_1 - x_n)}{n}, \quad (2.33)$$

$$v_n = x_n - \bar{x} = \frac{i \cdot (x_n - x_1)}{n}. \quad (2.34)$$

Виконавши підстановку одержаних виразів (2.31), (2.32) у (2.25) та (2.26), отримуємо значення не випадкових меж  $z_{1(b,i)}$  та  $z_{n(b,i)}$  між ділянками можливих значень випадкової змінної  $z_1$  та  $z_n$  для довільного значення  $i$  [30-33]:

$$z_{1(b,i)} = \frac{x_1 - \bar{x}}{s_x^2} = -\sqrt{\frac{(n-1) \cdot (n-i)}{n \cdot i}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad (2.35)$$

$$z_{n(b,i)} = \frac{x_n - \bar{x}}{s_x^2} = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot i}{n \cdot (n-i)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.36)$$

Тому, незалежно від густини розподілу спостережень, розподіли  $p_1(z_1)$  та  $p_n(z_n)$  складаються з  $n - 1$  ділянок, межі між якими  $z_{1(b,i)}$  (2.35) та  $z_{n(b,i)}$  (2.36). Границі при  $i = 1$  та  $i = n - 1$  у (2.35), (2.36) можливих змін випадкових значень  $z_1$  або  $z_n$  також не залежать від густини розподілу і для довільного розподілу становлять [30-33]:

$$-(n-1)/\sqrt{n} \leq z_1 \leq -1/\sqrt{n}. \quad (2.37)$$

$$1/\sqrt{n} \leq z_n \leq (n-1)/\sqrt{n}. \quad (2.38)$$

Наприклад, при кількості спостережень  $n = 5$  (рисунок 2.8):

- границі та межі можливих змін випадкових значень  $z_1$  згідно із (2.37) становлять  $-4/\sqrt{5} \leq z_1 \leq -1/\sqrt{5}$ , тобто  $-1,789 \leq z_1 \leq -0,447$ ;

- границі та межі можливих змін випадкових значень  $z_n$  згідно із (2.38) становлять  $1/\sqrt{5} \leq z_n \leq 4/\sqrt{5}$ , тобто  $0,447 \leq z_n \leq 1,789$ .



Рисунок 2.8 – Границі та межі між ділянками:  
а - густини розподілу  $p_1(z_1)$ , б - густини розподілу  $p_n(z_n)$

Якщо  $n = 5$ , тоді весь інтервал можливих значень  $z_1$  складається із  $n - 2 = 3$  ділянок межі яких:  $z_{1(b,1)} = -4/\sqrt{5}$ ,  $z_{1(b,2)} = -\sqrt{6/5}$ ,  $z_{1(b,3)} = -\sqrt{8/15}$ ,  $z_{1(b,4)} = -1/\sqrt{5}$

(тобто згідно з (2.35), наприклад при  $i = 1$  та  $i = 2$ :  $z_{1(b,1)} = -(n-1)/\sqrt{n}$ ,  $z_{1(b,2)} = -\sqrt{(n-1)(n-2)/2n}$ ).

Оскільки при 3-ох ділянках ймовірність знаходження випадкової величини  $z_1$  на першій ділянці між  $z_{1(b,1)}$  та  $z_{1(b,2)}$  приблизно становить  $\geq 1/3$ :

$$p1 = \int_{z_{1(b,1)}}^{z_{1(b,2)}} p1(z_1) dz_1 \geq \frac{1}{n-2} = \frac{1}{3}, \quad (2.39)$$

тому згідно з (2.39) для розрахунку лівосторонньої розширеної непевності при рівнях довіри  $p = 0,90; \dots; 0,99$  можна використати аналітичний опис густини розподілу лише на першій ділянці.

Зокрема, для нормального розподілу спостережень ( $n = 5$ ), після трикратного інтегрування (2.30) на першій ділянці між  $z_{1(b,1)}$  та  $z_{1(b,2)}$ , тобто  $-4/\sqrt{5} \leq z_1 \leq -\sqrt{6/5}$  теоретичний розподіл  $p1(z_1)$  (рисунок 2.9) (розподіл  $pn(z_n)$  дзеркально симетричний відносно нуля до  $p1(z_1)$ ) можна описати залежністю:

$$p1(z_1) = \frac{5\sqrt{5}}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{5}{16} z_1^2}, \quad -\frac{4}{\sqrt{5}} \leq z_1 \leq -\sqrt{\frac{6}{5}}. \quad (2.40)$$

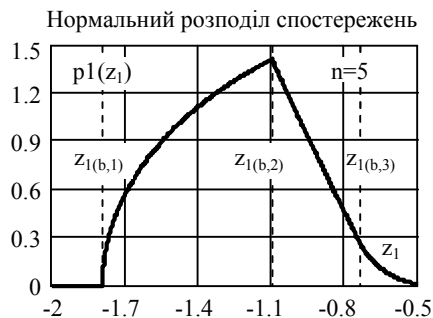


Рисунок 2.9 - Розподіл  $p1(z_1)$  випадкової змінної  $z_1$ :  
 $z_{b,1} \approx -4/\sqrt{5} \approx -1,789$ ,  $z_{b,2} \approx -\sqrt{6/5} \approx -1,095$ ,  $z_{b,3} \approx -\sqrt{8/5} \approx -1,730$  [30-33]

А інтегральну функцію розподілу у цьому інтервалі від  $z_{1(b,1)} = -4\sqrt{5}$  до  $z_{1(b,2)} = -\sqrt{6/5}$  можна знайти, проінтегрувавши вираз (2.40):

$$F1(z_1) = \int_{-4/\sqrt{5}}^{z_1} p1(z_1) dz_1 = \frac{5}{2} \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot z_1 \sqrt{5 - \left(\frac{5}{4} z_1\right)^2} + \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{4} z_1\right) + 1 \right]. \quad (2.41)$$

Для  $z_1 = -\sqrt{6/5}$  інтегральна функція (2.41), приймає значення  $F(-\sqrt{6/5}) = 0,6806$ , тобто на першій ділянці  $-4/\sqrt{5} \leq z_1 \leq -\sqrt{6/5}$  міститься понад 68 % площі густини розподілу, а для знаходження лівосторонньої (односторонньої) розширеної непевності використовують значення ймовірності ( $\alpha = 1 - p$ ) від 1 % до 10 %, які  $\ll 68\%$ .

Оскільки для порівняння мінімального спостереження з допустимим значенням необхідно мати лише нижню границю  $z_{1,1,low}(n, p)$ , тому в цьому випадку потрібно обчислити односторонню (лівосторонню) розширену непевність  $U_{p,low}(x_1)$ , тому для заданої кількості спостережень  $n$  та рівня довіри  $p$   $z_{1,1,low}(n, p)$  розраховуємо із розв'язку нелінійного рівняння для функції розподілу  $F1(z_1)$  (2.41) [30-33]:

$$\int_{z_{1(b,1)}}^{z_{1,1,low}(n,p)} p1(z_1) dz_1 = F1(z_{1,1,low}(n, p)) = 1 - p. \quad (2.42)$$

Обчислені відповідно до (2.42) з урахуванням (2.41) значення для  $z_{1,1,low}(n, p)$  при  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975$  і  $0,99$  та для  $n = 5$  подано у таблиці 2.2.

Таблиця 2.2

Значення коефіцієнта  $z_{1,1,low}(n, p)$   
при нормальному розподілі спостережень та при  $n = 5$  [30-33]

	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,low}(5, p)$	-1,6016	-1,6346	-1,6714	-1,7150	-1,7489

Для обчислення односторонньої нижньої границі  $x_{1,1,p,low}$  для  $x_1$  або верхньої  $x_{n,1,p,high}$  для  $x_n$  використано формули:

$$x_{1,1,p,low} = \bar{x} + z_{1,1,low}(n, p) \cdot s_x, \quad (2.43)$$

$$x_{n,1,p,high} = \bar{x} - z_{n,1,high}(n, p) \cdot s_x. \quad (2.44)$$

де  $z_{1,1,low}(n, p)$  та  $z_{n,1,high}(n, p)$  – коефіцієнти (2.42), які обчислюють для кількості спостережень  $n$  та рівня довіри  $p$  з густини розподілу  $p1(z_1)$  або  $pn(z_n)$ .

Односторонні нижню  $x_{1,1,p,low}$  або верхню  $x_{n,1,p,high}$  границі відповідно до рекомендацій щодо вираження непевності результатів вимірювань [1] слід виразити відносно самих значень  $x_1$  або  $x_n$  та їх стандартних непевностей  $u_A(x_1)$  або  $u_A(x_n)$ . Для цього використаємо математичні сподівання  $m_{z_1}$  або  $m_{z_n}$  величин  $z_1$  або  $z_n$ :

$$M[z_1] = m_{z_1} = \int_{z_{1(b,1)}}^{z_{1(b,n)}} z_1 \cdot p_1(z_1) dz_1, \quad (2.45)$$

$$M[z_n] = m_{z_n} = \int_{z_{n(b,1)}}^{z_{n(b,n)}} z_n \cdot p_n(z_n) dz_n. \quad (2.46)$$

І у відповідності до (2.25) і (2.45) або (2.26) і (2.46) очікувані значення екстремальних спостережень можна обчислити за виразами:

$$x_{1,очік.} = \bar{x} + m_{z_1} \cdot s_x, \quad (2.47)$$

$$x_{n,очік.} = \bar{x} + m_{z_n} \cdot s_x. \quad (2.48)$$

Із (2.47), (2.49) виразивши середні значення:  $\bar{x} = x_{1,очік.} - m_{z_1} \cdot s_x$ ,  $\bar{x} = x_{n,очік.} - m_{z_n} \cdot s_x$  та підставивши їх у (2.43), (2.44) довірчі границі (лівосторонні для мінімального  $x_1$  та правосторонні для максимального  $x_n$  спостереження) можна записати у формі:

$$x_{1,1,p,low} = x_{1,очік.} - k_{1,low}(n, p) \cdot u_A(x_1), \quad (2.49)$$

$$x_{n,1,p,high} = x_{n,очік.} + k_{1,high}(n, p) \cdot u_A(x_n), \quad (2.50)$$

де  $k_{1,low}(n, p)$ , або  $k_{1,high}(n, p)$  - коефіцієнти розширення, які не залежать від параметрів самих спостережень, але залежать тільки від кількості та густини розподілу генеральної сукупності:

$$k_{1,low}(n, p) = -(z_{1,1,low}(n, p) - m_{z_1}) / \sigma_{0,1}, \quad (2.51)$$

$$k_{1,high}(n, p) = -(z_{n,1,high}(n, p) - m_{z_n}) / \sigma_{0,1}. \quad (2.52)$$

Приймаючи до уваги, що у першому наближенні  $x_{1,очік.} \approx x_1$  (рисунок 2.10) та  $x_{n,очік.} \approx x_n$  то можемо записати довірчі границі у вигляді:



$$x_{1,1,p,\text{low}} \approx x_1 - k_{1,\text{low}}(n, p) \cdot u_A(x_1), \quad (2.53)$$

$$x_{n,1,p,\text{high}} \approx x_n + k_{1,\text{high}}(n, p) \cdot u_A(x_n). \quad (2.54)$$

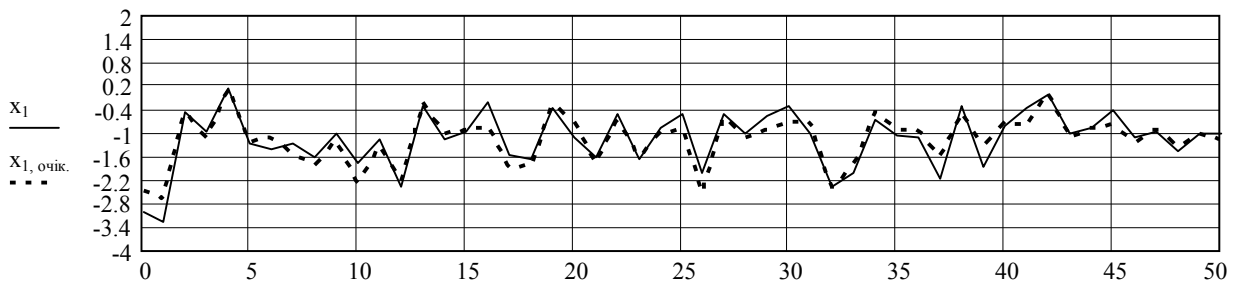


Рисунок 2.10 – Залежності мінімального значення  $x_1$  та очікуваного  $x_{1,\text{очік}}$  мінімального значення при нормальному розподілі спостережень та для  $n = 5$

## 2.4 Розподіли екстремальних значень при відмінних від нормального розподілах спостережень

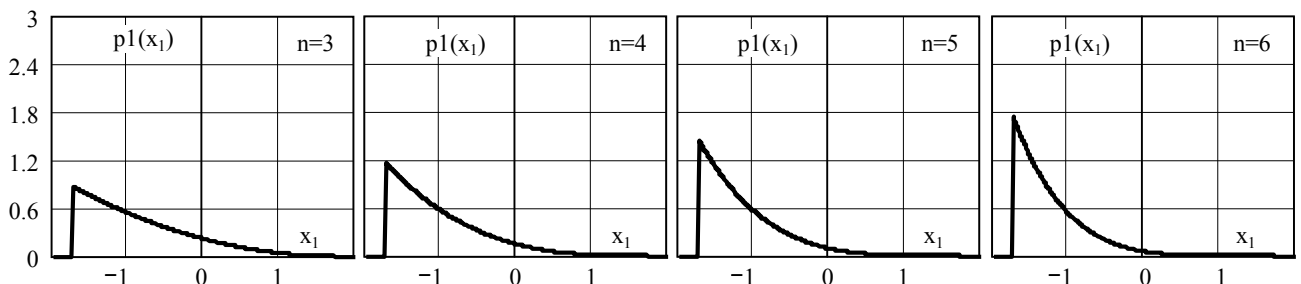
При рівномірному розподілі спостережень, коли  $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ , теоретичний розподіл  $p1_{\text{unif}}(x_1) = p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  згідно з формулою (2.5) матиме наступний вигляд:

$$p1(x_1) = n \cdot \left[ 1 - \frac{x_1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \right]^{n-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad -\sqrt{3} \leq x_1 < \sqrt{3}. \quad (2.55)$$

де  $p_{\text{unif}}(x_1) = 1/(2\sqrt{3})$  - густина рівномірного розподілу;

$$F_{\text{unif}}(x_1) = \int_{-\sqrt{3}}^{x_1} p_{\text{unif}}(x_1) dx_1 = (x_1 + \sqrt{3}) / (2\sqrt{3}) - \text{функція розподілу.}$$

Розподіли за виразом (2.55) при  $n = 3, \dots, 10$  показано на рисунку 2.11.



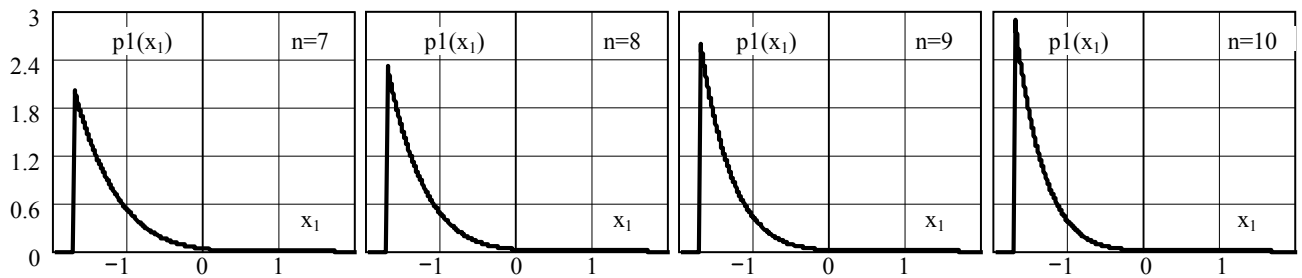


Рисунок 2.11 - Теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  при рівномірному розподілі спостережень для  $n = 3, \dots, 10$

Підставивши отримані значення густини та функції рівномірного розподілу до (2.10) - (2.13), обчислено очікувані значення математичного сподівання  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$  і стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для  $n = 5$  та подано у таблиця 2.3 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.1).

Таблиця 2.3

Очікувані значення  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$ ,  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для нормованого рівномірного розподілу

n	$m_{0,1}$	$m_{0,n}$	$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$	$\sigma_{0,n} = \sigma_{0,1}$
5	-1,15470	1,15470	0,48795	0,48795

При розподілі Лапласа ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ), густина розподілу  $p_{\text{Laplace}}(x_1) = e^{-\sqrt{2}|x_1|}/\sqrt{2}$  функція розподілу  $F_{\text{Laplace}}(x_1) = \begin{cases} (1/2)e^{\sqrt{2}\cdot x_1}, & x_1 < 0 \\ 1 - (1/2)e^{-\sqrt{2}\cdot x_1}, & x_1 \geq 0 \end{cases}$ , теоретичний розподіл  $p1_{\text{Laplace}}(x_1) = p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  (рисунок 2.12) відповідно до (2.5) можна описати залежністю:

$$p1(x_1) = n \cdot \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{2}e^{-\sqrt{2}\cdot x_1}\right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}\cdot x_1}, & x_1 \geq 0 \\ \left[\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cdot x_1}\right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}\cdot x_1}, & x_1 < 0 \end{cases}, \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (2.56)$$

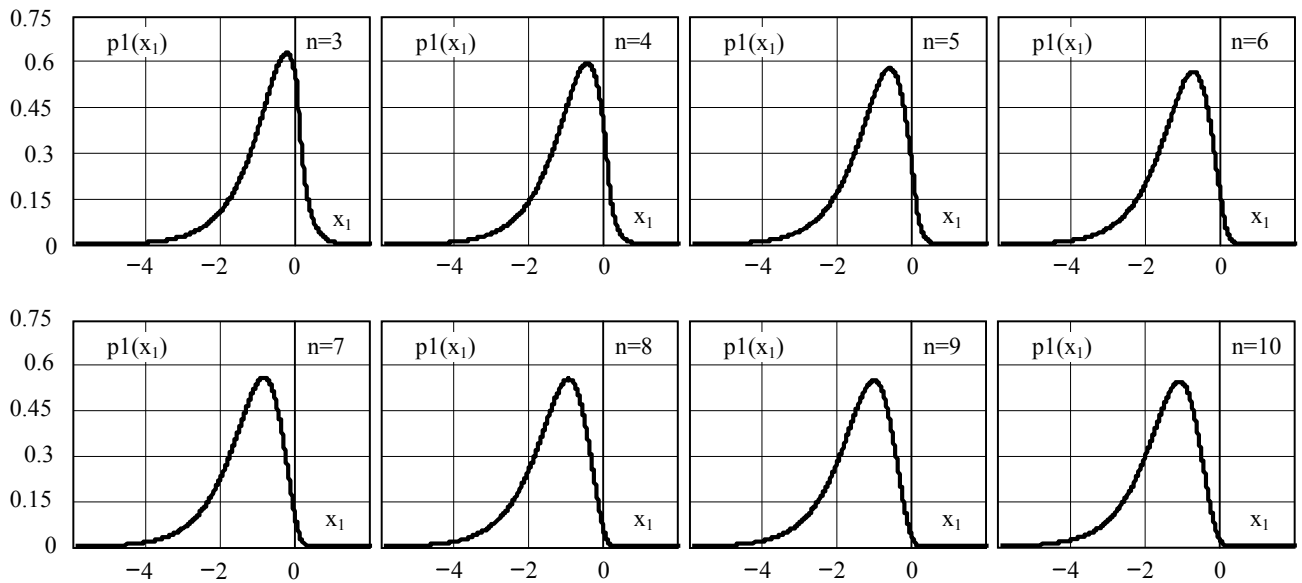


Рисунок 2.12 - Теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  при розподілі Лапласа для  $n = 3, \dots, 10$

Зокрема, для нормованого ( $m_x = 0, \sigma_x = 1$ ) розподілу Лапласа математичне сподівання  $m_{0,1}$  (2.10) та  $m_{0,n}$  (2.12) і стандартне відхилення  $\sigma_{0,1}$  (2.11) та  $\sigma_{0,n}$  (2.13) для  $n = 5$  подано в таблиці 2.4 (для  $n = 3, \dots, 10$  див. таблиця В.1).

Таблиця 2.4

Очікувані значення  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$ ,  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для нормованого розподілу Лапласа при  $n = 5$

n	$m_{0,1}$	$m_{0,n}$	$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$	$\sigma_{0,n} = \sigma_{0,1}$
5	-1,12327	1,12327	0,85739	0,85739

При арксинусоїдному розподілі спостережень ( $m_x = 0, \sigma_x = 1$ ), густина -  $p_{\arcsin}(x_1) = 1 / \left[ \pi \sqrt{2} \sqrt{1 - (x_1/\sqrt{2})^2} \right]$ , функція  $F_{\arcsin}(x_1) = \frac{1}{2} + \arcsin(x_1/\sqrt{2})/\pi$ , теоретичний розподіл  $p1_{\arcsin}(x_1) = p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  (рисунок 2.13) відповідно до (2.5) можна описати залежністю:

$$p1(x_1) = n \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin\left(\frac{x_1}{\sqrt{2}}\right) \right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{2} \sqrt{1 - (x_1/\sqrt{2})^2}}, \quad -\sqrt{2} \leq x_1 < \sqrt{2}. \quad (2.57)$$

На рисунку 2.13 з метою кращого відображення теоретичних густин розподілів  $p_1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  їх верхній рівень обмежено до максимального рівня 10. Межі зміни аргументу достосовано до мінімального рівня густин.

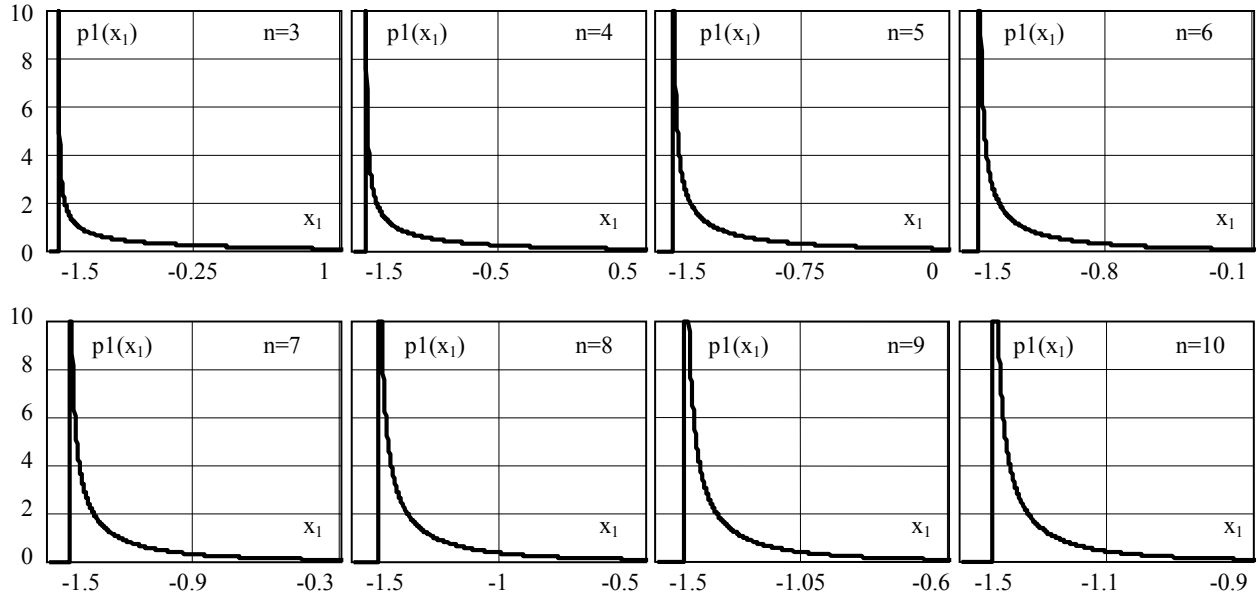


Рисунок 2.13 - Теоретичні розподіли  $p_1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  при арксинусоїдному розподілі спостережень для  $n = 3, \dots, 10$

Обчислені значення математичного сподівання  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$  і стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$ , згідно з (2.10) - (2.13) для нормованого ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) арксинусоїдного розподілу при кількості спостережень  $n = 5$  подано в таблиці 2.5 (для  $n = 3, \dots, 10$  див. таблиця В.1).

Таблиця 2.5

Очікувані значення  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$ ,  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для нормованого арксинусоїдного розподілу

n	$m_{0,1}$	$m_{0,n}$	$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$	$\sigma_{0,n} = \sigma_{0,1}$
5	-1,12360	1,12360	0,40882	0,40882

Розподіл Коші, як відомо [12], є граничним розподілом, для якого не існують всі без винятку моменти, у тому числі математичне сподівання та

дисперсія. Аналіз спостережень з цим розподілом зроблено з метою, щоб показати, що запропонована методика оцінювання непевності екстремальних значень може бути застосована навіть до спостережень з розподілом Коші.

При розподілі Коші ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) густина  $p_{\text{Cauchy}}(x_1) = 1/\left[\pi(1+x_1^2)\right]$ , функція  $F_{\text{Cauchy}}(x_1) = \text{arctg}(x_1)/\pi + 1/2$ , теоретичний розподіл  $p1_{\text{Cauchy}}(x_1) = p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  (рисунок 2.14) згідно з (2.5) можна описати залежністю:

$$p1(x_1) = n \cdot \left[ \frac{1}{2} + \frac{\text{arctg}(x_1)}{\pi} \right]^{n-1} \cdot \frac{1}{\pi(1+x_1^2)}, \quad -\infty < x_1 < \infty. \quad (2.58)$$

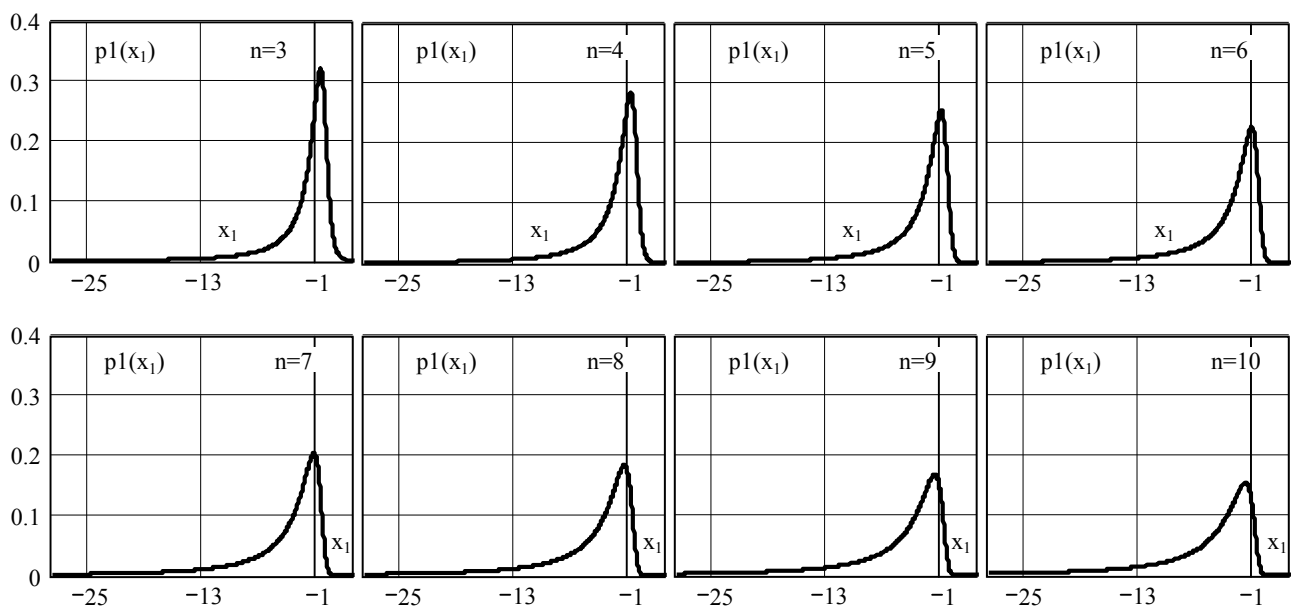


Рисунок 2.14 - Теоретичні розподіли  $p1(x_1)$  мінімального значення  $x_1$  при розподілі Коші для  $n = 3, \dots, 10$

Відповідно до формул (2.10) - (2.13) обчислені значення математичного сподівання  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$  і стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  для нормованого ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) розподілу Коші при кількості спостережень  $n = 5$  подано в таблиці 2.6 (для  $n = 3, \dots, 10$  див. таблиця В.1).

На рисунку 2.15 побудовано залежності очікуваних значень математичного сподівання  $m_{0,1}$  і стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  мінімального спостереження  $x_1$  при  $n = 3, \dots, 10$  для нормованих розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа та арксинусоїдного (для розподілу Коші, враховуючи

його специфіку не представлено дані залежності оскільки він істотно відрізняється від інших густин розподілу) (таблиця В.1).

Таблиця 2.6

Очікувані значення  $m_{0,1}$  та  $m_{0,n}$ ,  $\sigma_{0,1}$  та  $\sigma_{0,n}$  мінімального  $x_1$  та максимального  $x_n$  спостереження для нормованого розподілу Коші при  $n = 5$

n	$m_{0,1}$	$m_{0,n}$	$\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$	$\sigma_{0,n} = \sigma_{0,1}$
5	-2,18491	2,18491	2,29652	2,29652

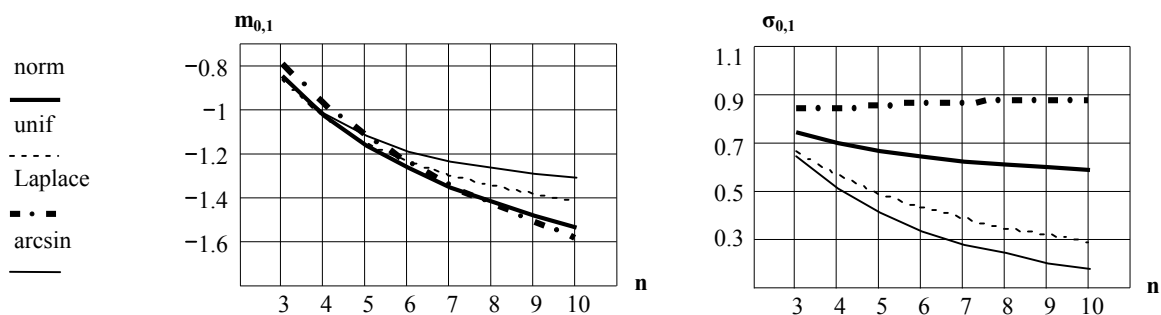


Рисунок 2.15 – Залежності очікуваних нормованих значення  $m_{0,1}$  і  $\sigma_{0,1}$  мінімального спостереження  $x_1$  для нормованих розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, та арксинусоїдного при  $n = 3, \dots, 10$

Отже, з порівняння очікуваних нормованих значень математичного сподівання  $m_{0,1}$  і стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  мінімального спостереження  $x_1$  для рівномірного, Лапласа та арксинусоїдного розподілів спостерігаємо, що вони є достатньо близькими до очікуваних нормованих значень  $m_{0,1}$  і  $\sigma_{0,1}$  для нормального розподілу (таблиця В.1), однак при розподілу Коші  $m_{0,1}$  і  $\sigma_{0,1}$  істотно відрізняються від значень для нормального розподілу, що пояснюється специфікою розподілу Коші, оскільки для нього не існують моменти починаючи з першого, тобто із математичного сподівання [12].

## 2.5 Перевірка ефективності оцінювання непевності екстремального значення методом Монте-Карло при різних розподілах спостережень

Під час досліджень були прийняті наступні базові нормовані ( $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$ ) розподіли генеральної сукупності: нормальний, Лапласа, рівномірний, арксинусоїдний та Коші; кількість спостережень  $n = 3, \dots, 10$ ; кількість реалізацій у ММК  $M = 10^5$  [33].

Дослідження виконано за запропонованим нами алгоритмом [33]:

1. Генерування  $M = 10^5$  вибірок спостережень  $x_{i,j}$  обсягом  $n = 3, \dots, 10$ :  $j = 1, 2, \dots, M$ ,  $i = 1, \dots, n$  для різних моделей розподілу і створення матриці випадкових спостережень у вигляді (1.39);

2. Обчислення для кожної  $j$ -ої вибірки найменшого спостереження  $x_{1,j} = \min(x_{1,j})$ , середнього значення у вибірці  $\overline{x_{n,j}}$  (1.40) та стандартного відхилення  $s_{n,j}$  (1.41) (індекс  $n$  – вказує на обсяг вибірки, яка змінюється від  $n = 3$  до  $n = 10$ );

3. На основі цих значень обчислення  $z_{1,j}$  нормованого до  $s_{n,j}$  відхилення найменшого результату  $x_{1,j}$  від середнього значення  $\overline{x_{1,j}}$  за формулою (2.25).

4. Для заданої кількості спостережень  $n$  у одній вибірці та заданої густини розподілу обчислення очікуваного нормованого значення  $m_{0,1}$  (2.10) та дисперсії  $\sigma_{0,1}^2$  (2.11) мінімального спостереження  $x_{1,j}$  нормованого розподілу;

5. Статистичне опрацювання отриманих результатів досліджень з  $M = 10^5$  для різних нормованих розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, арксинусоїдного та Коші виконано відповідно до етапів алгоритму опрацювання результатів спостережень за ММК розділ 1 п.1.6:

- обчислення оцінки математичного сподівання  $m_{z_1}$  відхилення  $z_{1,j}$  та оцінки  $s_{z_1}$  його стандартного відхилення;

- обчислення мінімального  $\min_{z_1}$  та максимального  $\max_{z_1}$  експериментального значення відхилення  $z_{1,j}$ ;

- обчислення експериментальних значень контрексесу розподілу мінімального значення відхилення  $z_{1,j}$ ;

- побудова гістограм відхилень  $z_{1,j}$  нормованого до  $s_{n,j}$  найменшого результату від середнього значення;

- обчислення коефіцієнтів розширення нижньої  $z_{1,1,low}(n, p)$  границі при односторонній ймовірності відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  при різних нормованих розподілах;

- обчислення коефіцієнтів розширення  $k_{1,low}(n, p)$  для обчислення нижньої границі при односторонній ймовірності, відхилення  $z_{1,j}$  найменшого результату від середнього значення.

Отже, відповідно до статистичного опрацювання результатів досліджень за методом Монте-Карло знайдено параметри відхилення  $z_{1,j}$  при  $n = 5$ : оцінки математичного сподівання  $m_{z_1}$  та стандартного відхилення  $s_{z_1}$ , мінімальне  $\min_{z_1}$  та максимальне  $\max_{z_1}$  значення, які подано у таблиці 2.7, а їх залежності показано на рисунку 2.16.

Таблиця 2.7

Результати досліджень за ММК параметрів нормованого відхилення мінімального спостереження при  $n = 5$

n	Розподіл	$m_{z_1}$	$s_{z_1}$	$\min_{z_1}$	$\max_{z_1}$
5	Нормальний	-1,2376	0,2636	-1,7888	-0,4638
5	Рівномірний	-1,2080	0,2619	-1,7888	-0,4653
5	Лапласа	-1,2488	0,2942	-1,7888	-0,4585
5	Арксинусоїдний	-1,1714	0,2912	-1,7888	-0,4490
5	Коші	-1,2379	0,3959	-1,7889	-0,4472



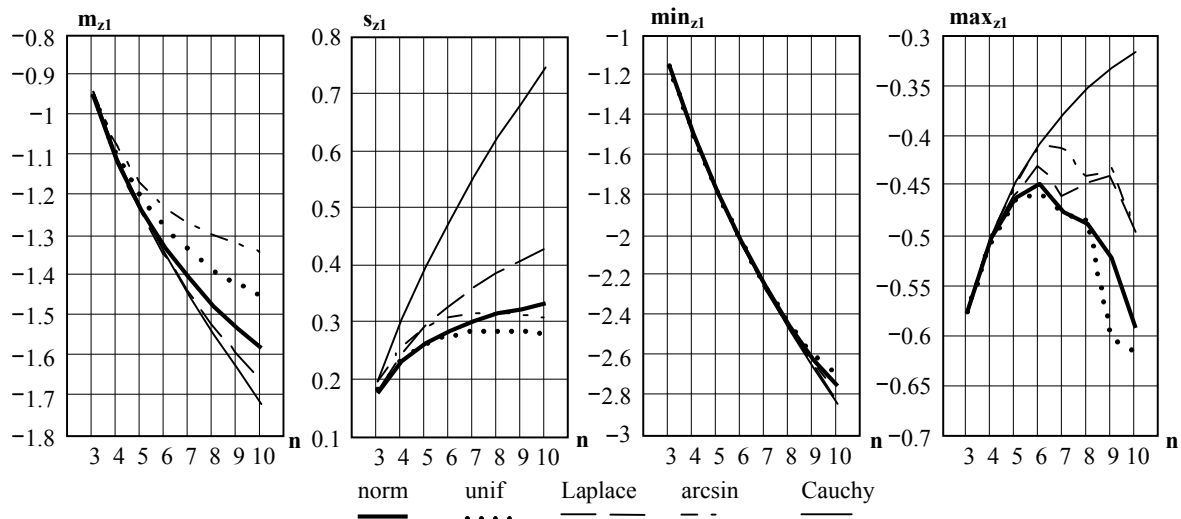


Рисунок 2.16 – Залежності значень  $m_{z1}$ ,  $s_{z1}$ ,  $\min_{z1}$  та  $\max_{z1}$  мінімального спостереження  $x_1$  для нормованих розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, арксинусоїдного, Коші при  $n = 3, \dots, 10$

З аналізу результатів одержаних шляхом моделювання методом Монте-Карло і наведених для  $n = 5$  у таблиці 2.7, для  $n = 3, \dots, 10$  у таблиці В.2 та на рисунку 2.16, впливає, що для різних розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, арксинусоїдного та Коші, параметри, які описують нормоване відхилення мінімального спостереження, є достатньо близькими між собою. Це може бути використано для оцінювання розширеної непевності мінімального (максимального) спостереження за відсутності інформації про розподіл самих спостережень.

Відомо [12,33], що одним із кількісних показників взаємної «близькості» густин розподілу є їх контрексцес:

$$k = \sigma_x^2 / \sqrt{\mu_4}, \quad (2.59)$$

де  $\mu_4$  – 4-ий центральний момент;

$\sigma_x$  - стандартне відхилення.

Контрексцес краще ніж ексцес відображає відхилення розподілу від нормального, оскільки для всіх можливих розподілів він знаходиться в межах від 0 до 1, а для нормального розподілу  $k_N = 1/\sqrt{3} = 0,577$  [12,33]. В залежності від значення контрексцесу деякі типові розподіли можна розмістити в

наступному порядку: 1 - Коші  $k_C = 0$ ; 2 - Лапласа  $k_L = 0,408$ ; 3 - нормальний  $k_N = 0,577$ ; 4 - рівномірний  $k_U = 0,745$  та 5 - арксинусоїдний  $k_{Asin} = 0,816$  [12,33].

Для досліджуваних розподілів значення контрексесу  $k_{z_1}$  розподілу нормованого відхилення мінімального спостереження для  $n = 5$  наведено у таблиці 2.8 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.3) та на рисунку 2.17 при  $n = 3, \dots, 10$ .

Таблиця 2.8

Експериментальні (за ММК) значення  $k_{z_1}$  для різних розподілів  $n = 5$

	Нормальний	Рівномірний	Лапласа	Арксинусоїдний	Коші
$k_{z_1}$	0,6638	0,6524	0,6857	0,6556	0,7327

Із даних таблиці 2.8 для  $n = 5$ , таблиці В.3 для  $n = 3, \dots, 10$  та з рисунку 2.17 спостерігаємо, що значення контрексесу  $k_{z_1}$  мінімального спостереження  $x_1$  при різних розподілах є достатньо близькими між собою, і що найважливіше, є близькими до значення, яке отримуємо для розподілу  $p_1(z_1)$  випадкової змінної  $z_1$ , який отримується для нормально розподілених спостережень. Тобто, це ще одне підтвердження можливості використання параметрів розподілу  $p_1(z_1)$  для нормально розподілених спостережень у випадку, якщо розподіл спостережень апріорі невідомий а їх кількість невелика.

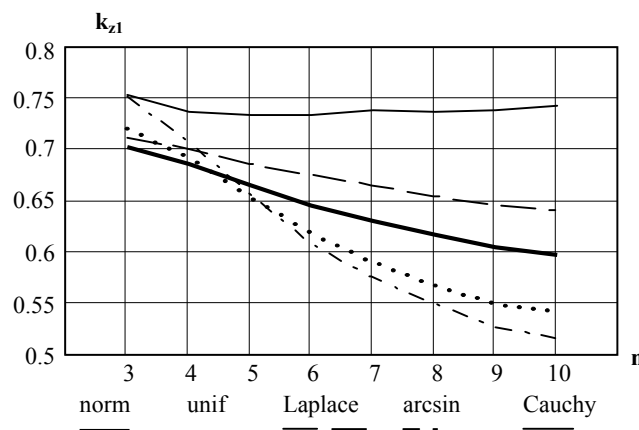


Рисунок 2.17 – Залежності значень контрексесу  $k_{z_1}$  розподілу нормованого відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  для розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, арксинусоїдного, Коші при  $n = 3, \dots, 10$

Побудовані гістограми відхилень  $z_{1,j}$  подані на рисунку 2.18 для  $n = 5$ , рисунок В.1 для  $n = 3, \dots, 10$  (для відхилення  $z_{n,j}$  максимального спостереження вони будуть симетричні відносно початку координат).

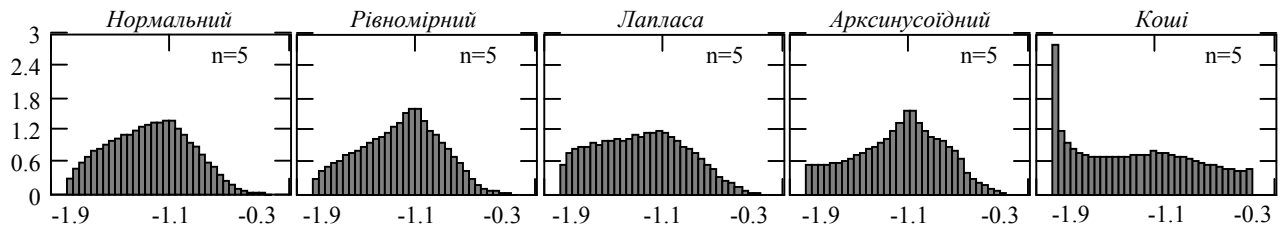


Рисунок 2.18 - Гістограми розподілу нормованого відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  при різних розподілах для  $n = 5$

Відповідно до рисунку 2.18 (рисунку В.1), гістограми відхилень  $z_{1,j}$  різняться шириною розкиду при різних розподілах самих спостережень. Відповідно до рисунку В.1 при невеликій кількості спостережень  $n \leq 5$  розподіли мінімального спостереження при розподілі усіх спостережень нормальному, рівномірному, Лапласа, арксинусоїдному та Коші несиметричні та істотно відрізняються від нормального, а при збільшенні кількості спостережень  $n \geq 10$  вони усі, крім розподілу Коші, наближаються до нормального. Для розподілу Коші розподіл мінімального спостереження при  $n = 3, \dots, 10$  практично не змінює свою форму та суттєво є відмінний від нормального, про що також свідчить, як було зазначено вище, значення контрексесу (таблиця В.3).

Обчислені методом Монте-Карло значення коефіцієнта  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  (2.42) відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  при односторонній ймовірності для рівня довіри  $p = 0,90; \dots; 0,99$  при  $n = 5$  і при різних розподілах подано в таблиці 2.9 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.4).

На рисунку 2.19 представлено залежності значень коефіцієнта  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для різних розподілів: нормального, рівномірного, Лапласа, арксинусоїдного, Коші та різного рівня довіри  $p$ , а також при  $n = 3, \dots, 10$ .

Результати досліджень коефіцієнта  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$

для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  при односторонній ймовірності

Розподіл	$z_{1,1,\text{low}}(n, p)$	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
Норм.	$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6020	-1,6338	-1,6718	-1,7166	-1,7498
Рівном.	$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,5824	-1,6212	-1,6647	-1,7138	-1,7506
Лапласа	$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6528	-1,6814	-1,7127	-1,7450	-1,7670
Арксин.	$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6038	-1,6501	-1,6968	-1,7433	-1,7713
Коші	$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,7577	-1,7714	-1,7812	-1,7869	-1,7885

З даних таблиці 2.9 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.4) та рисунку 2.19 виявлено, що одержані значення коефіцієнтів  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для різних розподілах при збільшенні рівня довіри  $p = 0,99$  та кількості спостережень  $n = 5$  стають дуже близькими між собою, а при  $p = 0,90$  та  $n = 10$  їх значення набувають дещо більшого відхилення між собою.

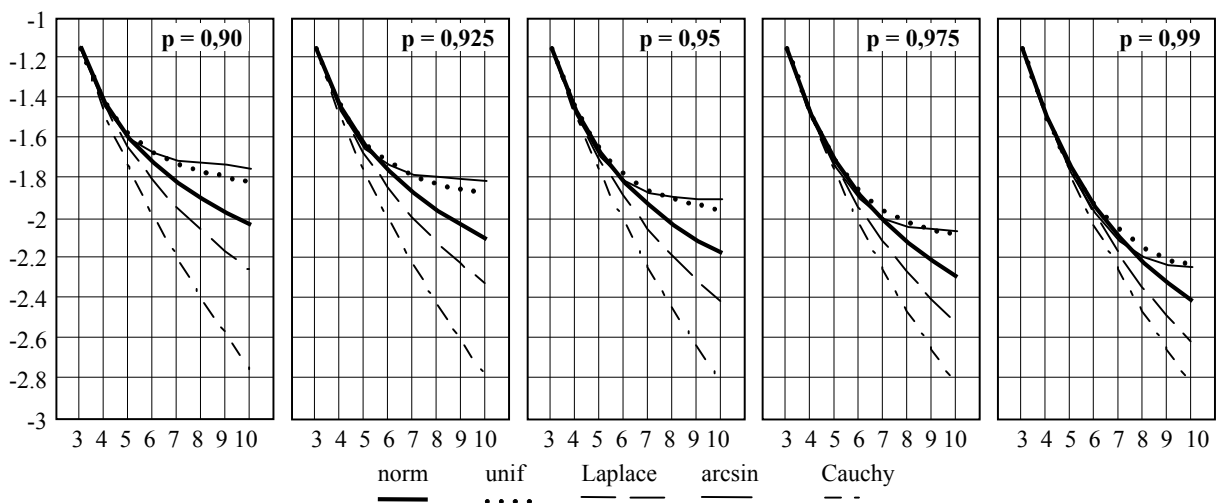


Рисунок 2.19 – Залежності значень коефіцієнтів  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$

для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$

відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  для різних розподілів

Зокрема, для всіх досліджених розподілів спостережень при обмеженій їх кількості спостережень до  $n \leq 6, 7$  нижні односторонні коефіцієнти для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  відхилення  $z_{1,j}$  для мінімального спостереження  $x_1$  відхиляються від значень коефіцієнта  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  з вибірки нормального розподілу не більше 3%, а для  $n = 10$  - близько 14% (рисунок 2.20). Тому за відсутності інформації про розподіл спостережень коефіцієнти  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для мінімального  $x_1$  (максимального  $x_n$ ) спостереження можна використовувати такі як у випадку нормального розподілу.

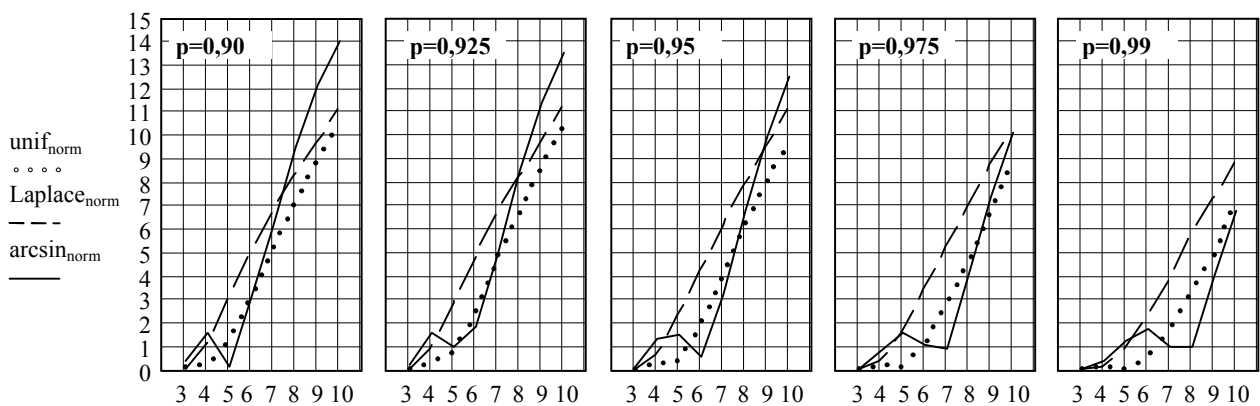


Рисунок 2.20 – Різниця залежностей значень коефіцієнтів  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_1$  між нормальним та іншими розподілами спостережень: рівномірним, Лапласа та арксинусоїдним

На рисунку 2.20 різницю коефіцієнтів розширення для розподілу Коші, враховуючи його специфіку не представлено оскільки він істотно відрізняється від інших густин розподілу.

Також при порівнянні теоретичних  $z_{1,1,\text{low}}(5, p)_{\text{theor}}$  (таблиця 2.2) числових значень коефіцієнтів розширення з експериментально одержаними за ММК  $z_{1,1,\text{low}}(5, p)_{\text{exper}}$  для заданого рівня довіри при нормальному розподілу спостережень,  $n = 5$  (таблиця 2.10) спостерігаємо, що вони з точки зору вимог щодо обчислення розширеної непевності практично однакові.

Обчислені теоретично точно та експериментально значення коефіцієнтів

$z_{1,1,low}(5, p)$  при нормальному розподілі спостережень,  $n = 5$

	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,low}(5, p)_{theor}$	-1,6016	-1,6346	-1,6714	-1,7150	-1,7489
$z_{1,1,low}(5, p)_{exper}$	-1,6020	-1,6338	-1,6718	-1,7166	-1,7498

Відповідно до (2.51) обчислено коефіцієнти розширення  $k_{1,low}(n, p)$  відхилення  $z_{1,j}$  найменшого результату (таблиця 2.11 (для  $n = 3, \dots, 10$  таблиця В.5).

Таблиця 2.11

Результати досліджень коефіцієнта розширення  $k_{1,low}(n, p)$

для нижньої границі при односторонній ймовірності

Розподіл	$k_{1,low}(n, p)$	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
Норм.	$k_{1,low}(5, p)$	-0,5447	-0,5922	-0,6489	-0,7159	-0,7656
Рівном.	$k_{1,low}(5, p)$	-0,7674	-0,8469	-0,9361	-1,0367	-1,1121
Лапласа	$k_{1,low}(5, p)$	-0,4711	-0,5045	-0,5410	-0,5786	-0,6043
Арксин.	$k_{1,low}(5, p)$	-1,0577	-1,1710	-1,2852	-1,3990	-1,4676
Коші	$k_{1,low}(5, p)$	-0,2263	-0,2323	-0,2366	-0,2391	-0,2398

## 2.6 Аналіз випадкових впливів

### 2.6.1 Теоретичний аналіз випадкових впливів

Випадковий вплив  $\Delta r$  спричиняє різні (однак, невідомі) зміщення  $\Delta r_i$  у всіх спостереженнях:

$$y_i = x_i + \Delta r_i. \quad (2.60)$$

Тому і мінімальне  $y_1 = x_1 + \Delta r_1$  і середнє значення  $\bar{y} = \bar{x} + \bar{\Delta r}$  ( $\bar{\Delta r}$  - середнє значення випадкового впливу) та стандартне відхилення  $s_y = \sqrt{s_x^2 + \sigma_r^2}$  спостережень ( $\sigma_r^2$  - дисперсія випадкового впливу) змінюють свої значення. Завдяки цьому відхилення мінімального спостереження від середнього значення нормоване до стандартного відхилення також змінюється:

$$z_{1,y} = \frac{y_1 - \bar{y}}{s_y} \neq z_{1,x}. \quad (2.61)$$

Оскільки у (2.60) маємо суму двох незалежних випадкових величин: досліджуваних спостережень та випадкових впливів, то густина розподілу цієї суми  $p_{yr}(y)$  є згорткою відповідних розподілів - спостережень  $p_x(x)$  та випадкового впливу  $p_r(\Delta r)$ :

$$p_{yr}(y) = p_x(x) \otimes p_r(\Delta r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(\Delta r) \cdot p_x(y - \Delta r) \cdot d\Delta r. \quad (2.62)$$

На підставі розподілу  $p_{yr}(y)$  (2.62), застосовуючи опрацьовану вище методику у розділі 2 п. 2.2 - п. 2.4, знаходимо розподіл  $p1(z_{1,y})$  нормованого до стандартного відхилення  $s_y$  спостережень випадкового відхилення  $z_{1,y}$  (2.61) мінімального спостереження від середнього значення  $\bar{y}$ . Після обчислення густини розподілу  $p1(z_{1,y})$  коефіцієнт розширення  $z_{1,1,low}(n, p)$  для заданого рівня довіри  $p$  можна обчислити із розв'язання нелінійного рівняння (2.42).

Якщо обчислення густини розподілу  $p1(z_{1,y})$  аналітично є неможливим або дуже складним, доцільно застосувати метод Монте-Карло, і тоді розв'язання нелінійного рівняння (2.42) отримуємо числовим способом.

Найчастіше розподіл випадкових впливів  $p_r(\Delta r)$  є нормальним, тоді якщо розподіл  $p_x(x)$  спостережень також є нормальним, то задача значно спрощується, оскільки у цьому випадку розподіл  $p_{yr}(y)$  суми (2.62) залишається нормальним із стандартним відхиленням  $s_y = \sqrt{s_x^2 + \sigma_r^2}$ . Завдяки цьому значення коефіцієнта розширення (2.42) залишається без змін. Розширену непевність мінімального спостереження обчислюємо за раніше отриманими виразами (2.43), (2.51), (2.53),

у яких використовуємо стандартне відхилення  $s_y$ , яке обчислене на підставі опрацювання зареєстрованих спостережень.

Якщо ж розподіл спостережень  $p_x(x)$  нормальний, а розподіл випадкових впливів  $p_r(\Delta r)$  рівномірний, або навпаки, тоді розподіл  $p_{yr}(y)$  суми (2.62) стає так званим плоско-нормальним. Властивості такого розподілу детально проаналізовано у наступному 3 розділі.

Для інших комбінацій розподілів необхідно застосувати вище наведену процедуру. При цьому слід мати на увазі, що завдяки операції згортки відбувається нормалізація отриманої густини розподілу суми складових [12], тобто розширена непевність стає щораз ближчою до непевності у нормальному розподілі. Вище було показано, що при невеликій кількості спостережень для невідомого апіорі їх розподілу коефіцієнт розширення  $z_{1,1,low}(n, p)$  відносно значення для нормального може змінитися лише на декілька відсотків. Тому, якщо стандартне відхилення випадкових зміщень порівняно зі стандартним відхиленням самих спостережень є невеликим ( $\leq 1/3$ ), то використання коефіцієнта розширення для нормального розподілу може змінити розширену непевність мінімального (максимального) спостережень також лише на декілька відсотків.

## 2.6.2 Дослідження випадкових впливів

Дослідження випадкових впливів виконано шляхом моделювання методом Монте-Карло. Далі для розподілів спостережень та випадкових впливів під час вимірювань виконано у середовищі MathCad і прийнято наступні моделі:

- кількість спостережень  $n = 5$ ;
- розподіл спостережень  $p_x(x)$  - 1) рівномірний, 2) нормальний, математичне сподівання  $m_x = 0$ , стандартне відхилення  $\sigma_x = 1$ ;
- розподіл випадкового впливу  $\Delta r$ :  $p_r(\Delta r)$  - 1) рівномірний, 2) нормальний, математичне сподівання  $m_x = 0$  стандартне відхилення  $\sigma_r$ ;
- відношення стандартних відхилень  $\sigma_r / \sigma_x = 1/1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$ ;



- рівень довіри для односторонньої довірчої границі  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$ .

Далі до наближеного обчислення розширеної односторонньої непевності застосовуємо значення на основі коефіцієнта розширення для нормального розподілу:

$$y_{1,1,p,\text{low}} = \bar{y} - z_{1,1,\text{low, norm}}(n, p) \cdot s_y \approx y_1 - k_{1,\text{low, norm}}(n, p) \cdot u_A(y_1). \quad (2.63)$$

З метою якісного порівняння зміни форми розподілів побудовано гістограми нормованого відносного відхилення  $z_{1,y1}$  та гістограми мінімального спостереження  $y_1$ . При нормальному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової та при відношення стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/10$  гістограми  $z_{1,y1}$  та  $y_1$  подано на рисунку 2.21.

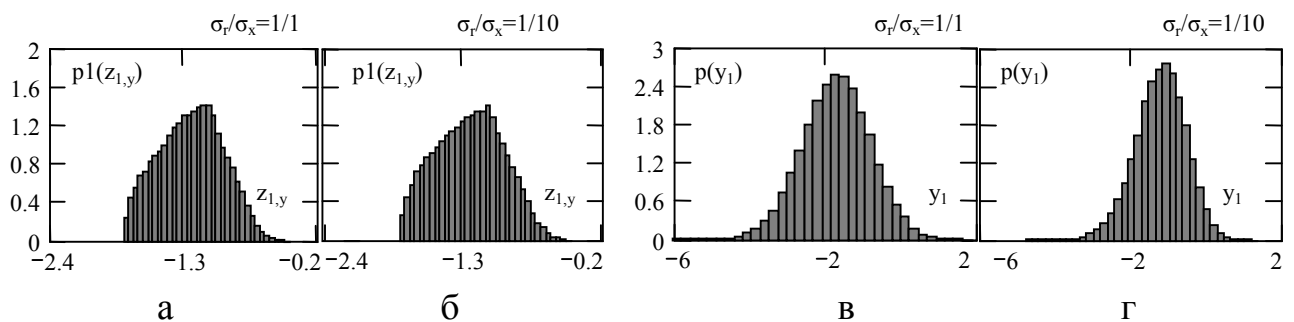


Рисунок 2.21 – Гістограми відносного відхилення  $z_{1,y1}$  та мінімального спостереження  $y_1$  при нормальному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової: а, б – гістограми нормованого відносного відхилення  $z_{1,y1}$ , в, г – гістограми мінімального спостереження  $y_1$

Залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,r,1,\text{low}}(n, p)$  (таблиця В.6) отриманих на основі обчислення за методом Монте-Карло та значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)_{\text{norm}}$  (таблиця 2.2) для  $n = 5$ , при нормальному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової,  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$  та відношення стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  подано на рисунку 2.22.

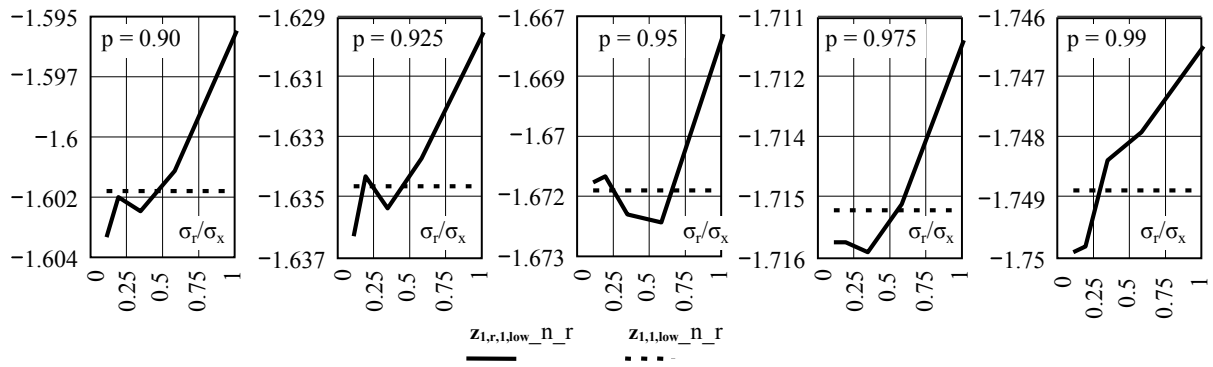


Рисунок 2.22 – Залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  та значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,1,low}(n, p)$  при нормальному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової

Як бачимо з гістограм на рисунку 2.21 зменшення вмісту у результатах випадкової складової з рівномірним розподілом у 10 разів спричиняється трансформацією розподілу  $p1(z_{1,y1})$  до розподілу як для нормального. Це сприяє тому, що, як видно з рисунку 2.22, наближені значення коефіцієнтів  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  для обчислення довірчих границь мінімального спостереження практично дуже мало відрізняються від значень коефіцієнтів  $z_{1,1,low}(n, p)$ , які отримують при нормальному розподілі спостережень.

При рівномірному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової також були обчислені залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  (таблиця В.6) та значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,1,low}(n, p)_{norm}$  (таблиця 2.2) для  $n = 5$ , та  $p = 0,90; \dots; 0,99$  відношення стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; \dots; 1/10$ , які наведено на рисунку 2.23.

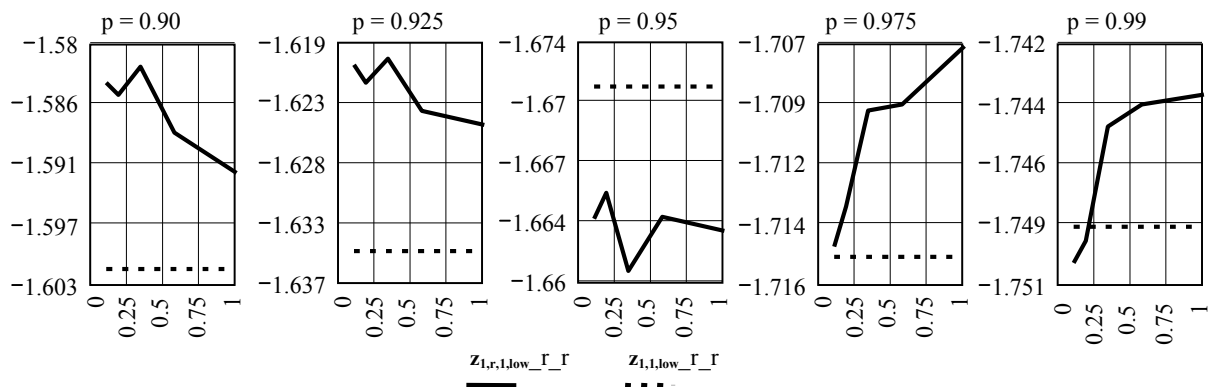


Рисунок 2.23 – Залежності значень  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  та  $z_{1,1,low}(n, p)$  при рівномірному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової

Гістограми відхилення  $z_{1,y1}$  та мінімального спостереження  $y_1$  для  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/10$  подано на рисунку 2.24.

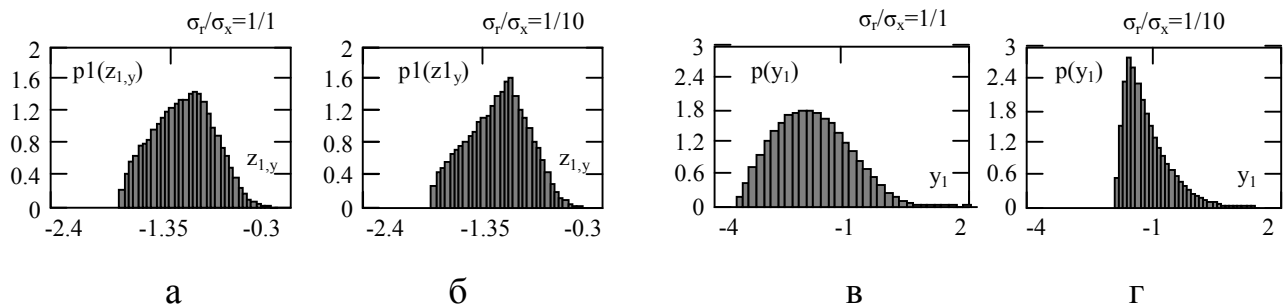


Рисунок 2.24 – Гістограми відхилення  $z_{1,y1}$  та мінімального спостереження  $y_1$  при рівномірному розподілі спостережень і рівномірному розподілі випадкової складової: а, б – гістограми нормованого відносного відхилення  $z_{1,y1}$ , в, г – гістограми мінімального спостереження  $y_1$

У випадку рівномірного розподілу спостережень та нормального розподілу випадкової складової залежності значень  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  (таблиця В.6) та значень  $z_{1,1,low}(n, p)$  (таблиця 2.2) для  $n = 5$ , при  $p = 0,90; \dots; 0,99$  та  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; \dots; 1/10$  подано на рисунку 2.25, а гістограми  $z_{1,y1}$  та  $y_1$  при  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/10$  показано на рисунку 2.26.

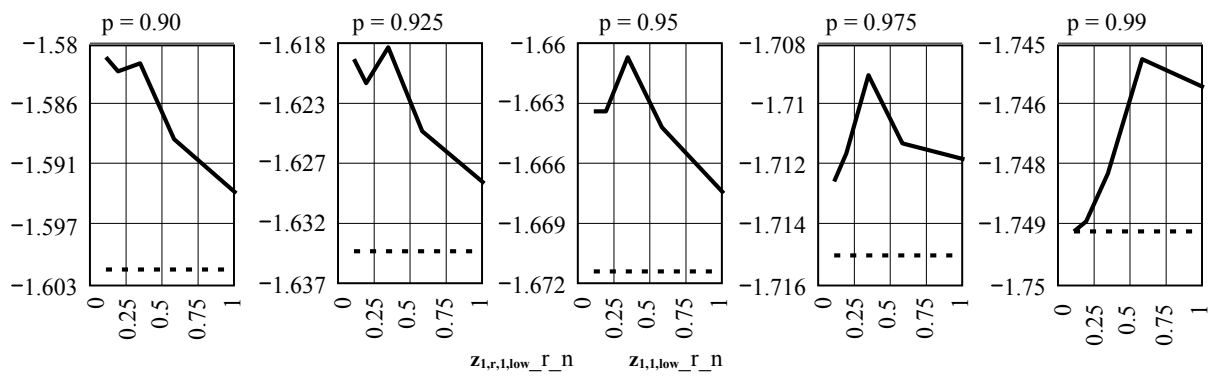


Рисунок 2.25 – Залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  та значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,1,low}(n, p)$  при рівномірному розподілі спостережень і нормальному розподілі випадкової складової

Як бачимо з гістограм на рисунку 2.24 та 2.26 зменшення вмісту у результатах випадкової складової з нормальним чи рівномірним розподілом у 10 разів спричиняється трансформацією розподілу  $p1(z_{1,y1})$  до розподілу, як для рівномірного. Хоча, як видно з рисунків 2.23 та 2.25, наближені значення коефіцієнтів  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  для обчислення довірчих границь мінімального

спостереження є дещо більшими від значень коефіцієнтів  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для нормального розподілу спостережень, однак це відхилення є практично неістотним з точки зору точності обчислення розширених границь.

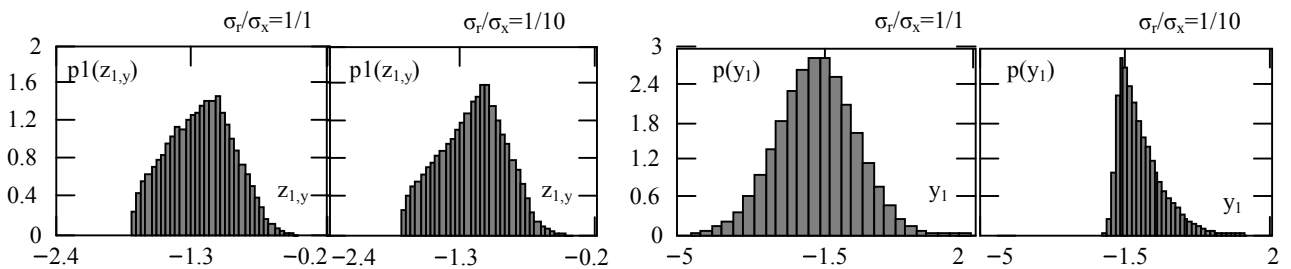


Рисунок 2.26 – Гістограми відхилення  $z_{1,y1}$  та мінімального спостереження  $y_1$  при рівномірному розподілі спостережень і нормальному розподілі випадкової складової: а, б – гістограми нормованого відносного відхилення  $z_{1,y1}$   
в, г – гістограми мінімального спостереження  $y_1$

Для досліджених різних комбінацій розподілів спостережень і випадкових зміщень: (n\_r) – нормальний, рівномірний; (r\_r) – рівномірний, рівномірний; (r\_n) – рівномірний, нормальний, при співвідношенні стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  для рівня довіри  $p = 0,90$  значення коефіцієнтів  $z_{1,r,1,\text{low}}(n, p)$  наведено у таблиці 2.12. Для рівнів довіри  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$  для кількості спостережень  $n = 5$  значення коефіцієнтів  $z_{1,r,1,\text{low}}(n, p)$  наведено у таблиці В.6.

Таблиця 2.12

Значення довірчих границь  $z_{1,r,1,\text{low}}(n, p)$   
залежно від  $\sigma_r/\sigma_x$  для  $n = 5, p = 0,90$

Розподіл		1	$1/\sqrt{3}$	$1/3$	$1/3\sqrt{3}$	$1/10$
n_r	$p = 0,90$	-1,5956	-1,6008	-1,6023	-1,6018	-1,6033
r_r	$p = 0,90$	-1,5924	-1,5885	-1,5822	-1,5849	-1,5838
r_n	$p = 0,90$	-1,5942	-1,5892	-1,5819	-1,5825	-1,5812

Як впливає з наведених у таблиці 2.12 значень для кожного співвідношення стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1/1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  зміна комбінацій розподілів спостережень і випадкових зміщень мало впливає на значення коефіцієнтів  $z_{1,r,1,low}(n, p)$ , ця зміна відбувається лише у третьому знаку і щонайбільше на приблизно 0,02.

Це також підтверджують значення відносних похибок наближених значень коефіцієнта розширення:

$$\delta_{z_{1,u,набл.}} = \frac{z_{1,1,low(high)}(n, p) - z_{1,U,1,low(high)}(n, p)}{z_{1,U,1,low(high)}(n, p)} \cdot 100\% . \quad (2.64)$$

значення яких для досліджуваних комбінацій розподілів представлено на рисунку 2.27.

Самі значення відносних похибок (2.64)  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  для  $n = 5$ , рівня довіри  $p = 0,90$  та відношень стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x = 1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  для цих комбінацій розподілів подано в таблиці 2.13, а для решти рівнів довіри  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$  вони подані у таблиці В.7.

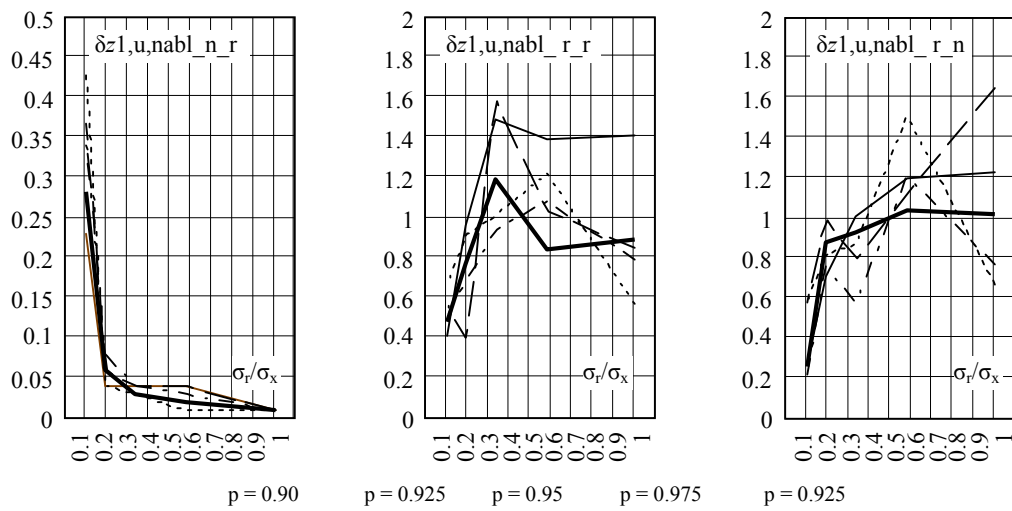


Рисунок 2.27 – Залежності відносних похибок  $\delta_{z_{1,u,набл.}}$  коефіцієнта розширення  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  від відношень стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x$  для  $n = 5, p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$

З аналізу залежностей на рисунку 2.27 та значень у таблицях 2.13 та В.7 бачимо, що похибки наближених значень коефіцієнтів для обчислення розширеної непевності від впливу випадкової складової є нехтовно малими. Це означає, що використання для обчислення розширеної непевності мінімального спостереження згідно (2.63) коефіцієнта розширення такого, як для нормального розподілу, є цілком обґрунтованим, оскільки не спричиняє істотних неточностей значення розширеної непевності.

Таблиця 2.13

Значення відносних похибок  $\delta_{z_{1,u,набл.}}$  коефіцієнта розширення  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  залежно від відношення стандартних відхилень  $\sigma_r/\sigma_x$  для  $n = 5$  та різних комбінацій розподілів і випадкових зміщень, при рівні довіри 0,90

		1	$1/\sqrt{3}$	1/3	$1/3\sqrt{3}$	1/10
n_r	p = 0,90	0,01	0,04	0,04	0,04	0,23
r_r	p = 0,90	1,40	1,38	1,48	0,95	0,40
r_n	p = 0,90	1,22	1,19	1,00	0,70	0,27

Таким чином, якщо у ЗВТ, які використовуються для вимірювань виникають випадкові впливи, які незалежні від змін властивостей досліджуваних зразків і змінюють всі спостереження, то обчислене стандартне відхилення зареєстрованих значень  $s_y = \sqrt{s_x^2 + \sigma_r^2}$  враховує дисперсію випадкового впливу ( $\sigma_r^2$ ). Завдяки цьому розширена непевність мінімального (максимального) спостереження збільшиться, але це збільшення буде враховане безпосередньо в процесі оцінювання непевності.

## 2.7 Аналіз систематичних впливів

### 2.7.1 Теоретичний аналіз систематичних впливів

Систематичний вплив  $\Delta s$  спричиняє однакове (але невідоме) зміщення у всіх спостереженнях:

$$y_i = x_i + \Delta s. \quad (2.65)$$

Тому середнє значення теж має таке саме зміщення  $\bar{y} = \bar{x} + \Delta s$ , а стандартне відхилення  $s_y$  залишається без змін  $s_y = s_x$ . Звідси, внаслідок систематичних впливів, випадкове відхилення мінімального спостереження від середнього значення нормованого до стандартного відхилення спостережень не змінюється:

$$z_{1,y} = \frac{y_1 - \bar{y}}{s_y} = \frac{x_1 + \Delta s - (\bar{x} + \Delta s)}{s_x} = z_{1,x}. \quad (2.66)$$

Завдяки цьому густина розподілу випадкового відхилення мінімального спостереження від середнього значення нормованого до стандартного відхилення спостережень також залишається без змін, тобто  $p_1(z_{1,y}) = p(z_{1,x})$ .

У довільному експерименті після обчислення середнього значення  $\bar{y}$  та стандартного відхилення спостережень  $s_y = s_x$  із залежностей (2.65) та (2.66) можемо записати значення для мінімального спостереження:

$$y_1 = \bar{y} + z_{1,y} \cdot s_y = \bar{x} + \Delta s + z_{1,x} \cdot s_x = \bar{x} + s_x \cdot \left( \frac{\Delta s}{s_x} + z_{1,x} \right). \quad (2.67)$$

У дужках (2.67) маємо суму двох незалежних випадкових величин: промасштабованого на  $s_x$  систематичного впливу  $(\Delta s / s_x)$  та випадкового відхилення мінімального спостереження від середнього значення нормованого до стандартного відхилення спостережень  $(z_{1,x})$ . Тому розподіл суми:

$$u_s = \frac{\Delta s}{s_x} + z_{1,x}. \quad (2.68)$$

є згорткою відповідних розподілів:

$$p_u(u_s) = p_{\Delta s} \left( \frac{\Delta s}{s_x} \right) \otimes p(z_{1,x}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\Delta s} \left( \frac{\Delta s}{s_x} \right) \cdot p \left( u_s - \frac{\Delta s}{s_x} \right) \cdot d\Delta s. \quad (2.69)$$

Отже, із (2.69) випливає, що систематичний вплив спричиняє зміну густини розподілу випадкового відхилення мінімального спостереження від середнього значення нормованого до стандартного відхилення спостережень, тобто, як результат, значення коефіцієнта розширення. Після обчислення за (2.69) густини розподілу  $p_u(u_s)$  коефіцієнт розширення  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  чи  $z_{1,s,1,high}(n, p)$  для заданого рівня довіри  $p$  можна обчислити із розв'язання нелінійного рівняння (2.42).

Із залежності (2.67) випливає, якщо під час опрацювання результатів експерименту обчислено  $\bar{x}$  та  $s_y = s_x$ , тоді стандартне відхилення мінімального спостереження становить:

$$\sigma_{y_1} = s_x \sqrt{\sigma_{z_1}^2 + (\sigma_s/s_x)^2} = u_A(x_1) \cdot \sqrt{1 + (u_{cB}(x_1)/u_A(x_1))^2}. \quad (2.70)$$

де  $u_{cB}(x_1) = \sigma_s$  - стандартна непевність обчислена за методом типу В (інструментальна складова непевності), яка спричинена нескоригованими систематичними зміщеннями показів застосовуваних ЗВТ.

Для обчислення розширеної непевності мінімального (максимального) спостереження слід мати коефіцієнт розширення  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  або  $z_{1,s,1,high}(n, p)$ . Однак, знаходження цих коефіцієнтів є дуже складною задачею, оскільки слід спершу обчислити згортку розподілів (2.69), далі обчислити функцію розподілу  $F_u(u_s)$  і аж тоді для заданих рівнів довіри розв'язати нелінійне рівняння (2.42).

Якщо  $\sigma_s/\sigma_x \approx \leq 1/3$ , тобто вплив систематичного зміщення відносно стандартного відхилення самих спостережень є невеликим, тобто ефект згортки у (2.69) є незначним, тоді при малих  $n$  коефіцієнт розширення можна взяти таким, як для нормального розподілу з його модифікуванням відповідно до наступної залежності:

$$z_{1,U,1,low(high)}(n, p)_{\text{набл.}} \approx z_{1,1,low(high)}(n, p) \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot (\sigma_s/\sigma_x)^2}. \quad (2.71)$$



### 2.7.2 Дослідження систематичних впливів

Дослідження точності наближених значень коефіцієнта  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  (2.71) виконано методом Монте-Карло у середовищі MathCad при цьому прийнято наступні параметри:

- кількість спостережень  $n = 5$ ;
- розподіл спостережень  $p_x(x)$  - 1) рівномірний, 2) нормальний, математичне сподівання  $m_x = 0$ , стандартне відхилення  $\sigma_x = 1$ ;
- розподіл систематичного впливу  $\Delta_s$ :  $p(\Delta_s)$  - 1) рівномірний, 2) нормальний, математичне сподівання  $m_x = 0$  стандартне відхилення  $\sigma_s$ ;
- відношення стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x = 1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$ ;
- рівень довіри для односторонньої довірчої границі  $p = 0,90; \dots; 0,99$ .

Результати визначення коефіцієнтів  $z_{1,U,1,low(high)}(n, p)$  на основі попереднього обчислення згортки (2.69) та розв'язку рівняння (2.42) для нормального розподілу спостережень і рівномірного розподілу систематичної складової наведені у таблиці В.8. Зіставлення цих значень коефіцієнтів з наближеними значеннями  $z_{1,1,low(high)}(n, p)_{\text{набл.}}$  (обчисленими за (2.71), тобто на основі модифікованого коефіцієнта розширення для нормального розподілу), наведені на рисунку 2.28

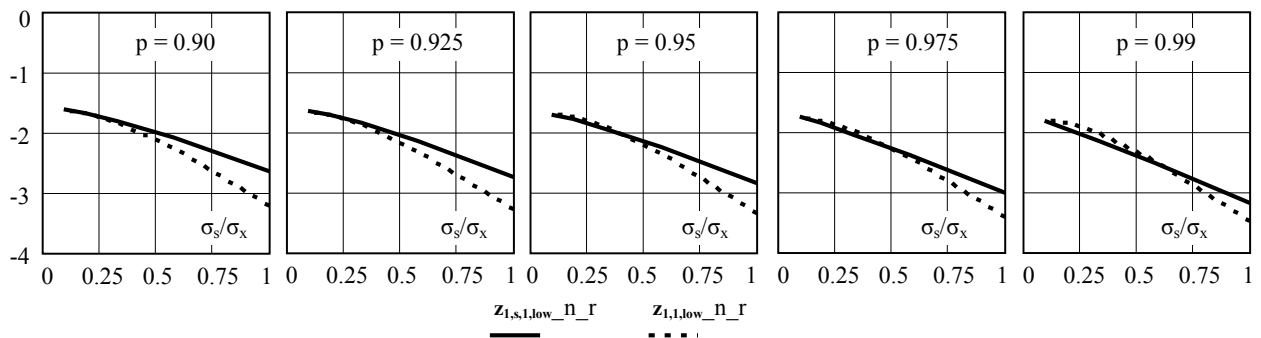


Рисунок 2.28 – Залежності значень коефіцієнтів  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  та  $z_{1,1,low}(n, p)_{\text{набл.}}$  від відношень стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  і різних рівнів довіри при нормальному розподілі спостережень і рівномірному розподілі систематичної складової

Аналогічно були обчислені точні (відповідно до згортки (2.69) та розв'язку рівняння (2.42)) і наближені за виразом (2.71) значення коефіцієнтів  $z_{1,s,1,low}(n, p)$

для обчислення довірчих границь мінімального спостереження при інших комбінаціях густин розподілів спостережень та систематичного впливу.

Зокрема, на рисунку 2.29 наведено залежності точних  $z_{1,1,low}(n, p)$  та наближених  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  значень коефіцієнтів для довірчих границь при нормальному розподілі спостережень і нормальному розподілі систематичної складової, при  $n = 5$ ,  $p = 0,90; \dots; 0,99$  та  $\sigma_s/\sigma_x = 1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$ .

Числові значення  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  цих коефіцієнтів подано у таблиці В.8.

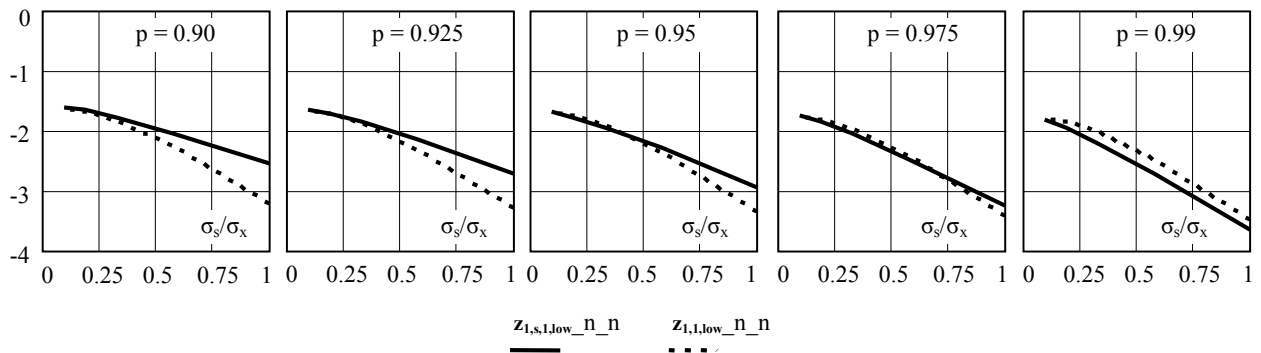
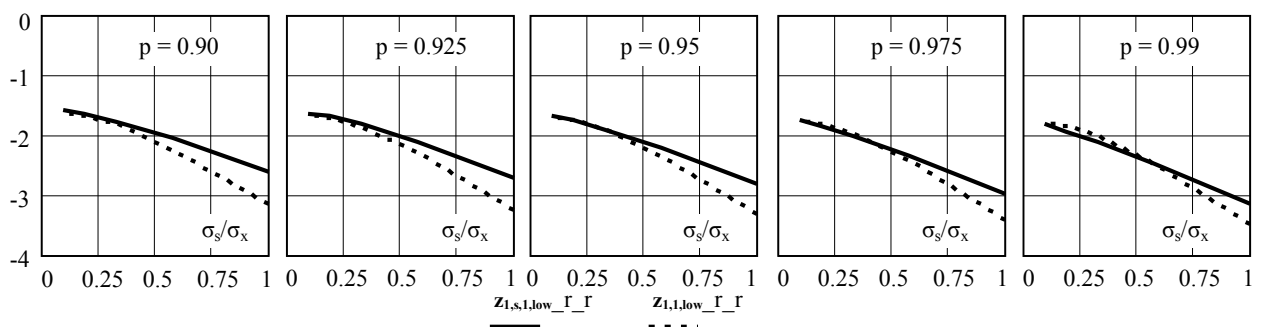


Рисунок 2.29 – Залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  та  $z_{1,1,low}(n, p)$  від відношень стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  і різних рівнів довіри при нормальному розподілі спостережень і нормальному розподілі систематичної складової

У випадку рівномірних розподілів спостережень і систематичної складової залежності точних  $z_{1,1,low}(n, p)$  та наближених  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  значень коефіцієнтів для довірчих границь при  $n = 5$ ,  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$  та  $\sigma_s/\sigma_x = 1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  наведено на рисунку 2.30, а, а у випадку рівномірного розподілу спостережень і нормального розподілу систематичної складової – наведено на рисунку 2.30, б. Числові значення  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  цих коефіцієнтів подано у таблиці В.8.



а

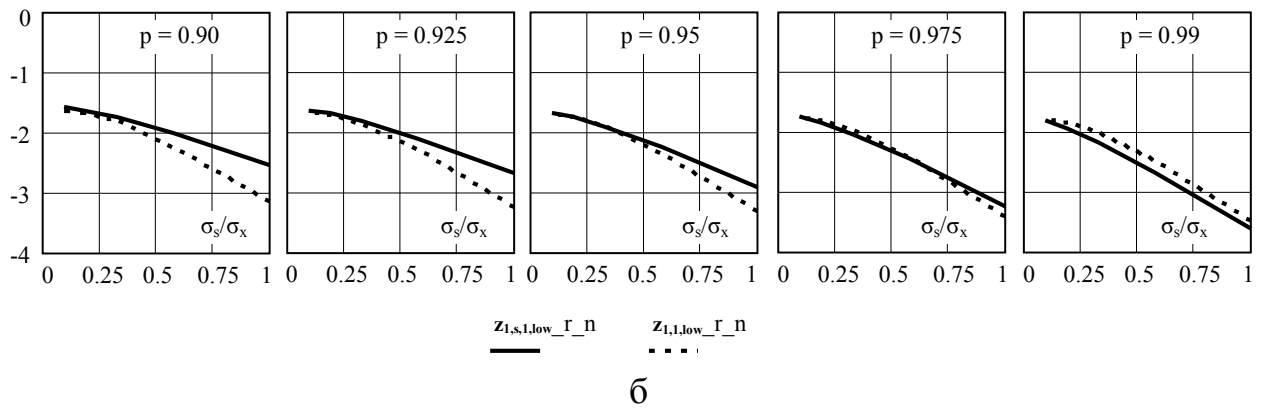


Рисунок 2.30 – Залежності значень коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  та  $z_{1,1,low}(n, p)$  від відношень стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  і різних рівнів довіри: а - при рівномірному розподілі спостережень і рівномірному розподілі систематичної складової; б - при рівномірному розподілі спостережень і нормальному розподілі систематичної складової

Аналізуючи залежності представлені на рисунках 2.28 – 2.30, можна зауважити, що якщо відношення стандартних відхилень систематичної складової і самих спостережень не перевищує приблизно  $1/3$  ( $\sigma_s/\sigma_x \leq \approx 1/3$ ), то наближення (2.71) може бути придатним для врахування систематичних впливів у розширеній непевності мінімального спостереження. З метою кількісного оцінювання якості наближення (2.71) обчислені його відносні похибки за виразом:

$$\delta_{zu, \text{набл.}} = \frac{z_{1,1,low(high)}(n, p) \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot (\sigma_s/\sigma_x)^2} - z_{1,U,1,low(high)}(n, p)}{z_{1,U,1,low(high)}(n, p)} \cdot 100\%. \quad (2.72)$$

Значення відносних похибок  $\delta_{zu, \text{набл.}}$  обчислених за (2.72) для  $n = 5$ , рівня довіри  $p = 0,90$ ,  $\sigma_s/\sigma_x = 1; 1/\sqrt{3}; 1/3; 1/3\sqrt{3}; 1/10$  від відповідних розподілів:

- 1) нормального спостережень і рівномірного систематичної складової (n\_r);
  - 2) нормального спостережень і нормального систематичної складової (n\_n);
  - 3) рівномірного спостережень і рівномірного систематичної складової (r\_r);
  - 4) рівномірного спостережень і нормального систематичної складової (r\_n)
- подано в таблиці 2.14, а також у таблиці В.9 для рівнів довіри  $p = 0,90; 0,925; 0,95; 0,975; 0,99$ .

Залежності значень відносних похибок  $\delta_{zu,набл.}$  обчислення коефіцієнтів  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  від відношення стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  для довірчих границь  $p = 0,90; \dots; 0,99$  при  $n = 5$  подано на рисунку 2.31.

Таблиця 2.14

Результати обчислень відносних похибок  $\delta_{zu,набл.}$  залежно від відношення стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  для  $n = 5$  та рівня довіри  $p = 0,90$

Розподіл		1	$1/\sqrt{3}$	$1/3$	$1/3\sqrt{3}$	$1/10$
n_r	$p = 0,90$	21,614	8,670	2,589	1,025	0,591
n_n	$p = 0,90$	24,979	10,434	3,606	3,606	0,585
r_r	$p = 0,90$	23,105	10,596	4,661	2,878	1,909
r_n	$p = 0,90$	26,409	12,018	5,257	2,941	1,845

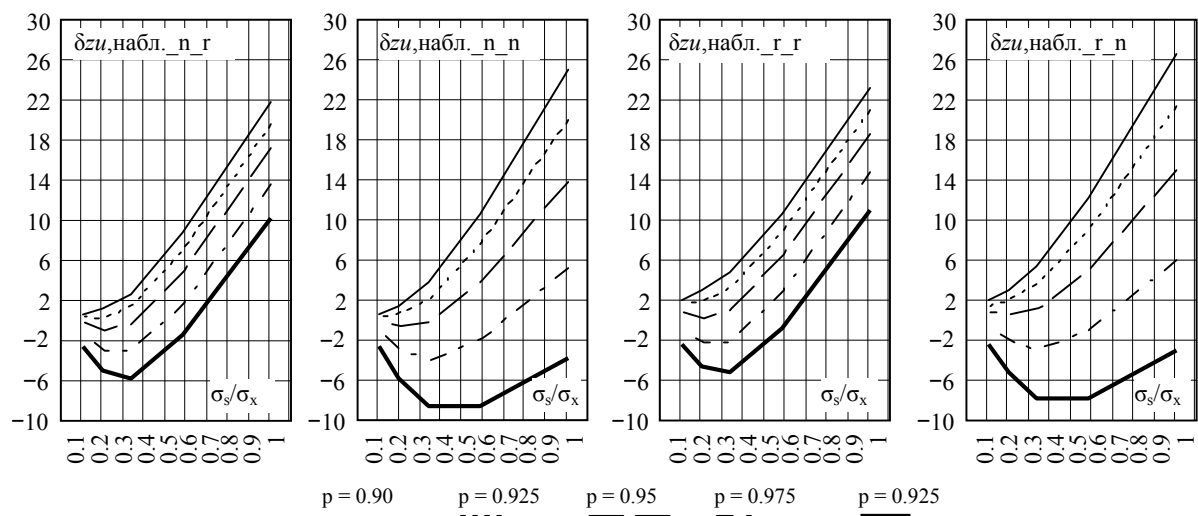


Рисунок 2.31 – Залежності значень відносних похибок коефіцієнтів  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  від відношення стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  для довірчих границь  $p = 0,90; \dots; 0,99$  при  $n = 5$

З аналізу отриманих результатів (таблиці 2.14 і В9), а також із рис. 2.31 випливає, що при  $\sigma_s/\sigma_x \leq 1/3$  наближені значення коефіцієнтів  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  відрізняються від точних не більше ніж 6%. Тобто таке наближення можна

використовувати під час опрацювання спостережень, якщо розподіл систематичних впливів невідомий, а відоме лише їх стандартне відхилення  $\sigma_s$  та обчислено стандартне відхилення спостережень  $s_x$ .

Таким чином, на підставі проведеного теоретичного аналізу та результатів моделювання випадкових та систематичних впливів, які проявляються під час виконання вимірювань, встановлено, що для придатного для практики спрощеного кількісного врахування цих впливів у розширеній непевності мінімального спостереження слід використати відповідні приблизні значення коефіцієнтів: для випадкових впливів – безпосередньо такі як для нормального розподілу, а для систематичних впливів - модифіковані на  $\sqrt{1 + 3 \cdot (\sigma_s / \sigma_x)^2}$  значення.

З урахуванням інструментальної складової непевності  $u_{cB}(x_{1(n)})$ , значення якої обчислюють за показами, метрологічними характеристиками і умовами застосування ЗВТ, що використовувалися при контрольних вимірювань, сумарну (комбіновану) стандартну непевність  $u_c(x_{1(n)})$  можна обчислити за виразом:

$$u_c(x_{1(n)}) = \sqrt{u_A^2(x_{1(n)}) + u_{cB}^2(x_{1(n)})}. \quad (2.73)$$

Таким чином, розширена непевність – нижня для мінімального спостереження  $x_1$  або верхня - для максимального спостереження  $x_n$  з урахуванням інструментальної складової непевності ( $u_c(x_{1(n)})$ ) можна обчислити за виразами:

$$U_{p,low}(x_{1(n)}) \approx z_{1,1,low}(n, p) \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot (u_{cB}(x_{1(n)}) / s_x^2)^2} \cdot s_x, \quad (2.74)$$

якщо як базове використовують середнє значення  $\bar{x}$  або

$$U_{p,low}(x_{1(n)}) \approx k_{1,low(high)}(n, p) \cdot \sqrt{1 + 3 \cdot (u_{cB}(x_{1(n)}) / s_x^2)^2} \cdot u_A(x_{1(n)}), \quad (2.75)$$

якщо як базове використовують мінімальне  $x_1$  або максимальне  $x_n$  значення.

Інструментальна складова непевності для задач контролю параметрів пластмасових труб детально проаналізована і обчислена відповідно до конкретних ЗВТ та результатів вимірювань у 4 розділі.

## 2.8 Запропонована методика оцінювання непевності екстремальних спостережень

Відповідно до отриманих вище результатів, для оцінювання розширеної  $U_p(x_1)$  чи  $U_p(x_n)$  непевності екстремальних спостережень необхідно виконати наступні операції:

1. Зареєструвати і просортувати всі  $n$  спостережень та обчислити їх середнє значення  $\bar{x}$  (1.1) та оцінку стандартного відхилення  $s_x$  (1.2);
2. Для заданої кількості спостережень  $n$  та густини розподілу  $p(x)$  обчислити очікуване нормоване значення математичного сподівання  $m_{0,1}$  (2.10) або  $m_{0,n}$  (2.12) та стандартне відхилення  $\sigma_{0,1}$  (2.11) або  $\sigma_{0,n}$  (2.13);
3. Обчислити стандартну непевність мінімального  $u_A(x_1)$  або максимального  $u_A(x_n)$  спостереження за формулою (2.24);
4. Обчислити інструментальну складову непевності  $u_{cB}(x_1)$  або  $u_{cB}(x_n)$ ;
5. Обчислити сумарну стандартну непевність  $u_c(x_1)$  або  $u_c(x_n)$  (2.73);
6. Для заданого рівня довіри  $p$  за формулою (2.71) обчислити коефіцієнт  $z_{1,1,low}(n, p)$  для нижньої або  $z_{n,1,high}(n, p)$  для верхньої границі при односторонній ймовірності (або взяти з таблиці 2.2 при цьому для значень  $z_{n,1,high}(n, p)$  врахувати протилежний знак), можна також використати коефіцієнти розширення  $k_{1,low}(n, p)$  (2.51) або  $k_{1,high}(n, p)$  (2.52);
7. За виразом (2.74) або (2.75) обчислити розширену непевність  $U_{p,low}(x_1)$  або  $U_{p,high}(x_n)$ ;
8. Порівняти екстремальне значення  $x_1$  або  $x_n$  з урахуванням його непевності  $U_{p,low}(x_1)$  або  $U_{p,high}(x_n)$  із встановленим допустимим значенням згідно

з виразами (2.3), (2.4) та зробити висновок про відповідність чи невідповідність параметрів виробу НТД;

9. Залежно від вимог вказаних у нормативній документації при перевищенні допустимого (критичного) значення, можливою вимогою є повторення контрольних вимірювань і тоді, у випадку отримання подібних результатів виробу можуть бути забракованими.

### **Висновки до 2 розділу**

1. Розроблено метод оцінювання непевності екстремального (мінімального чи максимального) спостереження, який базується на властивостях порядкових статистик і який дозволяє обчислити стандартну і розширену непевність екстремальних спостережень за обчисленими середнім значенням та стандартним відхиленням вибірки та параметрами  $m_{0,1}$  і  $\sigma_{0,1}$  нормованого розподілу.

2. Оскільки функція густини розподілу максимального спостереження є симетрична до функції густини розподілу мінімального, то параметри непевності максимального значення можна обчислити так само, як і для мінімального значення. Однак необхідно звернути увагу, що відхилення максимального значення від очікуваного значення має протилежний знак.

3. Для поширеної моделі нормального розподілу спостережень й типової кількості спостережень  $n = 5$  отримано аналітичні вирази густини та функції розподілу для мінімального спостереження, які дозволяють безпосередньо теоретично обчислити коефіцієнт розширення для довільної імовірності та знайти мінімальну (ліву) границю для мінімального елемента і відповідно максимальну (праву) границю для максимального спостереження.

4. На основі порівняння залежностей описаних виразом (2.42) встановлено, що у випадку відсутності даних про розподіл спостережень за невеликої їх кількості ( $n \leq 6, 7$ ) для обчислення розширеної непевності можна використати значення коефіцієнта розширення для мінімального спостереження

отриманого у вибірці із нормальним розподілом. Для всіх досліджених розподілів при обмеженій кількості спостережень, наприклад, при  $n \leq 6, 7$ , коефіцієнт розширення мінімального спостереження відхиляється від коефіцієнта розширення мінімального спостереження для нормально розподілених спостережень не більше 3%, а для  $n = 10$  близько 14%.

5. Проведені дослідження методом Монте-Карло підтвердили добру збіжність теоретично одержаних результатів для нормального розподілу. Зокрема добру узгодженість результатів для  $n = 5$ , а саме розбіжність становить: для  $k_{\text{low}}(5, 0,90) = 0,0005$ ,  $k_{\text{low}}(5, 0,95) = 0,0004$ ,  $k_{\text{low}}(5, 0,975) = 0,0010$ .

6. Встановлено, що випадкові впливи на результати спостережень безпосередньо змінюють їх стандартне відхилення і тому у розширеній непевності вони можуть бути враховані безпосередньо. У випадку браку інформації про розподіл випадкових впливів коефіцієнти для обчислення розширеної непевності з достатньою для практики точністю (кілька відсотків) можна взяти такими як для нормального розподілу. Вплив систематичних зміщень можна врахувати обчисленням згортки розподілу систематичного впливу з розподілом нормованого відхилення екстремального спостереження. Встановлено, що якщо стандартне відхилення систематичного впливу не перевищує  $\approx 1/3$  від стандартного відхилення самих спостережень, то розширену непевність можна обчислити за спрощеним виразом на основі модифікації коефіцієнта розширення для нормального розподілу. Для модифікації коефіцієнта розширення за методом типу В слід обчислити стандартну непевність показів ЗВТ і далі обчислити відношення цієї непевності до стандартного відхилення спостережень.

7. Запропоновану методику можна використати для оцінювання непевності результатів при дослідженні на розрив, розтяг чи перпендикулярність, площинність, інших механічних чи геометричних властивостей параметрів матеріалів у виробничому процесі, а також при дослідженні вмісту шкідливих домішок чи елементів у продуктах харчової, фармацевтичної промисловості, де інформативним параметром контрольних



вимірювань є екстремальне спостереження (мінімальне чи максимальне значення із серії кількох спостережень).

### РОЗДІЛ 3

## МЕТОДИКА ОПРАЦЮВАННЯ МЕТОДОМ ПОРЯДКОВИХ СТАТИСТИК РЕЗУЛЬТАТІВ СПОСТЕРЕЖЕНЬ З АПРІОРИ НЕВІДОМИМИ РОЗПОДІЛАМИ

Як було зазначено у 1 розділі, метод порядкових статистик забезпечує найкращі (з мінімальним значенням стандартної непевності) оцінки параметрів розташування та ширини розкиду, якщо відома густина розподілу спостережень [17,18,70].

Для деяких моделей густин розподілів існують готові прості вирази для розрахунку випадкових порядкових статистик  $\lambda_k^n$ , та їх коваріаційних матриць  $\mathbf{COV}^n$  [13-15,27,70]. Однак для довільного розподілу, зокрема, якщо він є згорткою інших, істотною практичною проблемою застосування методу порядкових статистик (зразкових вибірок) є складність розрахунку коваріаційної матриці  $\mathbf{COV}$  порядкових статистик за формулою (1.30), яка є основою до розв'язку реконструктивної матриці  $\mathbf{REC}$  за формулою (1.28). Для обчислення кожного  $k, l$ -того елемента коваріаційної матриці  $\mathbf{COV}_{k,l}$  необхідно обчислювати подвійний інтеграл від виразу, що залежить від сумісного двовимірного розподілу ймовірностей  $p_{2_{k,l}}(s,z)$   $k$ -тої ( $s$ ) і  $l$ -тої ( $z$ ) порядкових статистик згідно з формулою (1.31), який загалом є складною функцією густин та функцій розподілу двох випадкових величин. Оскільки коваріаційна матриця  $\mathbf{COV}$  залежить від кількості спостережень  $n$  і має розмір  $n \times n$ , і вона є подвійно симетричною (відносно обох діагоналей), то для однієї густини розподілу слід обчислити приблизно  $n^2/4$  коефіцієнтів цієї матриці. Тому загальна кількість обчислень залежить від кількості аналізованих густин розподілів  $L$  і є пропорційною до  $\sim L \cdot n^2/4$ .

Складність розрахунку проявляється у тому, що у загальному випадку не для всіх розподілів можливо отримати аналітичне обчислення цих інтегралів, тому необхідно застосувати числові методи. У зв'язку з цим точність розрахунку

коваріаційної матриці, а далі оберненої до неї вагової матриці  $\mathbf{W}$  (1.29), зменшується, особливо при збільшенні кількості спостережень  $n$ . Таким чином реалізація обчислення коваріаційної матриці за «точними» виразами (1.30) з урахуванням (1.25), (1.31), (1.32) вимагає застосування числових методів обчислення інтегралів від складних функцій, і при значній кількості спостережень сумісна густина розподілу стає щораз складнішою і внаслідок цього точність обчислень цих інтегралів зменшується. Тобто «точний» метод обчислення коваріаційної матриці стає щораз менш точнішим, його точність тим менша, чим більша кількість спостережень. З'являється обчислювальна складова похибки (похибка числового методу) обчислення інтегралів коваріаційної матриці  $\mathbf{COV}$ .

### 3.1 Наближений метод порядкових статистик

Для спрощення розрахунку коваріаційної матриці використаємо асимптотичне наближення для дисперсії і коефіцієнтів кореляції між двома порядковими статистиками для великих  $n \rightarrow \infty$  [24,71]. Відомо, що квантилі  $\lambda_k$  і  $\lambda_l$  з вибірки взятої з генеральної сукупності з розподілом  $p(x)$ , при  $n \rightarrow \infty$  мають асимптотично нормальний розподіл з параметрами [23,24,27,28,71,102]:

- математичні сподівання  $m_k, m_l$  відповідних квантилів  $\lambda_k$  і  $\lambda_l$ :

$$m_k = \lambda_k, \quad m_l = \lambda_l, \quad (3.1)$$

- дисперсії  $\sigma_k^2, \sigma_l^2$ :

$$\sigma_k^2 \approx \frac{\lambda_k(1-\lambda_k)}{n(p(\lambda_k))^2}, \quad \sigma_l^2 \approx \frac{\lambda_l(1-\lambda_l)}{n(p(\lambda_l))^2}, \quad (3.2)$$

де  $p(\lambda_k), p(\lambda_l)$  - значення густини розподілу для квантилів  $\lambda_k$  і  $\lambda_l$ ;

- коефіцієнт кореляції  $\rho_{k,l}$  обох квантилів:

$$\rho_{k,l} \approx \sqrt{\frac{\lambda_k(1-\lambda_l)}{\lambda_l(1-\lambda_k)}}. \quad (3.3)$$

Для квантиля  $k$  з номером  $1 \leq k \leq n$ , тобто  $\lambda_k = k/(n+1)$  у першому наближенні можна записати :

$$\lambda_k = F^{-1}(\lambda_k) = F^{-1}(k/n+1), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3.4)$$

де  $F^{-1}(\lambda_k)$  – обернена функція розподілу.

На підставі залежностей (3.1)-(3.3) наближені значення коефіцієнтів коваріаційної матриці можуть бути обчислені відповідно до виразу [23,24]:

$$\text{COV}_{k,l} \approx \rho_{k,l} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_l = \frac{k \cdot (n+1-l)}{n(n+1)^2} \cdot \frac{1}{p(\lambda_k) \cdot p(\lambda_l)}, \quad 1 \leq k < l \leq n. \quad (3.5)$$

Тобто, згідно з (3.5) для наближеного обчислення коваріаційної матриці слід виконати лише прості арифметичні операції і мати лише аналітичний вираз густини розподілу  $p(x)$ .

Дослідження наближеного методу порядкових статистик проводилося у два етапи [23,24]:

1. Порівняння «точних» очікуваних значень порядкових статистик і значень елементів автоковаріаційної матриці, із значеннями розрахованими на основі запропонованих наближених залежностей, а також відповідних значень коефіцієнтів «точної» і наближеної дворядкової реконструктивної матриці **REC**;
2. Перевірка на ефективність наближеного методу шляхом обчислення характеристик похибок і непевності результатів отриманих за допомогою методу Монте-Карло з кількістю симуляцій (реалізацій)  $M = 10^5$ .

Досліджено вплив наближення на точність розрахунку двовимірних інтегралів коваріаційної матриці, далі реконструктивної матриці **REC** на основі наближеної коваріаційної матриці [23,24] у програмному пакеті Mathcad, оскільки це є потужний інструмент для проведення наукових досліджень. Він містить розбудовану бібліотеку функцій у різних галузях знань, які є оптимізовані для конкретних обчислень, проектування та підготовку документів з візуальним супроводженням.

Тому дослідження були зроблені для  $n = 21, 31, 41, 51$  і  $61$  у програмному середовищі Mathcad 11 із точністю  $10^{-13}$  на ПК ASUS Eee PC з процесором: AMD Athlon(tm) Neo Processor MV-40 1.60 GHz; ОЗП 2,00 ГБ; 32-розрядна операційна система. З метою можливості порівняння отриманих результатів для дослідження точності обчислення реконструктивної матриці використано розподіли, для яких відомі аналітичні розв'язки, зокрема для нормального.

Зокрема, для нормального розподілу значення всіх коефіцієнтів першого рядка мають бути однаковими і рівними  $1/n$ , тобто [23]:

$$\mathbf{REC}_j = \begin{pmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n & \dots & 1/n & 1/n \\ -\gamma_{1,j} & -\gamma_{2,j} & \dots & 0 & \dots & \gamma_{2,j} & \gamma_{1,j} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Під час обчислень елементів першого рядка матриці **REC** (таблиця 3.1) у програмному середовищі Mathcad «точним» методом з числовим обчисленням інтегралів (1.28)-(1.30) та наближеним методом визначили найбільшу та найменшу відносні похибки:

$$\delta_{\mathbf{REC}_{\text{prec},\text{max}}} = \frac{\max(\mathbf{REC}_{\text{prec}_{0,i}}) - 1/n}{1/n} \cdot 100\% = [n \cdot \max(\mathbf{REC}_{\text{prec}_{0,i}}) - 1] \cdot 100\%. \quad (3.7)$$

$$\delta_{\mathbf{REC}_{\text{prec},\text{min}}} = \frac{\min(\mathbf{REC}_{\text{prec}_{0,i}}) - 1/n}{1/n} \cdot 100\% = [n \cdot \min(\mathbf{REC}_{\text{prec}_{0,i}}) - 1] \cdot 100\%. \quad (3.8)$$

$$\delta_{\mathbf{RECapr},\text{max}} = \frac{\max(\mathbf{RECapr}_{0,i}) - 1/n}{1/n} \cdot 100\% = [n \cdot \max(\mathbf{RECapr}_{0,i}) - 1] \cdot 100\%. \quad (3.9)$$

$$\delta_{\mathbf{RECapr},\text{min}} = \frac{\min(\mathbf{RECapr}_{0,i}) - 1/n}{1/n} \cdot 100\% = [n \cdot \min(\mathbf{RECapr}_{0,i}) - 1] \cdot 100\%. \quad (3.10)$$

Виявлено, що при кількості спостережень  $n > 40 \div 50$  тривалість обчислення матриці **REC** зменшується приблизно пропорційно до кількості спостережень (таблиця 3.1). Наприклад, при  $n = 61$  тривалість обчислення матриці **REC<sub>prec</sub>** за «точним» методом становить понад 65 с, а тривалість обчислення матриці **RECapr** за пропонуваним методом близько 1 с.

Таблиця 3.1

Значення відносних похибок обчислення коефіцієнтів першого рядка «точної» матриці  $\delta_{REC_{prec};rel}$  і наближеної  $\delta_{REC_{capr};rel}$  та тривалість розрахунку для нормального розподілу спостережень при  $n = 21, \dots, 61$

	n = 21	n = 31	n = 41	n = 51	n = 61
$\delta_{REC_{prec};max}, \%$	3,26	21,15	38,85	66,23	89,80
$\delta_{REC_{prec};min}, \%$	-1,01	-31,84	-56,35	-107,17	-140,73
Тривалість, с	15,03	22,60	34,00	49,01	65,40
$\delta_{REC_{capr};max}, \%$	23,25	25,29	26,49	27,30	27,89
$\delta_{REC_{capr};min}, \%$	-3,01	-2,17	-1,71	-1,41	-1,20
Тривалість, с	1,06	1,04	1,07	1,02	1,09

Крім того, на рисунку 3.1 для  $n = 21, 31, 41, 51, 61$  подано залежності відносних похибок обчислення матриці **REC**.

Отже, при кількості спостережень  $n \geq 40$  обчислення за «точними» виразами (1.28), (1.30) дають гірший результат, а обчислення за наближеними виразами (1.28), (3.5) дають точніший результат обчислень основної матриці **REC**. Тобто при великій кількості спостережень ( $n \geq 40$ ) запропонований наближений метод обчислення дає точніші результати, ніж під час прямого обчислення інтегралів до знаходження відповідних елементів матриць, це зумовлено тим, що так званий «точний» метод вимагає обчислення інтегралів від щораз складніших двовимірних функцій відповідно до (1.30)-(1.32). Крім того, запропонований наближений метод забезпечує істотний виграш у часі.

Подібна ситуація спостерігається у випадку при  $n \geq 40$  для інших густин розподілу спостережень [23]. Оскільки неточність матриці **REC** безпосередньо впливає на точність обчислюваних за формулою (1.26) параметрів  $(\hat{\mu}; \hat{\sigma})$ , то цей факт має важливе значення, і з досліджень випливає, що при збільшенні

кількості спостережень точність обчислюваних значень є кращою в наближеному методі [23,24].

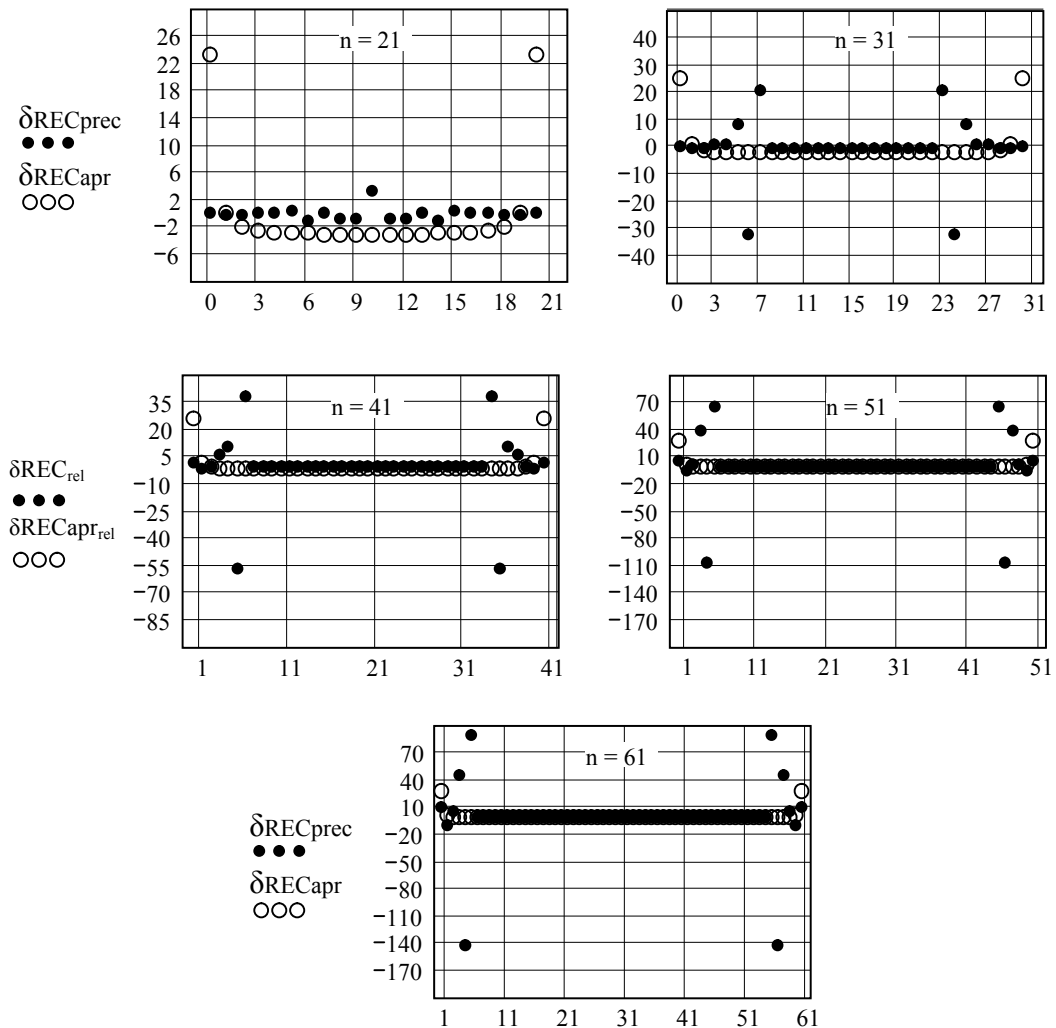


Рисунок 3.1 - Значення відносних похибок обчислення коефіцієнтів першого рядка «точної» матриці  $\delta REC_{prec}$  (●) та наближеної  $\delta RE_{Capr}$  (○) для нормального розподілу спостережень при  $n = 21, \dots, 61$

На другому етапі результати дослідження стосуються значення параметрів розташування  $\mu_0 = 5,000$  і ширини  $\sigma = 0,200$  [23,24]. Ефективність цих двох методів порівнювали за допомогою статистичного аналізу значень похибок відносно заданого значення  $\mu_0$   $\Delta_j^{(n)} = \hat{\mu}_j^{(n)} - \mu_0$  параметра розташування  $\hat{\mu}$  і його стандартної непевності  $u_{A,j}^{(n)}(\hat{\mu})$  відносно заданої оцінки  $\hat{\mu}$  [23,24].

З метою унезалежнення значень оцінок від значень стандартного відхилення самих спостережень і стандартного відхилення середнього значення

(що є найкращою оцінкою стандартної непевності середнього значення при нормальному розподілі) характеристики похибок і непевності нормовані до стандартного відхилення (стандартної непевності) середнього значення (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2

Характеристики стандартних похибок і непевності  
«точних» і наближених методів [23]

n	Характеристики похибок				Характеристики непевності			
	«Точний»		Наближений		«Точний»		Наближений	
	$\frac{\bar{\Delta}_{\hat{\mu}}}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{s_{\Delta(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{\bar{\Delta}_{\hat{\mu}}}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{s_{\Delta(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{\bar{u}(\hat{\mu})}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{s_{u(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{\bar{u}(\hat{\mu})}{\sigma_{\mu}^-}$	$\frac{s_{u(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^-}$
Розподіл Лапласа								
21	$3,43 \cdot 10^{-3}$	0,886	$3,73 \cdot 10^{-3}$	0,922	0,782	0,247	0,817	0,303
41	$-2,96 \cdot 10^{-3}$	0,842	$-5,05 \cdot 10^{-3}$	0,863	0,799	0,193	0,820	0,210
61	$6,77 \cdot 10^{-3}$	0,831	$8,59 \cdot 10^{-3}$	0,845	0,800	0,168	0,802	0,180
Розподіл нормальний								
21	$4,71 \cdot 10^{-3}$	1,079	$5,14 \cdot 10^{-3}$	1,077	0,822	0,266	0,860	0,285
41	$3,25 \cdot 10^{-3}$	1,030	$3,62 \cdot 10^{-3}$	1,033	0,937	0,203	0,962	0,211
61	$10,9 \cdot 10^{-3}$	1,019	$11,0 \cdot 10^{-3}$	1,019	0,976	0,158	0,993	0,162
Розподіл арксинусоїдний								
21	$-8,79 \cdot 10^{-3}$	0,470	$-8,10 \cdot 10^{-3}$	0,423	0,269	0,204	0,235	0,259
41	$-2,54 \cdot 10^{-3}$	0,459	$-2,85 \cdot 10^{-3}$	0,476	0,168	0,152	0,176	0,175
61	$-0,10 \cdot 10^{-3}$	0,099	$-0,41 \cdot 10^{-3}$	0,100	0,134	0,127	0,150	0,141



А саме, нормовані (до теоретичного значення стандартного відхилення  $\sigma_{\mu}^{-} = \sigma / \sqrt{n}$  від середнього значення) параметри похибок і стандартної непевності результатів отриманих для точних і наближених методів в залежності від кількості спостережень  $n$  наведено в таблиці 3.2 [23,24].

У таблиці 3.3 для рівномірного розподілу не потрібно робити обчислення наближеним методом, тому що це той випадок, для якого існують готові аналітичні розв'язки для коваріаційної матриці, тобто є прості точні вирази для всіх елементів коваріаційної матриці **COV** порядкових статистик та реконструктивної матриці **REC**.

Таблиця 3.3

## Характеристики стандартних похибок і непевності

за «точним» методом для рівномірного розподілу  $n = 21, 41, 61$  [23]

n	Характеристики похибок		Характеристики непевності	
	$\frac{\overline{\Delta \hat{\mu}}}{\sigma_{\mu}^{-}}$	$\frac{s_{\Delta(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^{-}}$	$\frac{\overline{u(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^{-}}$	$\frac{s_{u(\hat{\mu})}}{\sigma_{\mu}^{-}}$
21	$8,93 \cdot 10^{-3}$	0,771	0,516	0,257
41	$4,12 \cdot 10^{-3}$	0,619	0,460	0,237
61	$10,3 \cdot 10^{-3}$	0,552	0,399	0,240

З даних наведених у таблиці 3.2 можна зауважити, що різниця між середніми значеннями стандартних відхилень похибок визначення параметру розташування в обидвох методах не перевищує декількох відсотків, а саме вона становить [23,24]:

- для розподілу Лапласа: 4,0 % ( $n = 21$ ); 2,5 % ( $n = 41$ ); 1,7 % ( $n = 61$ );
- для нормального: 0,26 % ( $n = 21$ ); 0,25 % ( $n = 41$ ); 0,02 % ( $n = 61$ );
- для типу арксинусоїдного: 9,9 % ( $n = 21$ ); 3,4 % ( $n = 41$ ); 0,4 % ( $n = 61$ ).

Різниця між середніми значеннями стандартної непевності параметра розташування в обидвох методах дещо більша, а саме [23,24]:

- для розподілу Лапласа: 4,5 % ( $n = 21$ ); 2,6 % ( $n = 41$ ); 0,3 % ( $n = 61$ );
- для нормального: 4,6 % ( $n = 21$ ); 2,7 % ( $n = 41$ ); 1,7 % ( $n = 61$ );
- для типу арксинусоїдного: 12,5 % ( $n = 21$ ); 4,9 % ( $n = 41$ ); 11,7 % ( $n = 61$ ).

Крім того з таблиці 3.2, бачимо, що при відхиленні розподілу ймовірностей від нормального розподілу, як і слід було очікувати, «точний» і наближений методи дають менше стандартне відхилення похибок і стандартну непевність результату (параметр розташування) порівняно зі стандартним відхиленням похибки та стандартною непевністю середнього значення [23,24]. Що є підтвердженням ефективності і практичної доцільності застосування запропонованого наближеного методу порядкових статистик до опрацювання результатів спостережень з апіорі невідомим розподілом.

### **3.2 Застосування наближеного методу порядкових статистик для опрацювання спостережень з плоско-нормальним розподілом**

На практиці вимірювальні спостереження не завжди підпорядковані якомусь "чистому" розподілу, наприклад нормальному, Лапласа, рівномірному і т. д [27,29,102]. Часто функція густини розподілу може бути комбінацією двох чи більше якихось типових розподілів, наприклад згортка нормального і рівномірного розподілів [27,29,102]. Відомо, що розподіл суми  $x = x_1 + x_2$  двох незалежних випадкових величин  $x_1$  і  $x_2$  залежить від їх густин розподілу  $p_1(x_1)$  і  $p_2(x_2)$ , їх взаємного вмісту у сумі і визначається згортокою розподілів [27,28,29,102,103]:

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x - x_2) \cdot p_2(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1) \cdot p_2(x - x_1) dx_1. \quad (3.11)$$

Зокрема, якщо розподіл  $p_1(x_1) = p_1(x_n)$  нормальний (математичне сподівання  $m_n$  та стандартне відхилення  $\sigma_n$ ) і розподіл  $p_2(x_2) = p_2(x_u)$  рівномірний (математичне сподівання  $m_u$  і піврозмах  $a$ ), тобто:

$$p_1(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{(x_n - m_n)^2}{2\sigma_n^2}}, \quad (3.12)$$

$$p_2(x_u) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & m_u - a \leq x_u \leq m_u + a \\ 0, & x_u < m_u - a, x_u > m_u + a \end{cases}. \quad (3.13)$$

тоді розподіл суми  $x = x_n + x_u$  після підстановки (3.12) та (3.13) у (3.11) можна описати формулою [27,28,29,102-106]:

$$p_{n,u}(x, m, a, \sigma) = \frac{F_n((x - m + a)/\sigma_n) - F_n((x - m - a)/\sigma_n)}{2a}. \quad (3.14)$$

де  $F_n(x)$  - функція Лапласа;

$m = m_n + m_u$  - математичне сподівання суми величин.

Розподіл ймовірності (3.14) використовується у наближених методах розрахунку розширеної непевності результату вимірювання з нормальною та рівномірною складовими [27,102-107]. Зокрема, такий випадок має місце під час оцінювання непевності мінімального (максимального) спостереження (розділ 2), якщо розподіл самих спостережень є рівномірний, а випадковий вплив має нормальний розподіл, або навпаки. У вітчизняній літературі цей розподіл ще не має спеціальної назви, хоча в міжнародних публікаціях його називають «плоско–нормальним розподілом», або «Flatten-Gaussian distribution» [27-29,102,103,106,107]. Ця назва добре відображає форму функції густини ймовірності цього розподілу, оскільки в серединній частині розподіл є плоским, а бічні схили є дзвоноподібними, і він нагадує сплющену функцію Гауса (рисунок 3.2) [27].

Оцінювання найкращого результату (з найменшим стандартним відхиленням) з такої суми  $x = x_n + x_u$  вимагає знання взаємного вмісту складових, однак на практиці переважно такої апріорної інформації немає [27-29,71,102]. У випадку коли інформація про вміст складових є відсутня, тобто форма розподілу суми невідома, застосовується метод порядкових статистик (зразкових вибірок), описаний в розділі 1 п. 1.3.

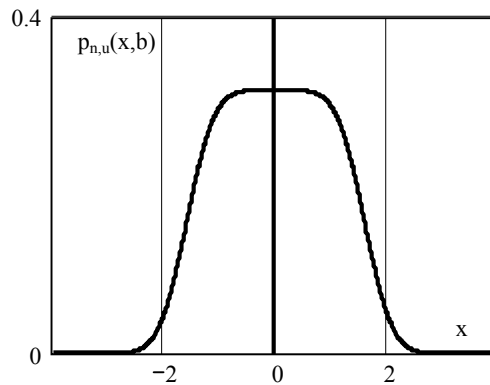


Рисунок 3.2 - Густина плоско-нормального розподілу

Для застосування цього методу під час знаходження зразкових спостережень та коваріаційної матриці необхідно мати вираз нормованої густини розподілу випадкової величини  $y = (x - m_x)/\sigma_x$  з  $m_x = 0$ ,  $\sigma_x = 1$  [27-29,102]. Оскільки у цьому випадку стандартне відхилення суми двох складових має дорівнювати 1.

Враховуючи, що у рівномірному розподілі (3.13) дисперсія становить  $a^2/3$ , то при дисперсії  $\sigma_n^2$  нормального розподілу ця умова може бути записана як:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_u^2} = \sqrt{\sigma_n^2 + a^2/3} = 1. \quad (3.15)$$

Позначивши співвідношення стандартних відхилень нормальної складової  $\sigma_n$  до рівномірної  $\sigma_u = a/\sqrt{3}$ , як:

$$b = \sigma_n/\sigma_u = \sigma_n\sqrt{3}/a, \quad (3.16)$$

з умови  $\sigma_x = 1$  за формулою (3.15) отримаємо значення параметрів розкиду обидвох розподілів [27-29,102]:

$$\text{для рівномірного } a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+b^2}}, \quad (3.17)$$

$$\text{для нормального } \sigma_n = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}. \quad (3.18)$$

Коефіцієнт  $b = \sigma_n / \sigma_u$  є параметром плоско-нормального розподілу, який однозначно його описує. Нормований розподіл суми складових у формулі (3.14) залежить лише від одного параметру  $b$  і описується залежністю [27-29,102]:

$$p_{n,u}(x,b) = \frac{\sqrt{1+b^2}}{2\sqrt{3}} \left[ F\left(\frac{x \cdot \sqrt{1+b^2} + \sqrt{3}}{b}\right) - F\left(\frac{x \cdot \sqrt{1+b^2} - \sqrt{3}}{b}\right) \right]. \quad (3.19)$$

Нормований плоско-нормальний розподіл з різними параметрами  $b$  (3.19) подано на рисунку 3.3, з якого можна зауважити, що зі зміною параметра  $b$  розподіл може змінюватись від нормального до рівномірного. Зокрема (рисунок 3.3), при збільшенні  $b$  розподіл прямує до нормального (вміст рівномірної складової нехтовно малий), а при зменшенні до рівномірного (вміст нормальної складової нехтовно малий).

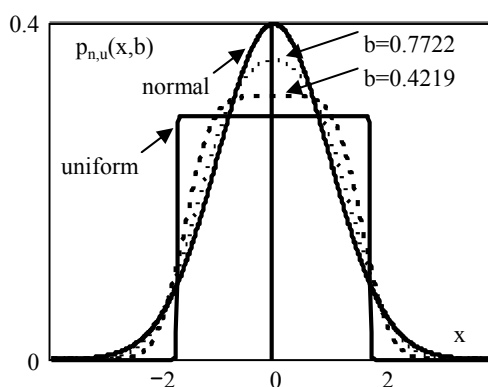


Рисунок 3.3 - Нормований плоско-нормальний розподіл для  $b = \infty$  (нормальний); 0,7722; 0,4219; 0 (рівномірний) [28]

Ефективність методу порядкових статистик залежить від «відстані» між відповідними розподілами. Кількість зразкових розподілів між нормальним і рівномірним у методі порядкових статистик має бути обмежена. Основний параметр, який характеризує форму функції густини розподілу є контрексцес [12], який обчислюється за формулою (2.59).

Для плоско-нормального розподілу (рисунок 3.4) контрексцес можна обчислити за виразом:

$$k(b) = \frac{1}{\sqrt{2 \int_0^{\infty} x^4 \frac{\sqrt{1+b^2}}{2\sqrt{3}} \left[ F\left(\frac{x \cdot \sqrt{1+b^2} + \sqrt{3}}{b}\right) - F\left(\frac{x \cdot \sqrt{1+b^2} - \sqrt{3}}{b}\right) \right] dx}}. \quad (3.20)$$

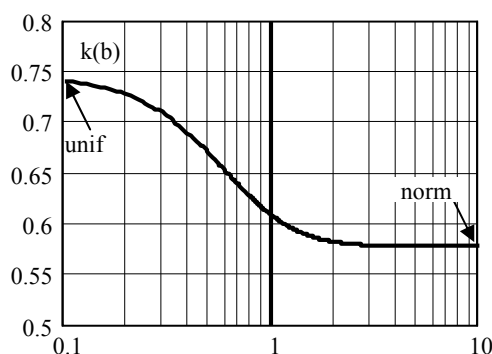


Рисунок 3.4 – Контрекссес для плоско-нормального розподілу

Відповідно до виразу (3.20) очислено значення контрекссесу для  $b = 0,1; 0,4219; 0,7722; 1,295; 2,370; 20$  та подано у таблиці 3.4.

Таблиця 3.4

Значення контрекссесу для плоско-нормального розподілу

b	0,1	0,4219	0,7722	1,295	2,370	20
Контрекссес	0,741	0,684	0,629	0,594	0,580	0,577

Два крайні з обох боків значення параметра плоско-нормального розподілу:

- $b = 0,1$  розподіл практично стає рівномірним (контрекссес  $0,745$ );
- $b = 20$  розподіл стає нормальним (контрекссес  $0,577$ ).

Отже, якщо між нормальним ( $b = \infty$ , контрекссес  $0,577$ ) і рівномірним ( $b = 0$ , контрекссес  $0,745$ ) розташовано всього два зразкові розподіли, тоді на основі рівновіддаленості контрекссесів цих розподілів вони повинні бути рівними приблизно  $0,684$  і  $0,629$  (таблиця 3.4) [28]. Для цих значень параметр  $b$  плоско-нормального розподілу у (3.14) має дорівнювати приблизно  $0,7722$  і

0,4219 та два інші значення параметра  $b$  знайдено, як обернені до обчислених вище величин, тобто 1,295 і 2,370 [28].

Зразкові спостереження, які потрібні до реалізації методу порядкових статистик можуть бути розраховані за формулами (1.24), (1.25) з використанням нормованої густини розподілу (3.14) та функції розподілу  $F_{n,u}(x, b)$ :

$$F_{n,u}(x, b) = \int_{-\infty}^x p_{n,u}(x, b) dx . \quad (3.21)$$

Для кількості спостережень  $n=21, 31, 41, 51$  та параметра розподілу  $b=20$ ; 0,7722; 0,4219; 0,1 зразкові спостереження показані на рисунку 3.6 [27,29,102]:

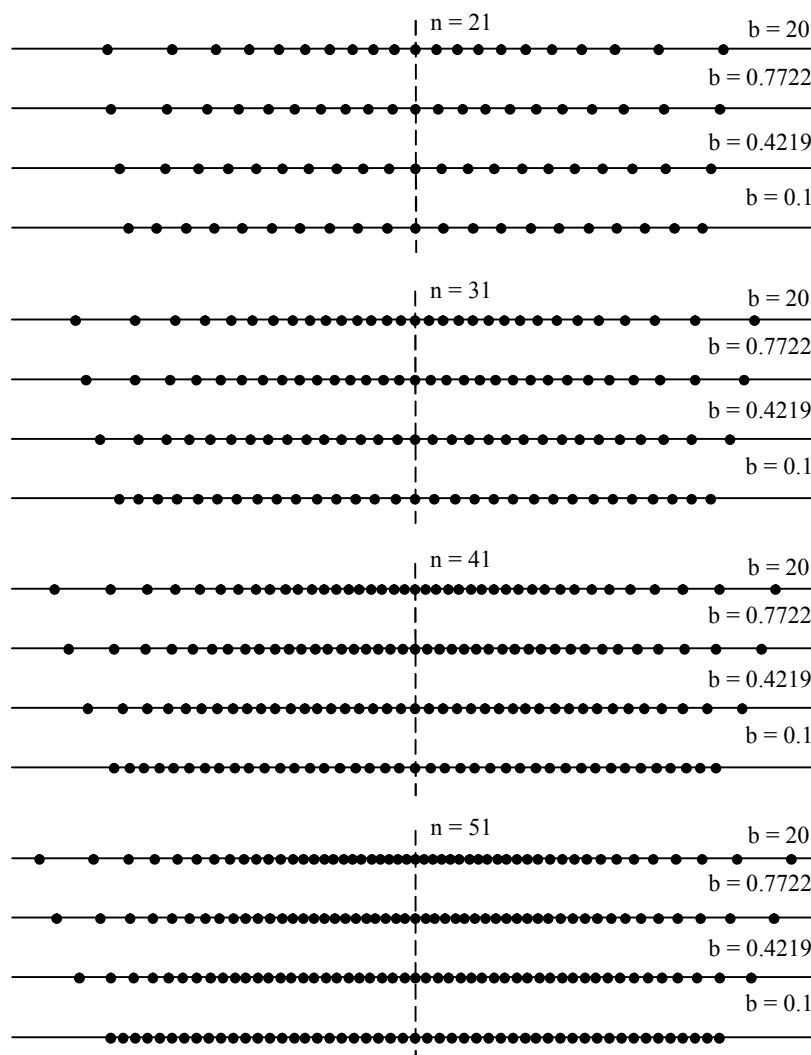


Рисунок 3.6 - Приклади наборів зразкових спостережень, які відповідають густині з плоско-нормального розподілу при  $n = 21, 31, 41, 51$  для  $b = 20$  (практично нормальний); 0,7722; 0,4219; 0,1 (практично рівномірний).

Незалежно від кількості спостережень  $n$ , при малих значеннях параметра  $b$  зразкові спостереження, як бачимо з рисунку 3.6, мають значення такі як для рівномірного розподілу, а при збільшенні параметру  $b$  їх значення стають щораз ближчими до значень, як для нормального розподілу.

Значення  $xref_k$  зразкових спостережень можна приблизно розрахувати за розв'язанням нелінійного рівняння, яке описується функцією розподілу  $F_{n,u}(x, b)$  з формули (3.21) в урахуванням того, що незалежно від розподілу при  $n$  спостереженнях відповідно до залежності (3.4) для квантилю з номером  $k$  значення функції розподілу становить [28,71]:

$$F_{n,u}(xref_k, b) \approx k/(n+1). \quad (3.22)$$

У формулі (3.14) введемо позначення  $y_1 = (x \cdot \sqrt{1+b^2} + \sqrt{3})/b$ ,  $y_2 = (x \cdot \sqrt{1+b^2} - \sqrt{3})/b$ , тоді після інтегрування (3.21) отримаємо вираз функції плоско-нормального розподілу:

$$F_{n,u}(x, b) = \frac{b}{2\sqrt{3}} \left[ y_2 F(y_2) - y_1 F(y_1) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{-y_1^2/2} - e^{-y_2^2/2} \right) \right]. \quad (3.23)$$

Нелінійне рівняння (3.22) з урахуванням (3.23) можна розв'язати використовуючи метод Ньютона-Рафсона [108,109]. При цьому, оскільки значення зразкових спостережень симетричні відносно нуля:  $xref_k = -xref_{n-k}$ , то потрібно обчислювати лише половину значень. З аналізу рівнянь (3.22) та (3.23) виявляється, що для отримання розв'язку з точністю до чотирьох десяткових розрядів необхідні лише 2-3 ітерації ( $It = 2$ ), починаючи з  $xref_{floor(n/2),j}^{(It)} = 0$ . Алгоритм розрахунку зразкових спостережень з наступного алгоритму [28]:

$$xref_{k,j}^{(0)} = xref_{k-1,j}^{(It)}, \quad it = 1..It, \quad (3.24a)$$

$$k = floor(n/2) .. n-1, \quad (3.24б)$$

$$xref_{k,j}^{(it)} = xref_{k-1,j}^{(it-1)} - \frac{F_{n,u}(xref_{k-1,j}^{(it-1)}, b) - \frac{k+1}{n+1}}{p_{n,u}(xref_{k-1,j}^{(it-1)}, b)}, \quad (3.24в)$$



$$xref_{n-k,j}^{(It)} = -xref_{k,j}^{(It)}. \quad (3.24г)$$

Використавши асимптотичні залежності для параметрів квантилів  $\lambda_k = k/(n+1)$  і  $\lambda_l = l/(n+1)$  [28,29], значення дисперсій  $\sigma_k^2$ ,  $\sigma_l^2$  та коефіцієнт кореляції  $\rho_{k,l}$  цих квантилів для плоско-нормального розподілу  $p_{n,u}(x, b)$  відповідно до формул (3.2), (3.3) матимуть вигляд [28]:

$$\sigma_k^2 \approx \frac{k(n+1-k)}{n \cdot (n+1)^2 \cdot (p_{n,u}(xref_k, b))^2}, \quad \sigma_l^2 \approx \frac{l(n+1-l)}{n \cdot (n+1)^2 \cdot (p_{n,u}(xref_l, b))^2}, \quad (3.25)$$

$$\rho_{k,l} \approx \sqrt{k(n+1-l)/l(n+1-k)} \quad (3.26)$$

Тоді наближена коваріація згідно з формулою (3.5) для плоско-нормального розподілу  $p_{n,u}(x, b)$  може бути визначена за формулою [27-29,102]:

$$Cov_{k-1,l-1} \approx \rho_{k,l} \cdot \sigma_k \cdot \sigma_l = \frac{k \cdot (n+1-l)}{n(n+1)^2} \cdot \frac{1}{p_{n,u}(xref_k, b) \cdot p_{n,u}(xref_l, b)}, \quad (3.27)$$

$$1 \leq k < l \leq n.$$

Після визначення з формули (1.26) найкращого значення параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  результатів спостережень для плоско-нормального розподілу  $p_{n,u}(x, b)$  їх стандартні непевності  $u_A(\hat{\mu})$  і  $u_A(\hat{\sigma})$  можуть бути розраховані згідно з формулою (1.35), а розширені непевності  $U_p(\hat{\mu})$  і  $U_p(\hat{\sigma})$  за формулою (1.7).

### 3.3 Дослідження ефективності застосування наближеного методу порядкових статистик до опрацювання спостережень з плоско-нормальним розподілом методом Монте-Карло

Перед виконанням перевірки ефективності запропонованого методу ММК після впорядкування спостережень відповідно до методу порядкових статистик, описаного в розділі 1 п. 1.3, спершу були розраховані матричні компоненти для плоско-нормального розподілу при  $n = 21, 31, 41, 51$ , які необхідні для визначення параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  розподілу:

- наближена коваріація  $\mathbf{COV}_{k-1,l-1}$  за формулою (3.27);
- обернена матриця коваріації  $\mathbf{W}$  за виразом (1.29);
- матриця зразкових спостережень  $\mathbf{A}^T$  за формулою (1.27);
- реконструктивна матриця  $\mathbf{REC}$  за формулою (1.28);
- дисперсійна матриця  $\mathbf{D}$  за виразом (1.36);
- вагова матриця  $\mathbf{MS2}$  (де  $\mathbf{I}$  - діагональна одинична матриця розміром  $n \times n$ ), обчислена за виразом (1.34).

Для перевірки ефективності запропонованого наближеного методу порядкових статистик було використано ММК:  $M = 10^5$ ;  $n = 21, 31, 41, 51$ . Значення параметра  $b = 0,1; 0,4219; 0,7722; 1.295; 2.370; 20$ , математичне сподівання  $m_x = 5$ , стандартне відхилення  $\sigma_x = 0,1$  та попередньо обчислені значення матриць:  $\mathbf{REC}$ ,  $\mathbf{MS2}$ , та  $\mathbf{D}$ .

Згідно з етапами алгоритму опрацювання спостережень за ММК, описаних у розділі 1 п. 1.6, згенеровано  $j = 1, 2, \dots, M$  випадкових значень для плоско-нормального розподілу при  $n = 21, 31, 41, 51$  та  $b = 0,1; 0,4219; 0,7722; 1.295; 2.370; 20$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) та згідно з методу порядкових статистик обчислено [27-29,102]:

- оцінки параметрів розташування  $\hat{\mu}_{j,i}$  та ширини  $\hat{\sigma}_{j,i}$ ;
- оцінки дисперсії відхилень  $S_{R_{j,i}}^2$  вхідної вибірки від зразкової за формулою (1.33);
- проаналізовано  $S_{R_{N,i}}^2 = \min(S_{R_{j,i}}^2)$  (де  $N$  – номер зразкової вибірки, для якої отримано найкраще узгодження вхідних та зразкових спостережень);
- визначено найкращі значення параметрів розташування  $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}_{N,i}$  та ширини  $\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_{N,i}$ ;
- визначено стандартні непевності параметрів розташування та ширини за виразом (1.35).

Статистичне опрацювання отриманих результатів, а саме:

- обчислено середні значення розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  за етапом 6 (розділ 1 п. 1.6);

- стандартне відхилення цих параметрів за етапом 6 (розділ 1 п. 1.6);
- значення похибки (відносно заданого значення  $m_x$ ) та стандартне відхилення (відносно заданого значення  $\sigma_x$ ) похибок цих параметрів:

$$s_{\Delta_{\hat{\mu}}} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\mu}_i - m_x)^2}, \quad s_{\Delta_{\hat{\sigma}}} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\hat{\sigma}_i - \sigma_x)^2}; \quad (3.28)$$

- середні стандартні непевності оцінюваних параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$ :

$$\overline{u_A(\hat{\mu})} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_A^2(\hat{\mu}_i)}, \quad \overline{u_A(\hat{\sigma})} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M u_A^2(\hat{\sigma}_i)}. \quad (3.29)$$

Характеристики стандартної непевності, похибки параметра розташування і теоретична стандартна непевність середньоарифметичного  $\sigma_x = \sigma_x / \sqrt{n}$  представлені в Додатку Г, таблиця Г.1.

Знайдені за ММК значення стандартних непевностей параметрів розташування  $\hat{\mu}$  і ширини  $\hat{\sigma}$  в залежності від кількості спостережень і значення параметра  $b$  показані на рисунку 3.6.

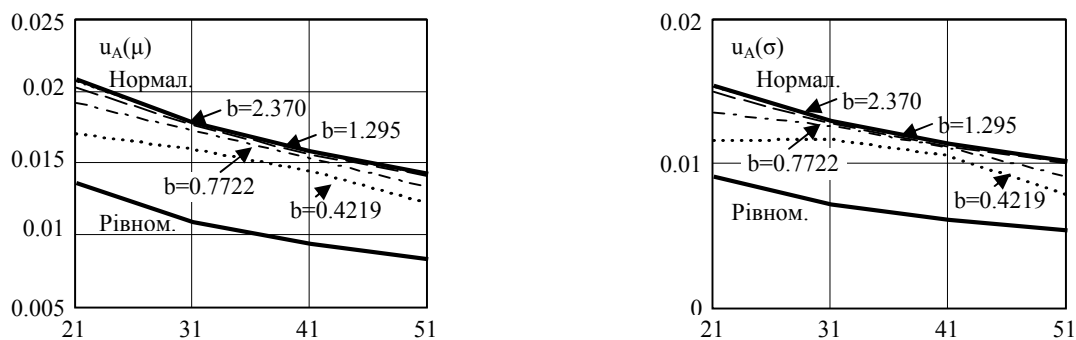


Рисунок 3.5 - Знайдені за ММК значення стандартних непевностей параметрів розташування і ширини в залежності від  $n$  і значення параметра  $b$

З порівняння даних у Додатку Г, таблиці Г.1 та представлених на рисунку 3.5 експериментальних стандартних непевностей параметра розташування, які розраховуються запропонованим методом, з теоретичною стандартною непевністю середньоарифметичного виявлено, що ефективність запропонованого метода збільшується зі зменшенням параметра  $b$  (переважає

рівномірної складової у плоско-нормальному розподілі) та кількості  $n$  спостережень [27,28]. Ті ж результати отримані при непевності параметра ширини. Якщо параметр  $b$  зростає (переважає нормальна складова) запропонований метод дає стандартну непевність, яка дуже близька до стандартної непевності середньоарифметичного, тобто не погіршує її [27,28].

### Висновки до 3 розділу

1. Отримано залежності для наближеного обчислення коваріаційної матриці порядкових статистик, яка є необхідною для реалізації опрацювання спостережень методом порядкових статистик. Для обчислень необхідно знати кількість спостережень, набір можливих густин розподілу спостережень і їх функції розподілу. Коефіцієнти матриці обчислюють простими залежностями відповідно до формули (3.5).

2. Досліджено характеристики точності наближеного формування матричних компонентів для методу порядкових статистик. Встановлено, що запропонований наближений метод дає кращу точність обчислення елементів матриць порівняно з «точним» формуванням матричних компонентів, отриманих обчисленням подвійних інтегралів числовим методом. Точність запропонованого методу зростає зі збільшенням кількості спостережень. Реалізація «точного» методу вимагає застосування числових алгоритмів, які при складних функціях і значній кількості спостережень понад 40 ( $n \geq 40$ ) дають обчислювальну похибку у десятки і навіть більше відсотків. Запропонований наближений метод, який не містить складних розрахунків і завдяки цьому стає точнішим, при  $n \geq 40$  дає максимальну похибку лише для крайніх елементів реконструктивної матриці у декілька разів меншу.

3. Крім підвищення точності обчислення запропонований метод забезпечує істотне (приблизно у кількість спостережень) збільшення швидкості обчислень, що є важливим при підготовці матричних компонентів до заздалегідь незаданої кількості спостережень та наперед незаданого набору можливих густин розподілу.

4. Методом Монте-Карло досліджено ефективність методу порядкових статистик до опрацювання спостережень із наперед невідомим розподілом. Різниця між середніми значеннями стандартних відхилень похибок визначає параметр розташування та в обидвох методах не перевищує декількох відсотків. Різниця між середніми значеннями стандартної непевності параметра розташування в обидвох методах незначна, тобто наближений метод можна успішно застосовувати до опрацювання результатів спостережень за апіорі невідомого розподілу.

5. Отримано залежності для застосування матричних компонентів порядкових статистик при опрацюванні спостережень з плоско-нормальним розподілом.

6. Методом Монте-Карло досліджено ефективність методу порядкових статистик до опрацювання спостережень з плоско-нормальним розподілом з широким діапазоном зміни параметру цього розподілу, тобто розподілів від нормального до рівномірного. Встановлено, що ефективність наближеного методу порядкових статистик при опрацюванні спостережень з плоско-нормальним розподілом збільшується при збільшенні впливу рівномірної складової у вхідних спостереженнях.

## РОЗДІЛ 4

### РЕЗУЛЬТАТИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ТА МОДЕЛЮВАННЯ МЕТОДОМ МОНТЕ – КАРЛО

Як було зазначено у вступі загалом контроль параметрів промислових виробів, а також і продуктів харчування і медичних препаратів відбувається згідно із затвердженими методиками, основними елементами яких є [25,26,30-32,110-119]:

1. відбір і підготовка певної кількості зразків, які будуть досліджуватися;
2. виконання необхідної кількості вимірювань за допомогою встановлених ЗВТ і у встановлених умовах;
3. опрацювання отриманих результатів з метою формулювання результатів контролю.

Для кожного різновиду об'єктів вимірювань встановлюються свої вимоги, як щодо обсягу вимірювань, характеристик ЗВТ та умов вимірювань так і щодо методики опрацювання результатів.

#### **4.1 Стандартна методика дослідження пластмасових виробів на розтяг та розрив**

Теоретичні результати роботи, які отримані у розділі 2 і які стосуються обчислення стандартної та розширеної непевності екстремальних спостережень були перевірені під час експериментальних досліджень з контролю якості пластмасових труб (на розтяг та розрив), які використовуються для будівництва газових та водяних мереж чи інших потреб, виконували в лабораторії ТзОВ «Ельпласт-Львів» [25,26].

Для контролю якості виробів із пластмас, в даному випадку пластмасових труб, що використовують для господарсько-питного водопостачання та для будівництва чи ремонту мереж газопостачання, відповідно до стандартних методик [5-8] відбирають не менше 5 зразків (лопаток) вирізаних з досліджуваних труб. При випробовуванні пластмасових труб для подачі

холодної води застосовують зразки-лопаток тип 1, а для подачі горючих газів тип 2, які відрізняються лише розмірами [5-8].

Оскільки шукані контрольовані параметри: відносне видовження та межа плинності не вимірюються прямо чи безпосередньо, а опосередковано на підставі прямих вимірювань інших величин, то для коректного опрацювання результатів експериментальних досліджень необхідно врахувати саму методику виконання вимірювань, основні залежності шуканих величин від результатів спостережень, метрологічні властивості вимірювальної апаратури та умови вимірювань. Тому далі необхідно детально описати всі складові вимірювального процесу, крім того необхідно враховувати потрібну інформацію, яка стосується об'єкту вимірювання, досліджуваних зразків – лопаток.

Згідно з [5,7,8,120], випробовування необхідно проводити не раніше, ніж через 24 години після виготовлення труб, включаючи час кондиціонування. Розміри труб необхідно визначати за температури  $(23 \pm 2)^\circ\text{C}$ . Перед випробуванням на зразки-лопаток наносять необхідні позначки [121], які не повинні погіршувати якість зразків та здійснювати розрив у місці позначки.

На зразках-лопатках мікрометром з відповідними метрологічними характеристиками вимірюють товщину  $d$  та ширину в робочій частині  $b_2$  не менше, ніж у трьох поперечних перерізах з допустимим відхиленням за шириною не більше  $\pm 0,05$  мм та за товщиною не більше  $\pm 0,01$  мм [5,6]. Площу кожного початкового поперечного перерізу зразка  $A_0$ , яку обчислюють з допустимим відхиленням до  $\pm 0,001$  см<sup>2</sup> [5,6], визначають згідно з [121]:

$$A_0 = D \cdot b_2 \quad , \quad (4.1)$$

де  $D$  – товщина робочої частини, мм;

$b_2$  – ширина робочої частини, мм.

Зразки-лопаток закріплюють в затискачах випробувальної машини по позначках [121]. Затискачі рівномірно затягують, щоб не було ковзання зразка у процесі випробування та руйнування в місці його закріплення. На випробувальній машині вимірюють навантаження  $F_{PT}$ ,  $H$ , при якому досягається межа плинності та видовження  $\Delta l_P$ , мм зразка в момент його розриву.

При випробуванні контрольованими показниками якості пластмасових труб є межа плинності при розтягуванні та відносне видовження при розриві. Межу плинності при розтягу та відносне видовження при розриві необхідно визначити за [121], на 5 зразках-лопатках, при цьому із контрольного зразка (проби) виготовляють один зразок-лопатку.

Отже, при розрахунку межі плинності  $\sigma_{PT}$  при розтягуванні використовують площу поперечного перерізу зразка  $A_0$ ,  $мм^2$  [5,6] та навантаження  $F_{PT}$ ,  $H$ , при якому досягається межа плинності [121]:

$$\sigma_{PT} = \frac{F_{PT}}{A_0} . \quad (4.2)$$

При обчисленні відносного видовження  $\varepsilon_p$  при розриві використовують видовження зразка в момент розриву  $\Delta l_p$ ,  $мм$  та початкову довжину зразка  $L_0$ ,  $мм$  [121]:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta l_p}{L_0} \cdot 100\% . \quad (4.3)$$

Згідно з стандартів [5,6] за результат випробування приймають обчислене мінімальне значення межі плинності  $\sigma_{PT}$  при розтягу за формулою (4.2) та відносного видовження  $\varepsilon_p$  при розриві за формулою (4.3), що розраховують до другої значущої цифри.

## 4.2 Досліджувані зразки

Для екстремальних досліджень нами були підготовані зразки лопаток, які вирізувались з пластмасових труб відповідно до затверджених правил [5-8].

Відбір зразків (проб) від партії проводять рівномірно протягом всього процесу виробництва методом випадкової вибірки [5-8]. Перед випробуванням зразки кондиціонують згідно з [122], впродовж не менше 2 годин при температурі  $(23 \pm 2)^\circ C$  [5-8]. Зразки-лопаток виготовляють з відрізків труби механічною обробкою у відповідності з [123] та додатками з [5,6].



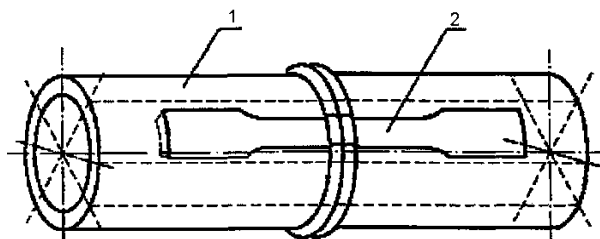


Рисунок 4.1 - Схема вирізування зразків зі зварного з'єднання для випробування на розтяг, де 1-патрубок зі зварним з'єднанням; 2-розташування зразків [124]

Тобто зразки-лопатки штампом-просічкою вирізають з відрізків труб довжиною  $l_1$  не менше 115 мм для лопаток типу 1 та не менше 150 мм для лопаток типу 2 [121], схему вирізання наведено на рисунку 4.1, а форма та розміри, яких зображено на рисунку 4.2, вигляд досліджуваних зразків-лопаток подано на рисунку 4.3 [25,26,30-32].

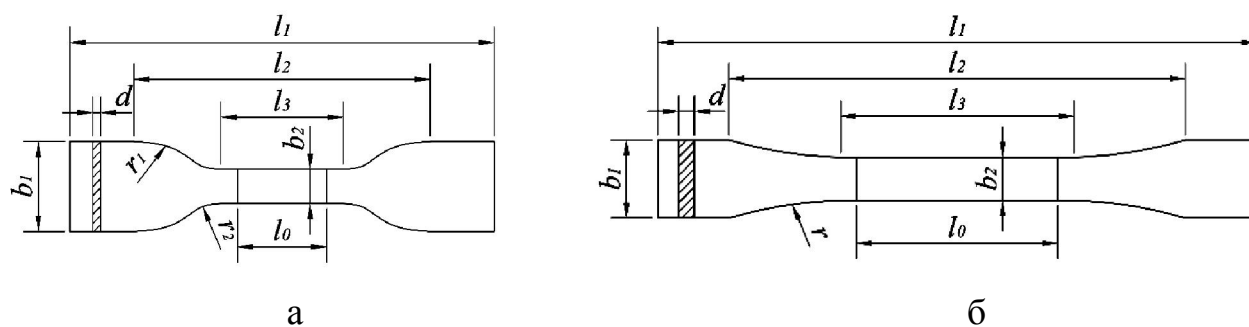


Рисунок 4.2 – Форма та геометричні розміри досліджуваних лопаток: а – лопатка типу 1; б - лопатка типу 2 [121]

На зображеному рисунку 4.2:  $d$  – товщина;  $b_1$  – ширина головки;  $b_2$  – ширина в робочій частині;  $l_1$  – загальна довжина;  $l_2$  – відстань між позначками, які визначають розміщення затискачів на зразку;  $l_3$  – ширина в робочій частині;  $l_0$  – розрахункова довжина;  $r_1$  – великий радіус заокруглення;  $r_2$  – малий радіус заокруглення;  $r$  – радіус заокруглення.

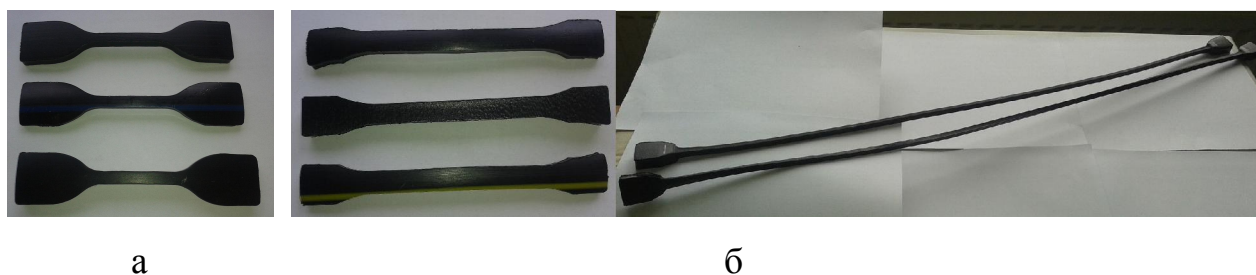


Рисунок 4.3 – Реальний вигляд досліджуваних лопаток:  
а – лопатки типу 1; б - лопатки тип 2

### 4.3 Вимірювальна апаратура та умови виконання дослідження

Всі підготовчі вимірювання виконуються згідно із затвердженими нормативно-технічними документами (НТД) [5-8].

При визначенні розмірів труб (діаметрів, товщини, довжини та ін.) використовують необхідні вимірювальні інструменти, згідно з [5,6]: штангенциркуль [125], мікрометр [126] та інше устаткування, характеристики якого подано у Додатку Д, таблиці Д.1. Для нового устаткування характеристики точності (Додаток Д, таблиця Д.1) задано у формі розширеної непевності  $U_p(x)$  його показів при рівні довіри  $p \approx 0,95$ , коефіцієнт розширення  $k = 2$ , а для старшого обладнання характеристики точності задані допустимими відхиленнями  $\pm \Delta_{zp}$ , тоді стандартну непевність показів, приймаючи рівномірний розподіл, обчислюють за відомим співвідношенням:  $u_B(x) = \Delta_{zp} / \sqrt{3}$ .

Вимірювання виконувались при умовах довкілля наведених в таблиці 4.1.

Таблиця 4.1

Умови довкілля [25]

Параметри	Нормальні	Робочі	Фактичні
Для вирізки зразків-лопаток			
Температура	(23±2)°C	(23±2)°C	23°C
Вологість	(50±5)%	(60±5)%	55%
Атм. тиск	(730±10) мм.рт.ст.	(730±10) мм.рт.ст.	735мм.рт.ст.

Для використання машини розривної			
Температура	$(23\pm 2)^{\circ}\text{C}$	$+15^{\circ}\text{C}$ до $+30^{\circ}\text{C}$	$23^{\circ}\text{C}$
Вологість	$(50\pm 5)\%$	$(20\pm 70)\%$	55%
Атм. тиск	$(730\pm 10)$ мм.рт.ст.	$(730\pm 10)$ мм.рт.ст.	735 мм.рт.ст.
Напруга живлення	$220\text{V}\pm 2\%$	$220\text{V}\pm 10\%$	223V
Частота струму	$50\text{Hz}\pm 1\%$	$50\text{Hz}\pm 2\%$	49,9Hz

Випробовування на розтяг проводили на розривній машині «Zwick/Roell»/Z010, Німеччина [121,127], характеристики якої подано у Додатку Д, таблиця Д.1 та яка зображена на рисунку 4.4.

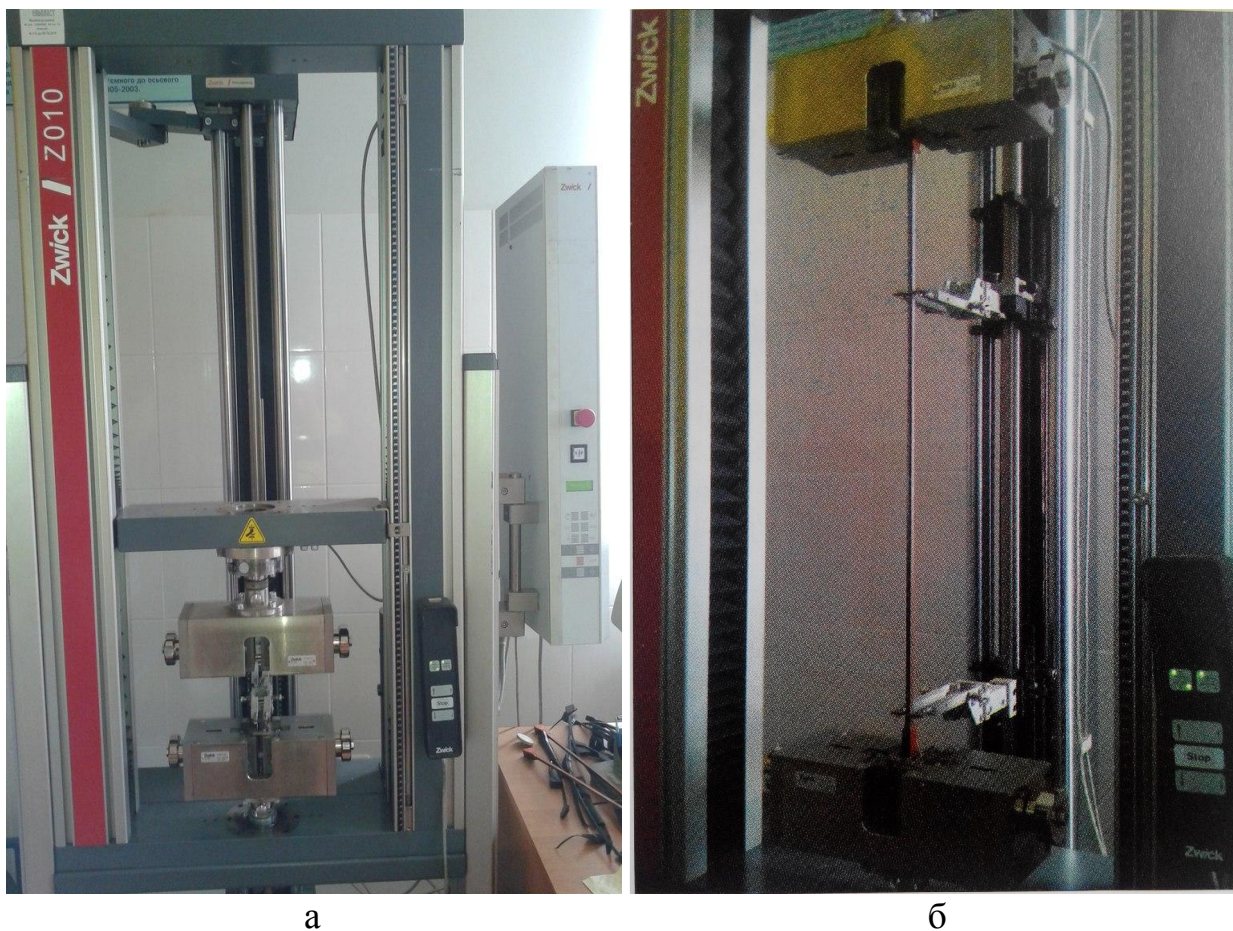


Рисунок 4.4 - Машина розривна «Zwick/Roell»/Z010: а - реальний вигляд, б – приклад випробування на відносне видовження при розриві труби [127]

Випробовування труб проводили при швидкості розсування тримачів випробувальної машини ( $100 \pm 10$ ) мм/хв у відповідності до номінальної товщини стінки, яка в даному випадку не перевищує 5 мм на зразках-лопатках типу 1 [6] та не перевищує 13 мм на зразках-лопатках типу 2 [5]. Машина розривна «Zwick/Roell» / Z010 забезпечує вимірювання навантаження з допустимим відхиленням не гіршим  $\pm 1\%$  від вимірювального значення, потужність якої дозволяє розірвати зразки (зусилля від 5000 Н до 10000 Н) і яка має регульовану швидкість розтягування [25,26,30-32].

#### 4.4 Результати лабораторних досліджень контролю параметрів пластмасових виробів

Досліджувалися лопатки, які зображені на рис.4.3 і які виготовлено згідно з вимогами [121,123]. Розміри лопаток виміряно за допомогою засобів лінійних вимірювань, вказаних у Додатку Д, таблиці Д.1, що мають свідоцтва про їх калібрування.

Розміри досліджуваних лопаток відповідно до [121] повинні відповідати значенням (із врахуванням розширеної непевності), які представлено в таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

#### Вимоги до розмірів лопаток [28,121]

Лопатка типу 1, Штамп-просічка типу 1 зав. № б/н				
Значення геометричного параметру отримане шляхом вимірювань	$l_0$ , мм	$L_0$ , мм	$d$ , мм	$D$ , мм
		$25 \pm 1$	24,85	$6 \pm 0,4$
Свідоцтво про державну повірку Калібрування	UA0204 23421 до 07.10.2014 р.			
Розширена непевність результатів вимірювань $U_p$ , мм ( $k=2$ , $p \approx 0.95$ )				0,01

Лопатка типу 2, Штамп-просічка типу 2 зав. № б/н				
Значення геометричного параметру отримане шляхом вимірювань	$l_0$ , мм	$L_0$ , мм	$d$ , мм	$D$ , мм
	50±0,5	49,70	10±0,5	10,60
Свідоцтво про державну повірку Калібрування	UA0204 23422 до 07.10.2014 р.			
Розширена непевність результатів вимірювань $U_p$ , мм ( $k=2$ , $p \approx 0.95$ )				0,01

Назви та позначення геометричних параметрів наведені у таблиці 4.2:  
 $l_0$  - розрахункова довжина;  $L_0$  - початкова довжина;  $d$  - розрахункова товщина  
робочої частини;  $D$  - товщина робочої частини.

Отримані шляхом вимірювань розміри досліджуваних лопаток подано у  
таблиці 4.3.

Таблиця 4.3

## Розміри досліджуваних лопаток

Лопатка типу 1					
Параметр	Зразок 1	Зразок 2	Зразок 3	Зразок 4	Зразок 5
$L_0$ , мм	24,85	24,85	24,85	24,85	24,85
$D$ , мм	6,24	6,18	6,13	6,17	6,14
$b_2$ , мм	3,21	3,14	3,09	3,12	3,10
Лопатка типу 2					
Параметр	Зразок 1	Зразок 2	Зразок 3	Зразок 4	Зразок 5
$L_0$ , мм	49,70	49,70	49,70	49,70	49,70
$D$ , мм	10,10	10,08	10,14	10,18	10,17
$b_2$ , мм	9,25	9,31	9,18	9,22	9,27

Порівнюючи результати у таблиці 4.3 з даними таблиці 4.2, бачимо, що значення відповідають встановленим вимогам до розмірів лопаток.

Згідно з формулою (4.1) обчислено початкову площу  $A_0$ ,  $\text{мм}^2$  поперечного перерізу зразка для лопаток типу 1 та типу 2:

Лопатка тип 1:

$$A_{0,1} = 6,24\text{мм} \cdot 3,21\text{мм} \approx 20,03\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,2} = 6,18\text{мм} \cdot 3,14\text{мм} \approx 19,41\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,3} = 6,13\text{мм} \cdot 3,09\text{мм} \approx 18,94\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,4} = 6,17\text{мм} \cdot 3,12\text{мм} \approx 19,25\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,5} = 6,14\text{мм} \cdot 3,10\text{мм} \approx 19,03\text{мм}^2 .$$

Лопатка тип 2:

$$A_{0,1} = 10,10\text{мм} \cdot 9,25\text{мм} \approx 93,43\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,2} = 10,08\text{мм} \cdot 9,31\text{мм} \approx 93,85\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,3} = 10,14\text{мм} \cdot 9,18\text{мм} \approx 93,09\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,4} = 10,18\text{мм} \cdot 9,22\text{мм} \approx 93,86\text{мм}^2 ;$$

$$A_{0,5} = 10,17\text{мм} \cdot 9,27\text{мм} \approx 94,28\text{мм}^2 .$$

Результати обчислень  $A_0$  занесені в таблицю 4.4.

Для кожного зразка на машині розривній «Zwick/Roell» / Z010 для лопаток типу 1 та типу 2, зареєстровано результати вимірювань: видовження  $\Delta l_p$ ,  $\text{мм}$  зразка в момент його розриву; навантаження  $F_{PT}$ ,  $\text{Н}$  при якому досягається межа плинності. Одержані виміряні значення поміщені у таблицю 4.4.

Згідно з формулою (4.2) обчислено межу плинності зразка  $\sigma_{PT}$  для лопаток типу 1 та типу 2 результати вимірювань  $\sigma_{PT}$ ,  $\text{Н}/\text{мм}^2$ , які поміщені в таблицю 4.4:

Лопатка тип 1:

$$\sigma_{PT,1} = \frac{453\text{Н}}{20,03\text{мм}^2} \approx 22,62 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,2} = \frac{440\text{Н}}{19,41\text{мм}^2} \approx 22,68 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,3} = \frac{426\text{Н}}{18,94\text{мм}^2} \approx 22,49 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,4} = \frac{433\text{Н}}{19,25\text{мм}^2} \approx 22,49 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,5} = \frac{430\text{Н}}{19,03\text{мм}^2} \approx 22,59 \text{ Н}/\text{мм}^2 .$$

Лопатка тип 2:

$$\sigma_{PT,1} = \frac{2090\text{Н}}{93,43\text{мм}^2} \approx 22,37 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,2} = \frac{2064\text{Н}}{93,85\text{мм}^2} \approx 21,99 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,3} = \frac{2060\text{Н}}{93,09\text{мм}^2} \approx 22,13 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,4} = \frac{2051\text{Н}}{93,86\text{мм}^2} \approx 21,85 \text{ Н}/\text{мм}^2 ;$$

$$\sigma_{PT,5} = \frac{2078\text{Н}}{94,28\text{мм}^2} \approx 22,04 \text{ Н}/\text{мм}^2 .$$

Результати вимірювань з машини розривної  
та розраховані показники лопаток типу 1 та типу 2 [28,32]

Лопатка типу 1					
№ зразка	$A_0, \text{мм}^2$	$\Delta l_p, \text{мм}$	$F_{PT}, \text{Н}$	$\varepsilon_p, \%$	$\sigma_{PT}, \text{Н/мм}^2$
1	20,03	145	453	583,50	22,62
2	19,41	140	440	<b>563,38</b>	22,68
3	18,94	147	426	591,55	<b>22,49</b>
4	19,25	146	433	587,53	22,49
5	19,03	145	430	583,50	22,59
Лопатка типу 2					
№ зразка	$A_0, \text{мм}^2$	$\Delta l_p, \text{мм}$	$F_{PT}, \text{Н}$	$\varepsilon_p, \%$	$\sigma_{PT}, \text{Н/мм}^2$
1	93,43	286	2090	575,45	22,37
2	93,85	287	2064	577,47	21,99
3	93,09	280	2060	<b>563,38</b>	22,13
4	93,86	285	2051	573,44	<b>21,85</b>
5	94,28	287	2078	577,47	22,04

Згідно з формулою (4.3) обчислено відносне видовження  $\varepsilon_p$  зразка в момент розриву для лопаток типу 1 та типу 2 (таблиця 4.4):

Лопатка тип 1:

$$\varepsilon_{P,1} = \frac{145 \text{мм}}{24,85 \text{мм}} \cdot 100\% \approx 583,50\%;$$

$$\varepsilon_{P,2} = \frac{140 \text{мм}}{24,85 \text{мм}} \cdot 100\% \approx 563,38\%;$$

Лопатка тип 2:

$$\varepsilon_{P,1} = \frac{286 \text{мм}}{49,70 \text{мм}} \cdot 100\% \approx 575,45\%;$$

$$\varepsilon_{P,2} = \frac{287 \text{мм}}{49,70 \text{мм}} \cdot 100\% \approx 577,47\%;$$

$$\varepsilon_{P,3} = \frac{147_{\text{мм}}}{24,85_{\text{мм}}} \cdot 100\% = 591,55\%;$$

$$\varepsilon_{P,3} = \frac{280_{\text{мм}}}{49,70_{\text{мм}}} \cdot 100\% \approx 563,38\%;$$

$$\varepsilon_{P,4} = \frac{146_{\text{мм}}}{24,85_{\text{мм}}} \cdot 100\% = 587,53\%;$$

$$\varepsilon_{P,4} = \frac{285_{\text{мм}}}{49,70_{\text{мм}}} \cdot 100\% \approx 573,44\%;$$

$$\varepsilon_{P,5} = \frac{145_{\text{мм}}}{24,85_{\text{мм}}} \cdot 100\% = 583,50\%.$$

$$\varepsilon_{P,5} = \frac{287_{\text{мм}}}{49,70_{\text{мм}}} \cdot 100\% \approx 577,47\%.$$

#### **4.5 Опрацювання результатів вимірювань контрольованих параметрів запропонованою методикою екстремальних значень**

Оскільки під час проведення вимірювань з контролю пластмасових труб зразка типу 1 та типу 2 за результат вимірювання межі плинності  $\sigma_{PT}$  та відносного видовження  $\varepsilon_P$  приймають найменше значення (у таблиці 4.4 погрублене), тоді стандартна методика згідно з GUM [1] до опрацювання таких результатів не може бути застосована. Тому до опрацювання результатів застосовується запропонована методика опрацювання та оцінювання непевності результатів спостережень для мінімального значення описана у розділі 2, п.2.3.

##### **4.5.1 Обчислення середніх значень та оцінок стандартних відхилень контрольованих параметрів згідно із запропонованою методикою екстремальних значень**

Відповідно до запропонованої методики за одержаними результатами вимірювання були розраховані середні значення та стандартні відхилення результатів спостережень відносного видовження та межі плинності для лопаток типу 1 та типу 2 при заданій кількості спостережень.

Середні значення  $\bar{\varepsilon}_P$  та  $\bar{\sigma}_{PT}$  для лопаток типу 1 та типу 2 при кількості спостережень  $n = 5$  обчислюємо за формулою (1.1):

Лопатка типу 1:

$$\bar{\varepsilon}_P = \frac{583,50\% + 563,38\% + 591,55\% + 587,53\% + 583,50\%}{5} \approx 581,89\%;$$



$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{PT} &= \frac{22,62 \text{ Н/мм}^2 + 22,68 \text{ Н/мм}^2 + 22,49 \text{ Н/мм}^2 + \dots}{5} = \\ &= \frac{\dots + 22,49 \text{ Н/мм}^2 + 22,59 \text{ Н/мм}^2}{5} \approx 22,57 \text{ Н/мм}^2.\end{aligned}$$

Лопатка типу 2:

$$\bar{\varepsilon}_P = \frac{575,45\% + 577,47\% + 563,38\% + 573,44\% + 577,47\%}{5} \approx 573,44\%;$$

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{PT} &= \frac{22,37 \text{ Н/мм}^2 + 21,99 \text{ Н/мм}^2 + 22,13 \text{ Н/мм}^2 + \dots}{5} = \\ &= \frac{\dots + 21,85 \text{ Н/мм}^2 + 22,04 \text{ Н/мм}^2}{5} \approx 22,08 \text{ Н/мм}^2.\end{aligned}$$

Стандартні відхилення  $s_{\varepsilon_p}$  та  $s_{\sigma_{PT}}$  результатів спостережень відносного видовження та межі плинності для лопаток типу 1 та типу 2 при кількості спостережень  $n = 5$  обчислюємо за виразом (1.2):

Лопатка типу 1:

$$s_{\varepsilon_p} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (2909,46\% - 581,89\%)^2} \approx 10,87\%;$$

$$s_{\sigma_{PT}} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (112,87 \text{ Н/мм}^2 - 22,57 \text{ Н/мм}^2)^2} \approx 0,081 \text{ Н/мм}^2.$$

Лопатка типу 2:

$$s_{\varepsilon_p} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (2867,21\% - 573,44\%)^2} \approx 5,87\%;$$

$$s_{\sigma_{PT}} = \sqrt{\frac{1}{5-1} \sum_{i=1}^5 (110,38 \text{ Н/мм}^2 - 22,08 \text{ Н/мм}^2)^2} \approx 0,192 \text{ Н/мм}^2.$$

#### 4.5.2 Оцінювання за методом типу В стандартної непевності контрольованих параметрів

Враховуючи умови проведення вимірювань та метрологічні характеристики ЗВТ, інструментальну складову зумовлену непевністю показів

вимірювальної машини та додаткового устаткування (штангерцилькуль та мікрометр) обчислено відносні стандартні непевності за методом типу В.

Відносну стандартну непевність  $u_{B,rel}(\Delta l_p)$  видовження зразка в момент розриву (за показом машини розривної) обчислюємо за виразом:

$$u_{B,rel}(\Delta l_p) = \frac{u_B(\Delta l_p)}{\Delta l_p} \cdot 100\%, \quad (4.4)$$

Для допустимого відхилення  $\Delta l_{z.p.} = \pm 1$  мм результату вимірювання за показом розривної машини з Додатку Д, таблиці Д.1 (приймаючи рівномірний в межах допустимих відхилень розподіл) відносна стандартна непевність видовження зразка у момент розриву становить:

$$u_{B,rel}(\Delta l_p) = \frac{\Delta l_{z.p.}}{\Delta l_p \sqrt{3}} 100\%. \quad (4.5)$$

Лопатка типу 1:

$$u_{B,rel}(\Delta l_p) = \frac{1_{мм}}{140_{мм} \cdot \sqrt{3}} 100\% \approx 0,412\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{B,rel}(\Delta l_p) = \frac{1_{мм}}{280_{мм} \cdot \sqrt{3}} 100\% \approx 0,206\%.$$

Відносну стандартну непевність  $u_{B,rel}(\Delta L_0)$  початкової довжини зразка (за результатом калібрування) обчислюємо за виразом:

$$u_{B,rel}(\Delta L_0) = \frac{u_B(\Delta L_0)}{L_0} \cdot 100\%. \quad (4.6)$$

Оскільки за результатом калібрування розширена непевність початкової довжини зразка становить  $u_B(\Delta L_0) = 0,01$  мм ( $k = 2$ ,  $p \approx 0,95$ ) з таблиці 4.2, то відносна стандартна непевність початкової довжини зразка за формулою (4.6) становить:

Лопатка типу 1:

$$u_{B,rel}(\Delta L_0) = \frac{0,01_{мм}}{2 \cdot 24,85_{мм}} 100\% \approx 0,020\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{B,rel}(\Delta L_0) = \frac{0,01\text{мм}}{2 \cdot 49,70\text{мм}} \cdot 100\% \approx 0,010\%.$$

Відносна стандартна непевність  $u_{B,rel}(F_{PT})$  навантаження, при якому досягається межа плинності (за показом машини розривної), обчислюється за формулою:

$$u_{B,rel}(F_{PT}) = \frac{u_B(F_{PT})}{F_{PT}} \cdot 100\%. \quad (4.7)$$

Для допустимого відхилення результату вимірювання за показом машини розривної  $\delta_{F,zp} = \pm 1\%$  з Додатку Д, таблиці Д.1 (приймаючи рівномірний в межах допустимих відхилень розподіл) відносна стандартна непевність навантаження при якому досягається межа плинності становить:

$$u_{B,rel}(F_{PT}) = \frac{\delta_{F,zp}}{\sqrt{3}}. \quad (4.8)$$

Лопатка типу 1 та лопатка типу 2:

$$u_{B,rel}(F_{PT}) = \frac{1\%}{\sqrt{3}} \approx 0,577\%.$$

Відносна стандартна непевність  $u_{B,rel}(D)$  товщини робочої частини зразка (за результатом калібрування), обчислюється за виразом:

$$u_{B,rel}(D) = \frac{U_p}{D_1 \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\%, \quad (4.9)$$

Лопатка типу 1:

$$u_{B,rel}(D) = \frac{0,01\text{мм}}{6,13\text{мм} \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\% \approx 0,094\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{B,rel}(D) = \frac{0,01\text{мм}}{10,08\text{мм} \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\% \approx 0,057\%$$

Відносна стандартна непевність  $u_{B,rel}(b_2)$  ширини робочої частини зразка (за результатом калібрування), обчислюється за формулою:

$$u_{B,rel}(b_2) = \frac{U_p}{b_{2,1} \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\%. \quad (4.10)$$

Оскільки за результатом калібрування розширена непевність результатів вимірювань становить  $U_p = 0,01 \text{ мм}$  ( $k = 2$ ,  $p \approx 0,95$ ) з таблиці 4.2, то відносна стандартна непевність товщини робочої частини зразка за формулою (4.9) та відносна стандартна непевність ширини робочої частини зразка за формулою (4.10) становить:

Лопатка типу 1:

$$u_{B,rel}(b_2) = \frac{0,01 \text{ мм}}{3,09 \text{ мм} \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\% \approx 0,187\%;$$

Лопатка тип 2:

$$u_{B,rel}(b_2) = \frac{0,01 \text{ мм}}{9,18 \text{ мм} \cdot \sqrt{3}} \cdot 100\% \approx 0,063\%.$$

#### 4.5.3 Оцінювання за методом типу В сумарної стандартної непевності контрольованих параметрів

Отже, відносну сумарну стандартну непевність за методом типу В відносного видовження  $u_{cB,rel}(\varepsilon_{P,1})$  обчислюємо за виразом:

$$u_{cB,rel}(\varepsilon_{P,1}) = \sqrt{u_{B,rel}^2(\Delta l_p) + u_{B,rel}^2(\Delta L_0)}, \quad (4.11)$$

Лопатка типу 1:

$$u_{cB,rel}(\varepsilon_{P,1}) = \sqrt{(0,412\%)^2 + (0,020\%)^2} \approx 0,413\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{cB,rel}(\varepsilon_{P,1}) = \sqrt{(0,206\%)^2 + (0,010\%)^2} \approx 0,206\%.$$

Відносну сумарну стандартну непевність межі плинності  $u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1})$  обчислюємо за виразом:

$$u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1}) = \sqrt{u_{c,rel}^2(A_0) + u_{B,rel}^2(F_{PT})}, \quad (4.12)$$

де  $u_{c,rel}(A_0)$  – відносна сумарна стандартна непевність початкової площі поперечного перерізу, обчислюється за виразом:

$$u_{c,rel}(A_0) = \sqrt{u_{B,rel}^2(D) + u_{B,rel}^2(b_2)}, \quad (4.13)$$

Сумарна стандартна непевність початкової площі поперечного перерізу за формулою (4.13) становить:

Лопатка типу 1:

$$u_{c,rel}(A_0) = \sqrt{(0,094\%)^2 + (0,187\%)^2} \approx 0,209\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{c,rel}(A_0) = \sqrt{(0,057\%)^2 + (0,063\%)^2} \approx 0,085\%.$$

Отже, відносна сумарна стандартна непевність межі плинності  $u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1})$  за методом типу В, згідно з формулою (4.12) становить:

Лопатка типу 1:

$$u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1}) = \sqrt{(0,209\%)^2 + (0,577\%)^2} \approx 0,614\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1}) = \sqrt{(0,085\%)^2 + (0,577\%)^2} \approx 0,584\%.$$

#### **4.5.4 Оцінювання за методом типу А стандартної непевності контрольованих параметрів відповідно до запропонованої методики для мінімального значення**

Експериментальні стандартні непевності за методом типу А мінімального значення відносного видовження  $u_A(\varepsilon_{P,1})$  та межі плинності  $u_A(\sigma_{PT,1})$  визначали приймаючи модель нормального розподілу розсіювання контрольованих параметрів відносного видовження і межі плинності досліджуваних зразків лопаток типу 1 та типу 2. Вибір такої моделі ґрунтується на результатах тривалих контрольних досліджень параметрів зразків лопаток у лабораторії ТзОВ «Ельпласт-Львів».

Стандартні непевності  $u_A(\varepsilon_{P,1})$  та  $u_A(\sigma_{PT,1})$  визначають за формулою (2.24), як добуток стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  мінімального спостереження (у даному випадку  $\sigma_{0,1} = 0,66898$  згідно з таблиці 2.1) на відносне значення стандартного відхилення всіх результатів спостережень ( $\delta s_x = s_x \cdot 100\%/\bar{x}$ ):

Лопатка типу 1:

$$u_A(\varepsilon_{P,1}) = 0,66898 \cdot 1,869\% \approx 1,250\%;$$

$$u_A(\sigma_{PT,1}) = 0,66898 \cdot 0,355 \text{ Н/мм}^2 \approx 0,237\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_A(\varepsilon_{P,1}) = 0,66898 \cdot 1,023\% \approx 0,684\%;$$

$$u_A(\sigma_{PT,1}) = 0,66898 \cdot 0,872 \text{ Н/мм}^2 \approx 0,583\%;$$

#### 4.5.5 Обчислення сумарної та розширеної непевності контрольованих параметрів

Оскільки інструментальні складові непевності порівняно із розкидом самих спостережень є невеликі, тоді відносні сумарні стандартні непевності мінімального значення відносного видовження  $u_{c,rel}(\varepsilon_{P,1})$  та межі плинності  $u_{c,rel}(\sigma_{PT,1})$  можна обчислити за наближеною залежністю (2.73) тобто, як:

$$u_{c,rel}(x_1) = \sqrt{u_{cB,rel}^2(x_1) + u_A^2(x_1)}, \quad (4.14)$$

Лопатка типу 1:

$$u_{c,rel}(\varepsilon_{P,1}) = \sqrt{(0,413\%)^2 + (1,250\%)^2} \approx 1,316\%;$$

$$u_{c,rel}(\sigma_{PT,1}) = \sqrt{(0,614\%)^2 + (0,237\%)^2} \approx 0,658\%;$$

Лопатка типу 2:

$$u_{c,rel}(\varepsilon_{P,1}) = \sqrt{(0,206\%)^2 + (0,684\%)^2} \approx 0,715\%;$$

$$u_{c,rel}(\sigma_{PT,1}) = \sqrt{(0,584\%)^2 + (0,583\%)^2} \approx 0,825\%;$$

Сумарні стандартні непевності мінімального значення відносного видовження  $u_c(\varepsilon_{P,1})$  та межі плинності  $u_c(\sigma_{PT,1})$ , обчислюємо відповідно до формули:

$$u_c(x_1) = \frac{u_{c,rel}(x_1) \cdot x_1}{100\%}, \quad (4.15)$$

Лопатка типу 1:

$$u_c(\varepsilon_{P,1}) = \frac{1,316\% \cdot 563,38\%}{100\%} \approx 7,416\%;$$

$$u_c(\sigma_{PT,1}) = \frac{0,658\% \cdot 22,49 \text{ Н/мм}^2}{100\%} \approx 0,148 \text{ Н/мм}^2;$$

Лопатка типу 2:

$$u_c(\varepsilon_{P,1}) = \frac{0,715\% \cdot 563,38\%}{100\%} \approx 4,027\%;$$

$$u_c(\sigma_{PT,1}) = \frac{0,825\% \cdot 21,85 \text{ Н/мм}^2}{100\%} \approx 0,180 \text{ Н/мм}^2.$$

Розширені непевності мінімального значення відносного видовження  $U_{p,low}(\varepsilon_{P,1})$  та межі плинності  $U_{p,low}(\sigma_{PT,1})$  обчислюють за формулою (2.1) (де  $k_{low}(5, 0,95) = -1,6714$  згідно з таблиці 2.2):

Лопатка типу 1:

$$U_{p;low}(\varepsilon_{P,1}) = (-1,6714) \cdot 10,87\% = -18,17\% \approx -18\%;$$

$$U_{p;low}(\sigma_{PT,1}) = (-1,6714) \cdot 0,08 \text{ Н/мм}^2 \approx -0,13 \text{ Н/мм}^2;$$

Лопатка типу 2:

$$U_{p;low}(\varepsilon_{P,1}) = (-1,6714) \cdot 5,87\% = -9,81\% \approx -9,8\%;$$

$$U_{p;low}(\sigma_{PT,1}) = (-1,6714) \cdot 0,19 \text{ Н/мм}^2 \approx -0,32 \text{ Н/мм}^2.$$

#### 4.6 Результати контролю з якості пластмасових труб згідно із запропонованою методикою екстремальних значень

Результати вимірювань та оцінювання непевності межі плинності  $\sigma_{PT}$  та відносного видовження  $\varepsilon_p$ , а також обчислені середні значення та оцінки стандартних відхилень і прийнятий результат вимірювання згідно з [5,6] (найменше значення) та інші обчислені попередньо показники подані у таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

Підсумкова таблиця результатів вимірювань та оцінювання їх непевності

Параметри	Відносне видовження		Межа плинності	
	Лопатка:		Лопатка:	
	типу 1	типу 2	типу 1	типу 2
$\varepsilon_{P,1}, \sigma_{PT,1}$	563,38 %	563,38 %	22,49 Н/мм <sup>2</sup>	21,85 Н/мм <sup>2</sup>
$\bar{\varepsilon}_P, \bar{\sigma}_{PT}$	581,89 %	573,44 %	22,57 Н/мм <sup>2</sup>	22,08 Н/мм <sup>2</sup>
$s_{\varepsilon_p}, s_{\sigma_{PT}}$	10,87 %	5,87 %	0,08 Н/мм <sup>2</sup>	0,19 Н/мм <sup>2</sup>
$u_{cB,rel}(\varepsilon_{P,1}), u_{cB,rel}(\sigma_{PT,1})$	0,41%	0,21%	0,61%	0,58%
$u_A(\varepsilon_{P,1}), u_A(\sigma_{PT,1})$	1,25 %	0,68 %	0,24 %	0,58 %
$u_{c,rel}(\varepsilon_{P,1}), u_{c,rel}(\sigma_{PT,1})$	1,32 %	0,72 %	0,66 %	0,83 %
$u_c(\varepsilon_{P,1}), u_c(\sigma_{PT,1}),$	7,42 %	4,03 %	0,15 Н/мм <sup>2</sup>	0,18 Н/мм <sup>2</sup>
$\varepsilon_{P,1;0,95}, \sigma_{PT,1;0,95}$	545,21 %	553,57 %	22,36 Н/мм <sup>2</sup>	20,37 Н/мм <sup>2</sup>

У таблиці 4.5 граничні значення  $\varepsilon_{P,1;0,95}$  та  $\sigma_{PT,1;0,95}$  (з урахуванням розширеної непевності) мінімального значення відносного видовження та межі плинності обчислюються за формулою (2.53) (де  $k_{low}(5,0,95) = -1,6714$  згідно з таблиці 2.2):



Лопатка типу 1:

$$\varepsilon_{P,1;0,95} = 563,38\% + (-1,6714) \cdot 10,87\% \approx 545,21\%;$$

$$\sigma_{PT,1;0,95} = 22,49 \text{ Н/мм}^2 + (-1,6714) \cdot 0,08 \text{ Н/мм}^2 \approx 22,36 \text{ Н/мм}^2 ;$$

Лопатка типу 2:

$$\varepsilon_{P,1;0,95} = 563,38\% + (-1,6714) \cdot 5,87\% \approx 553,57\%;$$

$$\sigma_{PT,1;0,95} = 21,85 \text{ Н/мм}^2 + (-1,6714) \cdot 0,19 \text{ Н/мм}^2 \approx 20,37 \text{ Н/мм}^2 .$$

#### 4.7 Інтерпретація результатів контролю з якості пластмасових труб

Труби повинні відповідати характеристикам з нормативно-технічної документації (НТД) [5,6]. Порівняльна характеристика одержаних експериментально розрахованих параметрів межі плинності  $\sigma_{PT}$  при розтягуванні та відносного видовження  $\varepsilon_P$  при розриві із допустимими значеннями встановленими згідно з НТД [5,6], подана у таблиці 4.6.

Таблиця 4.6

Порівняння розрахованих параметрів із допустимими значеннями

Параметри	Відносне видовження		Межа плинності	
	Лопатка тип 1	Лопатка тип 2	Лопатка тип 1	Лопатка тип 2
$\varepsilon_{P,1}, \sigma_{PT,1}$	563 %	563 %	22,5 Н/мм <sup>2</sup>	21,9 Н/мм <sup>2</sup>
$\varepsilon_{P,ДОП.}, \sigma_{PT,ДОП.}$	350%	500%	21,0 Н /мм <sup>2</sup>	20,0 Н /мм <sup>2</sup>
$\varepsilon_{P,1;0,95}, \sigma_{PT,1;0,95}$	545 %	553 %	22,4 Н/мм <sup>2</sup>	20,4 Н/мм <sup>2</sup>

Порівнюючи одержані під час випробувань з урахуванням розширеної непевності мінімальні значення параметрів відносного видовження  $\varepsilon_{P,1}$  та межі плинності  $\sigma_{PT,1}$  досліджуваних лопаток типу 1 та типу 2 згідно з таблиці 4.5 із їх допустимими значеннями з таблиці 4.6 можемо стверджувати, що вони є не

менші ніж допустимі, а отже пластмасові труби відповідають вимогам чинних в Україні НТД, які на практиці дуже близькі до стандартів ЄС і ASTM [7,8].

Отже, при контролі якості параметрів виробів чи продукції запропонована методика може бути застосована до опрацювання спостережень де результатом приймається мінімальне (чи максимальне) значення і відповідно до якої здійснювати порівняння експериментально отриманих результатів враховуючи їх непевність з допустимими значеннями.

#### **4.8 Перевірка ефективності запропонованого методу оцінювання непевності вимірювання екстремального значення спостережень методом Монте-Карло**

Статистичну складову непевності найменшого значення відносного видовження та межі плинності, зумовлену статистичним розкидом результатів спостережень, оцінюють за методом типу А:  $u_{cA}(\varepsilon_{P,1})$ ,  $u_{cA}(\sigma_{PT,1})$  [25,26].

Аналітичне оцінювання стандартної непевності найменшого результату за методом типу А є дуже складною задачею, оскільки розподіл найменшого результату за невідомих математичного сподівання та стандартного відхилення залежить від кількості спостережень і не має простого аналітичного опису [5,6]. Асимптотичні залежності справедливі лише для великої кількості спостережень [5,6]. Натомість при 5 спостереженнях ці залежності є дуже наближеними [5,6].

У таких ситуаціях для оцінювання стандартної непевності результату рекомендовано застосувати метод Монте-Карло [98] (розділ 1 п. 1.6).

Дослідження виконано при генеруванні  $M = 10^5$  варіантів по  $n = 5$  випадкових спостережень. Знайдено відносні видовження, мінімальне значення, та виконано статистичне опрацювання результатів (обчислено середні значення, оцінки стандартних відхилень та ін.).

За методом Монте-Карло отримано статистичні параметри мінімального значення відносного видовження  $\varepsilon_{P,1}$  та межі плинності  $\sigma_{PT,1}$  досліджуваних зразків (лопаток типу 1 та 2), параметри яких з нормальним розподілом, такі як:

- теоретичне очікуване мінімальне значення, яке обчислено за формулою (2.47) для відносного видовження: лопатка типу 1  $m = \bar{\varepsilon}_P = 581,89\%$  і стандартне відхилення  $\sigma = s_{\varepsilon_P} = 10,87\%$ , лопатка типу 2  $m = \bar{\varepsilon}_P = 573,44\%$  і  $\sigma = s_{\varepsilon_P} = 5,87\%$ , а також для межі плинності: лопатка типу 1  $m = \bar{\sigma}_{PT} = 22,57 \text{ Н/мм}^2$  і стандартне відхилення  $\sigma = s_{\sigma_{PT}} = 0,08 \text{ Н/мм}^2$ , лопатка типу 2  $m = \bar{\sigma}_{PT} = 22,08 \text{ Н/мм}^2$  і  $\sigma = s_{\sigma_{PT}} = 0,19 \text{ Н/мм}^2$ , згідно з даних з таблиці 4.5 та при  $m_{0,1} = -1,16296$  згідно з таблиці 2.1:

Лопатка типу 1:

$$\varepsilon_{1P,1} = 581,89\% + (-1,16296) \cdot 10,87\% \approx 569,25\%;$$

$$\sigma_{1PT,1} = 22,57 \text{ Н/мм}^2 + (-1,16296) \cdot 0,08 \text{ Н/мм}^2 \approx 22,48 \text{ Н/мм}^2;$$

Лопатка типу 2:

$$\varepsilon_{1P,1} = 573,44\% + (-1,16296) \cdot 5,87\% \approx 566,61\%;$$

$$\sigma_{1PT,1} = 22,08 \text{ Н/мм}^2 + (-1,16296) \cdot 0,19 \text{ Н/мм}^2 \approx 21,86 \text{ Н/мм}^2;$$

- сумарні стандартні непевності мінімального значення відносного видовження  $u_c(\varepsilon_{P,1})$  та межі плинності  $u_c(\sigma_{PT,1})$  обчислюються згідно з формулою (4.15);

- нижні (ліві) межі розширеної непевності мінімального значення відносного видовження  $\varepsilon_{1P,1;0,05}$  та межі плинності  $\sigma_{1PT,1;0,05}$  обчислюються за формулою (2.53).

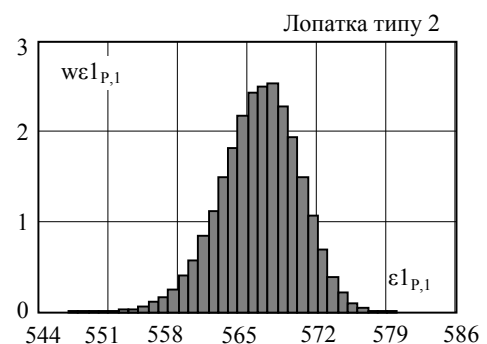
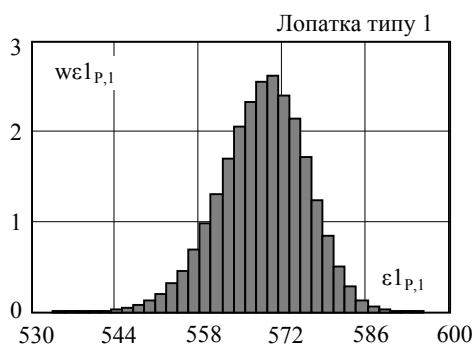
Відповідні експериментальні значення згідно таблиці 4.5 та отримані дані за методом Монте-Карло для мінімального значення відносного видовження  $\varepsilon_{1P,1}$  та межі плинності  $\sigma_{1PT,1}$  представлені в таблиці 4.7.

Таблиця 4.7

Експериментальні результати мінімального значення відносного видовження  $\varepsilon_{I_{P,1}}$  та межі плинності  $\sigma_{I_{PT,1}}$ , обчислені ММК для лопаток типу 1 та 2

Параметри	Експери- ментально	ММК	Експери- ментально	ММК
	Лопатка тип 1		Лопатка тип 2	
Значення відносного видовження				
$\varepsilon_{I_{P,1}}$	569,25 %	569,26 %	566,61 %	566,63 %
$u_{1c}(\varepsilon_{P,1})$	7,42 %	7,28 %	4,03 %	3,92 %
$\varepsilon_{I_{P,1;0,95}}$	545,21 %	542,98 %	553,57 %	551,96 %
Значення межі плинності				
$\sigma_{I_{PT,1}}$	22,48 Н/мм <sup>2</sup>	21,81 Н/мм <sup>2</sup>	21,86 Н/мм <sup>2</sup>	21,82 Н/мм <sup>2</sup>
$u_{1c}(\sigma_{PT,1})$	0,15 Н/мм <sup>2</sup>	0,44 Н/мм <sup>2</sup>	0,18 Н/мм <sup>2</sup>	0,15 Н/мм <sup>2</sup>
$\sigma_{I_{PT,1;0,95}}$	22,44 Н/мм <sup>2</sup>	22,44 Н/мм <sup>2</sup>	21,76 Н/мм <sup>2</sup>	21,75 Н/мм <sup>2</sup>

Гістограми ( $w\varepsilon_{I_{P,1}}$ ) мінімального значення відносного видовження  $\varepsilon_{I_{P,1}}$  для лопатки типу 1 та типу 2 подано на рисунку 4.5 а, а також на рисунку 4.5 б представлено гістограми ( $wz_{I_{P,1}}$ ) стандартизованого відхилення мінімального значення від середнього  $z_I$ , обчисленого згідно формули (2.25) для відносного видовження лопатки типу 1, лопатки типу 2.



а

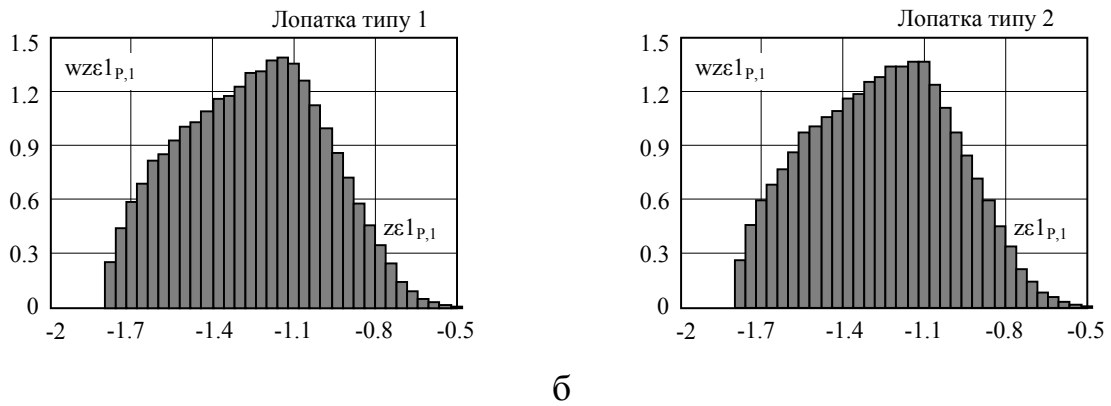


Рисунок 4.5 - Гістограми відносного видовження для лопатки типу 1 та типу 2: а -  $wεl_{P,1}$  мінімального значення  $εl_{P,1}$ , б -  $wzεl_{P,1}$  нормованого відхилення  $zεl_{P,1}$

Гістограми ( $wσl_{PT,1}$ ) мінімального значення межі плинності  $σl_{PT,1}$  для лопатки типу 1 та лопатки типу 2 подано на рисунку 4.6 а. Гістограми ( $wzσl_{PT,1}$ ) стандартизованого відхилення мінімального значення від середнього  $z_1$ , для межі плинності відповідних лопаток типу 1 і типу 2 представлено на рисунку 4.6 б.

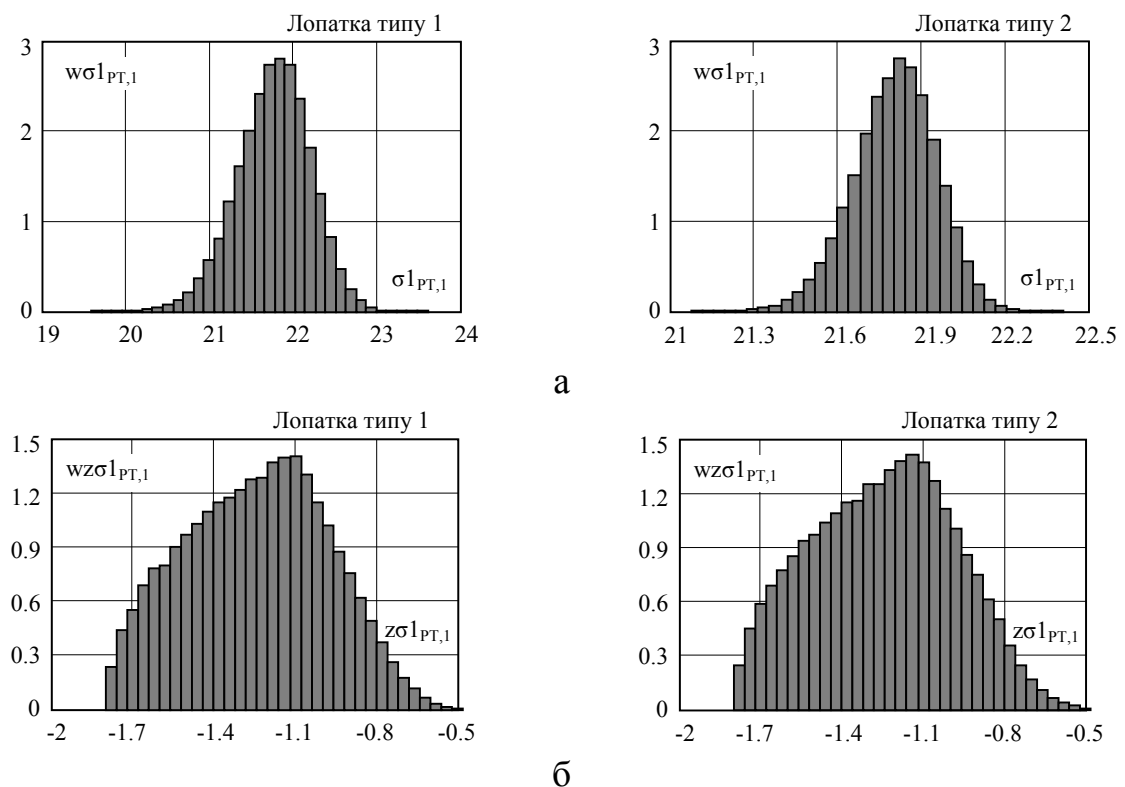


Рисунок 4.6 - Гістограми межі плинності для лопатки типу 1 та типу 2:

а -  $wσl_{PT,1}$  мінімального значення  $σl_{PT,1}$ ,  
б -  $wzσl_{PT,1}$  нормованого відхилення  $zσl_{PT,1}$

При порівнянні теоретичного розподілу показаного на рисунку 2.9 із гістограми зображених на рисунку 4.5 б для відносного видовження та на рисунку 4.6 б для межі плинності, а також із порівняння експериментальних результатів з результатами отриманих за симуляційним ММК представлених в таблиці 4.7 виявлено дуже добру (за критерієм  $\chi^2$ ) збіжність експериментальних результатів з результатами отриманих симуляційно за ММК [30-32].

### **Висновки до 4 розділу**

1. Розроблену методику оцінювання непевності екстремальних спостережень апробовано до оцінювання стандартної та розширеної непевності мінімального спостереження під час контролю відносного видовження та межі плинності пластмасових труб.

2. Виконано всі необхідні (згідно з нормативних документів) підготовчі операції до виконання досліджень. На підставі метрологічних властивостей використовуваних ЗВТ та результатів вимірювань параметрів досліджуваних лопаток за методом типу В обчислено інструментальну складову непевності контрольованих параметрів лопаток.

3. На основі статистичного опрацювання згідно з запропонованою методики експериментальних даних обчислено стандартну та розширену непевності відносного видовження і межі плинності труб, а також їх значення з урахуванням інструментальної складової непевності.

4. Методом Монте-Карло перевірено ефективність запропонованого методу та встановлено, що стандартна непевність відносного видовження та межі плинності при розриві пластмасових труб, які розраховані за експериментальними даними, є дуже близькі до результатів за симуляційним ММК.

5. На основі порівняння мінімальних значень відносного видовження та межі плинності з урахуванням їх лівосторонньої непевності з допустимими значеннями встановлено, що пластмасові труби (від ТЗОВ «Ельпласт-Львів») у день контролю відповідають нормам і можуть бути використані споживачами.

## ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано важливе науково-прикладне завдання у галузі стандартизації, сертифікації та метрологічного забезпечення — створення й дослідження нової методики визначення непевності результатів вимірювань, якими є екстремальні (найбільші чи найменші) спостереження, а також створення методики опрацювання результатів спостережень з метою визначення найкращих (з мінімальною стандартною непевністю) оцінок шуканих параметрів розташування і ширини розкиду, що забезпечить покращення якості виробництва продукції відповідно до передбачуваних потреб споживачів. Отримано такі основні результати роботи:

1. Охарактеризовано специфіку статистичного та нестатистичного оцінювання непевності результатів вимірювань, проаналізовано особливості і переваги відомих методів опрацювання результатів вимірювання та оцінювання їх непевності. На основі огляду методів опрацювання випадкових результатів спостережень та оцінювання їх непевності встановлено, що при відмінності статистичних параметрів спостережень від теоретичних моделей непевність екстремальних спостережень не можна обчислити за існуючими методиками, а якщо розподіл спостережень істотно відрізняється від нормального, тоді стандартна методика, рекомендована у GUM, взагалі не забезпечує отримання найкращих оцінок непевності результату.

2. Вперше розроблено методику, яку можна використати для оцінювання стандартної та розширеної непевності екстремального результату за невеликої кількості спостережень. Оскільки функція густини розподілу максимального значення є симетричною до функції густини розподілу мінімального, то параметри непевності максимального значення можна обчислити так само, як і для мінімального.

3. Отримано залежності для обчислення стандартної та розширеної непевності екстремального спостереження, які дозволяють обґрунтовано

здійснити порівняння з допустимим значенням із врахуванням розширеної непевності.

4. За невеликої кількості спостережень  $n \leq 6, 7$  коефіцієнт розширення відхиляється від нормального не більше 3 %, а для  $n = 10$  близько 14%. Тому за відсутності даних про розподіл спостережень (та  $n \leq 6, 7$ ) розширену непевність можна обчислити, використовуючи коефіцієнт розширення для нормального розподілу.

5. Встановлено, що випадкові впливи на результати спостережень безпосередньо змінюють їх стандартне відхилення. Вплив систематичних зміщень можна врахувати обчисленням згортки розподілу систематичного впливу з розподілом нормованого відхилення екстремального спостереження. Встановлено, що якщо стандартне відхилення систематичного впливу не перевищує  $\approx 1/3$  від стандартного відхилення самих спостережень, то розширену непевність можна обчислити за спрощеним виразом на основі модифікації коефіцієнта розширення для нормального розподілу. Для цього слід обчислити сумарну стандартну непевність з урахуванням обчисленої за методом типу В непевності показів ЗВТ.

6. Розроблена методика опрацювання спостережень з апіорі невідомим розподілом за методом порядкових статистик доведена до рівня практичного застосування у формі структурної схеми алгоритму. Обчислені за цією методикою параметри розташування і ширини характеризуються стандартними непевностями, які є мінімальними для прийнятого набору можливих розподілів, зокрема, для плоско-нормального.

7. Запропонований метод обчислення коваріаційної матриці (яка є необхідною для застосування методу порядкових статистик) є простим (виконуються прості арифметичні операції), точним і швидким. Проведені дослідження методом Монте-Карло підтвердили ефективність цього методу.

8. Запропоновану методику опрацювання результатів вимірювань, якими є мінімальні спостереження, адаптовано для контролю параметрів



відносного видовження та межі плинності виробів із пластмаси згідно з договором про науково-технічну співпрацю між ТЗОВ «Ельпласт-Львів» і Національним університетом «Львівська політехніка».

9. Запропоновану методику оцінювання непевності екстремального спостереження, яка полягає у порівнянні критичного спостереження з допустимим значенням з урахуванням розширеної непевності цього спостереження, доцільно, а також рекомендовано застосовувати при опрацюванні результатів контролю концентрації шкідливих домішок у продуктах харчування та медичних препаратах тощо.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM): First edition. — ISO. - 1993. - 101 p.
2. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники / П. Орнатский // Киев: Вища школа, 1983. - 455 с.
3. Дорожовець М.М. Опрацювання результатів вимірювань / М. Дорожовець // Навч. посібник. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2007. –624 с.
4. Метрологія. Застосування «Руководства по выражению неопределенности измерений»: ДСТУ-Н РМГ 43-2006. - [Чинний від 2007-01-07]. - К.: Держстандарт України, 2006. - 34 с. - (Національний стандарт України).
5. Труби поліетиленові для подачі горючих газів. Технічні умови. ДСТУ Б В.2.7-73-98. - [Чинний від 1998-10-28]. - К.: Держбуд України, 1998.- 42 с. - (Державний стандарт України). [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://www.ukrgazkom.com.ua/assets/files/normative/dstu\\_b\\_v\\_2\\_7\\_73\\_98.pdf](http://www.ukrgazkom.com.ua/assets/files/normative/dstu_b_v_2_7_73_98.pdf).
6. Труби поліетиленові для подачі холодної води. Технічні умови. ДСТУ Б В.2.7-151:2008. - [Чинний від 2009-06-01]. - К.: Міністерство регіонального розвитку та будівництва України, 2009. - 33 с. - (Національний стандарт України). [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://poliservice.com.ua/files/dstu\\_b\\_v\\_2\\_7\\_151\\_2008.pdf](http://poliservice.com.ua/files/dstu_b_v_2_7_151_2008.pdf).
7. Davis J. ASM International. Tensile Testing, Second Edition / Edited by J.R. Davis // Materials Park, Ohio, USA, 2004. - 279 p.
8. D 638 Test Method for Tensile Properties of Plastics. Annual Book of ASTM Standards, 2004. - Vol 08.01. [Електронний ресурс] - Режим доступу: <http://classes.engr.oregonstate.edu/mime/winter2012/me453-001/Lab1%20-%20Shear%20Strain%20on%20Polymer%20Beam/ASTM%20D638-02a.pdf>.
9. Будівельні матеріали. Цегла та камені керамічні рядові та лицьові. Технічні умови. ДСТУ Б В.2.7-61:2008. - [Чинний від 2009-08-14]. - К.: Мінрегіонбуд України, 2009. - 45 с. - (Національний стандарт України).
10. Омметри цифрові. Методи і засоби перевірки. ДСТУ ГОСТ 8.366:2009. - [Чинний від 2009-02-01]. - К.: Держспоживстандарт України, 2009. – 9 с. (Державний стандарт України).

11. Gumbel E. *Statistics of Extremes* / E. J. Gumbel // New York: Columbia University Press, 1958. –375 p.
12. Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф // Монография. - Л.: Энергоатомиздат, 1991. –304 с.
13. Кендал М. Теория распределений / М. Кендал, А. Стьюарт // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1966. –587 с.
14. Кендал М. Статистические выводы и связи / М. Кендал, А. Стьюарт // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973. – 899 с.
15. Кендал М. Многомерный статистический анализ и временные ряды / М. Кендал, А. Стьюарт // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 736 с.
16. Дорожовець М. Проблеми оцінювання непевності за методом типу А результатів практично виконаних вимірювань / М.М. Дорожовець // Вимірювальна техніка та метрологія, 2008. - Вип. 68. – с. 204-211.
17. Lloyd E.H. Least-squares estimation on location and scale parameters using order statistics / E. Lloyd // *Biometrika*, 39, 1952. - 88 p.
18. Downton F. A note of ordered least-squares estimation / F. Downton // *Biometrika*, 40, 1953. - 457 p.
19. Крамер Г. Математические методы статистики / Гарольд Крамер // пер. с англ. А.С. Мони́на и А.А. Петро́ва; под ред. академика А.Н. Колмогорова. 2-е изд., стереотип. - М.: Мир, 1975. – 648 с.
20. Кособуцький П. Статистичні та Монте-Карло алгоритми моделювання випадкових процесів у макро- і мікросистемах в MathCAD / П.С. Кособуцький // Львів: Вид-во Національного університету «Львівська політехніка», 2014. – 412 с.
21. Shapiro S. An analysis of variance test for normality (complete samples) / S.S.Shapiro, S.S. Wilk // *Biometrika*, 1965. - Vol.52. - p. 591-611.
22. Shapiro S. An approximate analysis of variance test fo normality / S.S.Shapiro, R.S. Francia // *J. Amer. Statist. Assoc*, 1972. - Vol. 337. - p. 215-216.
23. Дорожовець М. Опрацювання результатів спостереження на основі наближеного методу порядкових статистик / М. Дорожовець, І. Попович // Вимірювальна техніка та метрологія. - 2014. - № 75. – с. 8-12.

24. Дорожовець М. Опрацювання результатів спостереження на основі наближеного методу порядкових статистик / М. Дорожовець, І. Попович // II Міжнародна науково-практична конференція «Управління якістю в освіті та промисловості: досвід, проблеми та перспективи»: Тези доповідей. – Львів, 28-30 травня 2015. - с. 196–197.

25. Авраменко О.В. Оцінювання непевності результатів вимірювання під час контролю відносного видовження та границі текучості при розриві виробів із пластмаси / О.В. Авраменко, М.М. Дорожовець, І.В. Попович // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». - 2014. - № 802. - с. 9-20.

26. Авраменко О.В. Оцінювання непевності результатів вимірювання під час контролю відносного видовження та межі плинності при розриві виробів із пластмаси / О.В. Авраменко, М.М. Дорожовець, І.В. Попович // Всеукраїнська науково-технічна конференція молодих вчених у царині метрології «Technical Using of Measurement–2015»: Тези доповідей. – Славське, 2-6 лютого 2015. – с. 94–96.

27. Дорожовець М.М. Опрацювання результатів спостережень із розподілом, що є згорткою нормального і рівномірного розподілів методом порядкових статистик / М.М. Дорожовець, І.В. Попович // Український метрологічний журнал. - 2015. - № 2. - с. 3-11.

28. Dorozhovets M. Processing of the Random Observations with Flatten - Gaussian Distribution by Approximate Order Statistics Method / M. Dorozhovets, I. Popovych // The 8th IEEE International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications: Proceedings. - Warsaw, Poland, 24-26 September 2015. - Vol. 1.– p. 149-152. (SCOPUS).

29. Дорожовець М.М. Опрацювання результатів спостережень з плоско-нормальним розподілом методом позиційних статистик / М.М. Дорожовець, І.В. Бубела // Всеукраїнська науково-технічна конференція молодих вчених у царині метрології «Technical Using of Measurement–2016»: Тези доповідей. – Славське, 1-5 лютого 2016. – с. 119–121.

30. Dorozhovets M. Uncertainty evaluation of the minimal value measurements / M. Dorozhovets, Z. L. Warsza, I. Popovych // Measurement Automation Monitoring. Aug. – 2015. - Vol. 61, no. 08. – p. 395-398.

31. Dorozhovets M. Evaluation of the measurement uncertainty of the minimal value of observations / M. Dorozhovets, I. Popovych, Z. L. Warsza // XI Scientific –

Technical Conference: Problems and Progress in Metrology.: Proceedings. - Kościelisko, Poland, 07–10 June 2015. – p. 60-66.

32. Dorozhovets M. Method of evaluation the measurement uncertainty of the minimal value of observations and its application in testing of plastic products / M. Dorozhovets, I. Popovych, Z. L. Warsza // *Advanced Mechatronics Solutions. Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer International Publishing Switzerland. – 2016. - Vol. 393. - p. 421 – 430. (SCOPUS).

33. Dorozhovets M. Computing uncertainty of the extreme values in random samples / M. Dorozhovets, I. Bubela // *International Journal of Computing*. – 2016. – Vol. 15 (2). - p. 127 – 135.

34. Микийчук М. Метрологічне забезпечення якості продукції / М. Микийчук, П. Столярчук // *Вимірюв. техніка та метрологія: міжвід. наук.-техн. зб.* — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. — Вип. 70. — с. 160-164.

35. Бубела Т. Методи та засоби визначення показників якості продукції / Т.З. Бубела, П.Г. Столярчук, Є.В. Походило, М.С. Міхалева, В.М. Ванько // *Навч. посібник*. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2012. – 292 с.

36. Гонсьор О. Метрологічне забезпечення якості виробництва / О.Й. Гонсьор, М.М. Микийчук // *Вісник Національного університету «Львівська політехніка»*, 2009. - № 639. — с. 202-205.

37. Микийчук М. Актуальні питання метрологічної надійності промислових ЗВТ / М.М. Микийчук // *Методи та прилади контролю якості*, 2009. — № 23. — с. 126-129.

38. Бубела Т. Підтвердження відповідності як інструмент належної якості засобів обчислювальної техніки / Т.З. Бубела, П.Г. Столярчук // *Комп'ютерні системи та мережі: зб. наук. пр. / відп. ред. А. О. Мельник*. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. - № 658. — с. 20-25.

39. Хофман Д. Техника измерений и обеспечения качества: Справочная книга/ Пер. с нем. – М.: Энергоатомиздат, 1983.

40. Байцар Р. Статистичні методи в управлінні якістю виробничих процесів / Р. Байцар, Л. Демчук // *Вимірювальна техніка та метрологія*, 2014. - № 75. — с. 131 – 135.

41. Бойко Т. Забезпечення єдності і точності кваліметричного оцінювання продукції / Т. Г. Бойко // Автоматика, вимірювання та керування: зб. наук.пр. / відп. ред. В. Б. Дудикевич. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2009. - № 639.— с. 175-179.

42. Бубела Т. Концептуальні засади створення фахових систем вимірювання якості / Т.З. Бубела // Електротехнічні і комп'ютерні системи. Науково-технічний журнал, 2012. — № 06(82). — с. 210-215.

43. Бубела Т. Побудова національної системи оцінювання якості / Т.З. Бубела // Стандартизація, сертифікація, якість. Науково-технічний журнал, 2013. — №1 (80). — с. 49-53.

44. Бубела Т. Системный подход к оцениванию качества / Т.З. Бубела // Международный журнал Технического университета Варна «Устойчивое развитие», 2013. — № 12. — с. 56-62.

45. Методи опрацювання результатів вимірювань [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://cde.kpi.kharkov.ua/cdes/Errors/gl\\_2.pdf](http://cde.kpi.kharkov.ua/cdes/Errors/gl_2.pdf)

46. Метрологія. Терміни та визначення: ДСТУ 2681–94. - [Чинний від 1995-01-01]. - К.: Держстандарт України, 1994. – с. 68. (Державний стандарт України).

47. Дорожовець М. Основи метрології та вимірювальної техніки / Дорожовець М., Мотало В., Стадник Б., Василюк В., Борек Р., Ковальчик А. // Підручник: У 2 т. / За ред. Стадника Б. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2005. – Т.1. – Основи метрології. – 532 с.

48. Володарский С. Статистична обробка даних: Навч. посіб. / С.Т. Володарский, Л.О. Кошева // – К.: НАУ, 2008. – 308 с.

49. Volodarsky E. Niepewność jako miara poziomu zaufania do wyników niektórych procedur doświadczalnych / Volodarsky E. T., Koshevaya L. A., Warsza Z. // PAK, 2011. - Vol. 57, nr 5. - s. 483-485.

50. Volodarsky E. Niepewność decyzji o zgodności mierzonego obiektu z wymaganiami / Volodarsky E. T., Koshevaya L. A., Warsza Z. L. // Measurement Automation Monitoring, 2012. - Vol. 58 nr 4. - p. 391-395.

51. Volodarsky E. Zastosowanie estymacji odpornej w badaniach biegłości laboratorium przy niewielkiej liczbie pomiarów / E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Koshevaya, D. Palianycho // Pomiarы Automatyka Kontrola (Measurements Automation Monitoring), 2013. - Vol. 59, nr 6. - p. 554–557.

52. Volodarsky E. Metoda odporna oceny dokładności pomiarów / E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Koshevaya // IX Konferencji Naukowo-Technicznej PPM'12. Problems and Progress in Metrology.: Materiały, 2012. - s. 178-184.

53. Захаров И. Теория неопределенности в измерениях: Учеб. пособ. / Захаров И. П., Кукуш В. Д. // – Х.: Консум, 2002. – 256 с.

54. Дорожовець М. Результати дослідження кореляції між середнім значенням, медіаною та серединою розмаху для випадкових спостережень з типовими розподілами / М. М. Дорожовець, О. М. Никипанчук // Системи обробки інформації, 2011. — № 1(91). — с. 28-33.

55. Dorozhovets M. Evaluation of the uncertainty type A of the random stationary signal component from its autocorrelated observations / Z Warsza, M Dorozhovets // MAM, 2015. -№08. s. 399-402.

56. Dorozhovets M. Badania korelacji między podstawowymi estymatorami parametru położenia dla serii obserwacji nieskorelowanych / M. Dorozhovets // PAK, 2012. – № 08. s. 697-700.

57. Dorozhovets M. Wpływ braku znajomości a priori funkcji autokorelacji obserwacji na ocenę niepewności standardowej ich wartości średniej / M. Dorozhovets // PAK, 2009. - № 12. s. 989-992.

58. Dorozhovets M. Wpływ korelacji wyników obserwacji na niepewność regresji liniowej / M. Dorozhovets // PAK, 2008. - № 12, s. 808-811.

59. Dorozhovets M. Niepewność korekcji oddziaływań systematycznych oraz dryftów czasowych / M. Dorozhovets // Przegląd Elektrotechniki, 2015, - N 11. s. 300-304.

60. Про безпечність та якість харчової продукції: Закон України від 23.11.1997 № 771/97. Редакція від 01.01.2016. [Електронний ресурс] — Режим доступу: <http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1778-17>.

61. Пономарьов П. Безпека харчових продуктів та продовольчої сировини: Навчальний посібник / Пономарьов П.Х., Сирохман І.В. // - К.: Лібра, 1999. - 272 с.

62. Столярчук П. Упровадження систем контролю молочної продукції — запорука її якості та безпечності / П. Столярчук, О. Малик // Стандартизація, сертифікація, якість, 2011. — № 6. — с. 61 - 64.

63. Продукти харчові. Визначання вмісту нітрату і/або нітриту. Частина 1. Загальні положення: ДСТУ EN 12014-1-2002 (EN 12014-1:1997, IDT).

- [Чинний від 2003-10-01]. - К.: Держспоживстандарт України, 2002. – с. 8. (Національний стандарт України).

64. Черевко О.І. Методи контролю якості харчової продукції: Навч. посібник для студ. вищих навч. закл. технол. спец. / О.І. Черевко, Л.М. Крайнюк, Л.О. Касілова, Л.Р. Димитрієвич, Ж.А. Крутовий, Л.Г. Зіборова. — Харків: ХДУХТ, 2005. — 230 с.

65. Попова Н.В. Контроль якості та безпеки продукції галузі / Попова Н.В., Мисюра Т.Г. // Курс лекцій для студ. напряму 6.051701 "Харчові технології та інженерія" ден. та заоч. форм навч. — К.: НУХТ, 2012. — 176 с. [Електронний ресурс] - Режим доступу: <http://library.nuft.edu.ua/ebook/file/102.02.pdf>.

66. Шичков Н. А. Обеспечение безопасности пищевой продукции на основе принципов НАССР / Н. А. Шичков, Е. М. Михеева // Пищ. промышленность, 2004. — № 2. — с. 80—81.

67. Принципы ХАССП. Безопасность продуктов питания и медицинского обслуживания. Пер. с англ. О. В. Замятиной. — М.: Стандарты и качество, 2006. — 232 с.

68. Гончаренко Т.П. Харчові продукти як об'єкт моніторингових досліджень / Гончаренко Т.П., Забеліна А.О. // Вісник КДПУ імені Михайла Остроградського. Випуск 6/2007 (47). Частина 2 с.74-77. [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6-2\(47\)/74.pdf](http://www.kdu.edu.ua/statti/2007-6-2(47)/74.pdf).

69. Грановский В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / Грановский В.А. Сирая Т.Н. // - Л.: Энергоатомиздат, 1990. - 288 с.

70. Дорожовець М. Дослідження застосування зразкових вибірок для оцінювання результату вимірювання та його стандартної непевності / М.М. Дорожовець // Відбір і обробка інформ. Вид. ФМІ НАНУ, 2008. –Вип. 29 (105). – с. 24-31.

71. Fisz M. Probability Theory and Mathematical Statistics / M. Fisz // John Willey & Sons, London, 1963.

72. Dorozhovets M. Metoda opracowania wyników obserwacji bazująca na ich porównaniu z próbami referencyjnymi / М. М. Dorozhovets // Pomiarы. Automatyka. Kontrola. 55 (2009), nr.9, s. 754-757.

73. Dorozhovets M. Estimation of the best measurement result and its standard uncertainty by input observations processing using the method of reference samples based on order statistics / Dorozhovets M., Kochan O. // Proc. of the 5-th IEEE



International Workshop on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications. 21-23 September 2009, Rende (Cosenza), Italy. - p.351-354.

74. Dorozhovets M. Investigation of the Test Samples Method, Used for the Evaluation of Measurement Result and its Uncertainty / M. Dorozhovets // Proc. of Int. Conf. on Precision Measurement. TU Ilmenau. 08–12 Sept. 2008. p. - 91-92.

75. Dixon W.J. Robustness in real life: A study of clinical laboratory data / Hill M.A., Dixon W.J. // *Biometrika*, 38, 1982. – p. 377-396.

76. Леман Э. Теория точечного оценивания (Теория вероятностей и математическая статистика) / Леман Э. // Пер. с англ.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991.— 448 с.

77. Tukey J.W. A survey of sampling from contaminated distributions / J.W. Tukey // In: *Contributions to Probability and Statistics*. Olkin, Ed. Stanford University Press, Stanford, Calif., 1960.

78. Huber P. J. *Robust Statistics* / P. J. Huber // John Wiley & Sons, New York, 1981.

79. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул / Е.Н. Львовский // – М.: Высшая школа, 1988. – 239 с.

80. Обозовський С.С. Теоретичні основи інформаційно-виміральної техніки / С.С. Обозовський // – К.: НМК ВО, 1991. - 223 с.

81. Burke S. Missing Values, Outliers, Robust Statistics and Non-parametric Methods / S. Burke // *Scientific Data Management*, Europe online supplement, 2001. - p. 19-24.

82. Grubbs F. Procedures for detecting outlying observations in samples / F. Grubbs // *Technometrics* 11, 1969. - p.1-21.

83. Volodarsky E. Evaluating the precision of interlaboratory measurements using robust "s-algorithm" / E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Kosheva, A. Idźkowski // *Problems and Progress in Metrology. PPM'15*. - pp. 53-59, 2015.

84. Volodarsky E. Robust estimation in interlaboratory measurements with small number of measurements / E. Volodarsky, Z. Warsza // *Automation Monitoring*, 2015. Vol. 61, nr. 04. - p.104-110.

85. Volodarsky E. Robust Algorithm S to assess the precision of interlaboratory measurements / E. Volodarsky, Z. Warsza, L. Kosheva, A. Idźkowski // *Measurement Automation Monitoring*, 2015. Vol. 61, nr. 04. - p.111-114.

86. Volodarsky E.T. Application of two robust methods on the example of inter-laboratory comparison / Volodarsky E.T., Warsza Z.L. // In: Pavese, F., Bremser, W., Chunovkina, A.G., Fischer, N., Forbes, A.B. (eds.) *Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences* volume 86, World Scientific Publishing Company, 2015. - p. 385-391.
87. Volodarsky E. Examples of robust estimation with small number of measurements / Volodarsky E.T., Warsza, Z.L. // *Progress in Automation, Robotics and Measuring Techniques*. (Editors: R. Szewczyk, C. Zieliński, M. Kaliczyńska), vol. 3 "Measuring Techniques and Systems". (ISBN 978-3-319-15834-1), vol. 352 of series: "Advances in Intelligent Systems and Computing" (ISSN2194-5357) Springer (2015). - p. 285 -291.
88. Goodall C. M-estimators of location: An outline of the theory / In D. Hoaglin, F. Mosteller, and J. W. Tukey // editors, *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, 1983. New York. – p. 339-403.
89. Koenker R. Regression quantiles. Jr / Koenker R., Basset G. // *Econometrica* 36, 1978. - p.33-50.
90. Jaeckel L. Estimating regression coefficients by minimizing the dispersion of the residuals / L.A. Jaeckel // *Annals of Mathematical Statistics*, 43:1449-1458, 1972.
91. Яцук В. Малачівський П.С. Методи підвищення точності вимірювань / В.О. Яцук // Підручник — Львів: Вид-во «Бескид-біт», 2008. — 368 с.
92. Yatsuk V. Graniczne możliwości korekcji błędów przyrządów pomiarowych / V. Yatsuk, J. Yatsuk // *PPM* 2012, s. 42-46.
93. Cox M. Systematic-error modeling, with application to complex permittivity measurement / Cox M. G // 16th IMEKO TC4 Symposium, Florence, 2008.
94. Dorozhovets M. Niepewność korekcji oddziaływań systematycznych oraz dryftów czasowych / M.M. Dorozhovets // *Przegląd Elektrotechniki*, 2015. N 11. s. 300-304.
95. Туз Ю. Структурные методы повышения точности измерительных устройств / Ю.М. Туз // Киев: Выща школа, 1976.
96. Бромберг Э.М., Куликовский КЛ. Тестовые методы повышения точности измерений / Э.М. Бромберг // М.: Энергия, 1978.

97. Поліщук Є.С. Метрологія та вимірювальна техніка / Поліщук Є.С., Дорожовець М.М., Яцук В.О., Ванько В.М., Бойко Т.Г // Підручник — 2-е вид., доп. та переробл. / За ред. Поліщука Є.С. — Львів: Вид-во Львівської політехніки, 2012. — 544 с.

98. Evaluation of measurement data—Supplement 1 to the ‘Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement’—Propagation of distributions using a Monte-Carlo method. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP and OIML.

99. Hawkins D., Identification of Outliers, Chapman and Hall, London 1980.

100. Dixon W. Analysis of extreme values / Dixon W. J. // Annals of Mathematical Statistics 1950. - 21. - p. 488-506.

101. Гмурман В. Теория вероятностей и математическая статистика / Гмурман В. // – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

102. Bubela I.V. Opracowanie wyników losowych obserwacji z płasko-normalnym rozkładem metodą statystyk pozycyjnych // Zeszyty naukowe Politechniki Rzeszowskiej 292, Elektrotechnika 34. RUTJEE, t. XXIII, z. 34 (3/2015), lipiec-wrzesień 2015. – s.71-80.

103. Stepanov A. Calculation of coverage intervals: some study cases статистика / Stepanov A., Chunovkina A., Burmistrova N. // Advanced Mathematical and Computational Tools in Metrology and Testing X // Edited by F. Pavese, W. Bremser, A. Chunovkina, N Fischer and A. B. Forbes, 2015 World Scientific Publishing Company. - p. 132-139.

104. Blázquez J. The coverage factor in a Flatten–Gaussian distribution / Blázquez J., García-Berrocal A., Montalvo C., Balbás M. // Metrologia, 2008. Vol. 45. s. 503-506.

105. Dietrich C. Uncertainty, Calibration and Probability. The Statistics of Scientific and Industrial Measurement / Dietrich C. F. // Second Edition 1991. The Adam Hilger Series on Measurement Science and Technology. - s. 535.

106. Fotowicz P. Metody obliczania współczynnika rozszerzenia w oparciu o splot rozkładu prostokątnego z normalnym / Fotowicz P. // PAK, 2004. № 4. - s. 13-16.

107. Fotowicz P. Wykorzystanie rozkładu płasko-normalnego przy obliczaniu niepewności pomiaru / Fotowicz P. // PAK, 2011. № 6. - s. 595-598.

108. Бахвалов Н. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков // – М.: Наука, 1987. – 630 с.

109. Самарский А. А. Введение в численные методы / А. А. Самарский // Учебное пособие для вузов. 3-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2005. — 288 с: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература). ISBN 5-8114-0602-9.

110. Випробування і контроль якості продукції. Терміни та визначення: ДСТУ 3021-95. - [Чинний від 1996-01-07]. - К.: Держстандарт України, 1995. – 74 с. - (Державний стандарт України).

111. Botsiura O. Measurement uncertainty evaluation of the maximum observed value of the test parameter / Botsiura O. A, Zharko Yu. G., Zakharov I. P. // Information Processing Systems (COI) is-sue 2(127) Kharkiv, 2015. - p.21-23 (in Russian).

112. Бичківський Р. Управління якістю / Р. Бичківський // Навч. посібник. — Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2000. — 329 с.

113. Бичківський Р. Метрологія, стандартизація, управління якістю / Р.В.Бичківський, П.Г.Столярчук, П.Р.Гамула // - Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2002. - 580с.

114. Бичківський Р. Управління якістю. Сертифікація / Р.В.Бичківський, П.Г.Столярчук, Л.І Сопільник, О.О. КАлинський // Навч. Посіб. - К.: Школа, 2005. – 432с.

115. Ціж Б. Основи кваліметрії / Ціж Б.Р., Байцар Р.І. // Навч. Посібник — Львів: ФРП Коран Б.І. 2008. — 110 с.

116. Куць В. Кваліметрія / В. Р. Куць, П. Г. Столярчук, В. М. Друзюк // навч. посібник / Нац. ун-т "Львівська політехніка". - Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2012. - 256 с.

117. Володарский Е. Планирование и организация измерительного эксперимента / Володарский Е.Т., Малиновский Б.Н., Туз Ю.М. // – Киев: Вища школа, 1987. – 280 с.

118. Кошечая Л.А. Обеспечение единства испытаний. Концептуальные основы / Л.А. Кошечая // Монография. – К.: НАУ-друк, 2009. – 176 с.

119. Кошева Л.О. Оцінювання правильності результатів вимірювань та випробувань / Л.О. Кошева // Український метрологічний журнал. – 2010. –№1. – с. 3-6.

120. Системи пластмасових трубопроводів для подачі газоподібного палива. Поліетилен (PE). Частина 1. Загальні вимоги: ДСТУ Б EN 1555-1:2012 (EN 1555-1:2010, IDT). - [Чинний від 2013-12-01]. - К.: Мінрегіон України, 2014. - 20 с. - (Національний стандарт України). [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://polyplastic.ua/files/DSTU/dstu\\_b\\_en\\_1555\\_1\\_2012.pdf](http://polyplastic.ua/files/DSTU/dstu_b_en_1555_1_2012.pdf); Системи пластмасових трубопроводів для подачі газоподібного палива. Поліетилен (PE). Частина 2. Загальні вимоги: ДСТУ Б EN 1555-2:2012 (EN 1555-2:2010, IDT) - [Чинний від 2013-12-01]. - К.: Мінрегіон України, 2014. - 26 с. - (Національний стандарт України). [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://polyplastic.ua/files/DSTU/dstu\\_b\\_en\\_1555\\_2\\_2012.pdf](http://polyplastic.ua/files/DSTU/dstu_b_en_1555_2_2012.pdf).

121. Пластмассы. Метод испытания на растяжение (Пластмаси. Метод випробування на розтяг): ГОСТ 11262-80. - [Чинний від 1980-12-01]. - М.: Государственный комитет СССР по стандартам, 1980. - 14 с. - (Государственный стандарт союза ССР). [Електронний ресурс] - Режим доступу: <http://vsegost.com/Catalog/30/30504.shtml>.

122. Пластмассы. Условия кондиционирования и испытаний образцов (проб) (Пластмаси. Умови кондиціонування і випробувань зразків (проб)): ГОСТ 12423-66. - [Чинний від 1967-07-01]. - М.: Стандартиформ, 2006. - 5 с. - (Межгосударственный стандарт). [Електронний ресурс] - Режим доступу: <http://www.gosthelp.ru/gost/gost3831.html>.

123. Пластмассы. Общие требования к изготовлению образцов способом механической обработки (Пластмаси. Загальні вимоги до виготовлення зразків способом механічної обробки): ГОСТ 26277-84. - [Чинний від 1985-07-01]. - М.: Издательство стандартов, 1984. - 10 с. - (Государственный стандарт союза ССР). [Електронний ресурс] - Режим доступу: <http://vsegost.com/Catalog/30/30504.shtml>.

124. Газопроводы из полиэтиленовых труб. Частина I. Проектування. Частина II. Будівництво: ДБН В.2.5-41:2009. - [Чинний від 2010-08-01]. - К.: Мінрегіонбуд України, 2010. - 145 с. - (Державні будівельні норми України). [Електронний ресурс] - Режим доступу: [http://polyplastic.ua/upload/dbn\\_41-2009.pdf](http://polyplastic.ua/upload/dbn_41-2009.pdf).

125. Штангенциркули. Технические условия: ГОСТ 166-89. - [Чинний від 1991-01-01]. - М.: ИПК Издательство стандартов, 2003. - 10 с. - (Межгосударственный стандарт). [Електронний ресурс]. - Режим доступу: <http://vsegost.com/Catalog/28/28590.shtml>.

126. Микрометры. Технические условия: ГОСТ 6507-90. - [Чинний від 1991-01-01]. - М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. - 10 с. -

(Межгосударственный стандарт). [Электронный ресурс]. - Режим доступа: <http://vsegost.com/Catalog/10/10856.shtml>.

127. Инженерные сети из полимерных материалов: УДК 621.643-036 (051).  
Ежеквартальный журнал для профессионалов.- 2015. - №32. – 48 с. (Трубы  
специального назначения. - с. 20-21).

**Додаток А**

**Договір про науково-технічну співпрацю**

Затверджую  
Генеральний директор  
ТзОВ «Ельпласт-Львів»



Гурський О. О.



«02» червня 2014 року

Затверджую  
Проректор з наукової роботи  
Національного університету  
«Львівська політехніка»



д.т.н. проф. Піх З. П.



«02» червня 2014 року

## ДОГОВІР

№ \_\_\_\_\_ від «02» червня 2014 року

### про науково-технічну співпрацю

між ТзОВ «Ельпласт-Львів» (м. Городок) і  
Національним університетом  
«Львівська політехніка»

Товариство з обмеженою відповідальністю «Ельпласт-Львів» м. Городок, Україна в особі Генерального директора Гурського Олександра Олександровича (далі – Сторона 1), що діє на підставі Статуту Товариства, та Національний університет «Львівська політехніка», (НУ «Львівська політехніка») м. Львів, Україна, в особі проректора з наукової роботи Піха Зоряна Григоровича, який діє на основі Статуту Національного університету «Львівська політехніка» і виступає від імені виконавців договору з іншого боку, при сумісному найменуванні (далі – Сторона 2), уклали даний договір про наступне:

## 1. ПРЕДМЕТ ДОГОВОРУ

- 1.1. Учасники здійснюють співпрацю в галузі метрологічного забезпечення технологічних процесів у виробничих об'єктах ТзОВ «Ельпласт-Львів», зокрема, що стосуються контролю якості сировини, проміжних продуктів та готових виробів, а також у виконанні спільних вимірювальних та метрологічних досліджень в реальних умовах промислового виробництва.
- 1.2. Взаємовідносини між сторонами регулюються цим Договором, який підписаний учасниками.

## 2. ВЗАЄМНІ ОБОВ'ЯЗКИ СТОРІН

Сторони зобов'язуються:

- 2.1. Надавати консультації із сучасних методів опрацювання результатів вимірювань отриманих під час випробувань виробів.
- 2.2. Надавати консультації щодо валідації вимірювальних процесів у промисловості.
- 2.3. Надавати доступ до вимірювального обладнання та технічної документації з метою виконання вимірювальних процесів.
- 2.4. Приймати участь у розробленні нових вимірювальних процедур, вимірювальних устав тощо.

## 3. ВИКОРИСТАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ

- 3.1. Отримані результати досліджень Сторони використовують для створення метрологічної документації для забезпечення якості технологічних процесів.
- 3.2. Отримані результати досліджень Сторони використовують в наукових дослідженнях під час виконання дипломних і магістерських робіт, кандидатських та докторських дисертацій.
- 3.3. За отриманими результатами досліджень Сторони публікують спільні наукові статті за взаємною згодою сторін.



#### 4. ТЕРМІН ДІЇ ДАНОГО ДОГОВОРУ

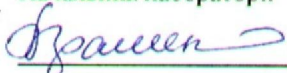
- 4.1. Цей договір діє з моменту його підписання і до закінчення повного циклу випробувань.  
4.2. Цей договір може бути продовжений Сторонами за взаємною згодою шляхом укладання додатку до нього.

#### 5. ІНШІ УМОВИ

- 5.1. Цей договір укладено в двох оригінальних примірниках по одному для кожної зі Сторін.  
5.2. У випадках непередбачених цим договором Сторони керуються чинним законодавством України.  
5.3. Сторони зобов'язуються всі спірні питання, які виникають при виконанні цього договору, вирішувати шляхом переговорів.  
5.4. Сторони виконують передбачені Договором положення без взаємних фінансових зобов'язань та грошових розрахунків.  
5.5. Сторони, за взаємною згодою, можуть узгоджувати плани співпраці, які є Додатком до даного Договору.  
5.6. Для виконання конкретних завдань Сторони зобов'язуються забезпечити взаємний доступ представників Сторін до науково-дослідного обладнання та приміщень; до інформаційного та нормативного забезпечення.  
5.7. Відповідальним за виконання Договору:  
від Сторони 1 – начальник лабораторії ТзОВ «Ельпласт-Львів» Авраменко О. В.  
Сторони 2 – директор Інституту комп'ютерних технологій автоматики та метрології (ІКТА) Стадника Б. І.; д.т.н. проф. кафедри ІВТ Дорожовець М. М.; аспір. навч. кафедри ІВТ Попович І. В.  
5.8. Зміна умов Договору проводиться за взаємною згодою обох Сторін. Жодна зі Сторін не може передавати свої права (обумовлені даним Договором) третій стороні без письмової згоди іншої Сторони.  
5.9. Договір може бути розірвано за взаємною згодою Сторін або в інших випадках передбачених чинним законодавством України.

#### СТОРОНА 1


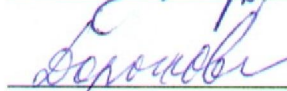
Виконавці договору від  
ТзОВ «Ельпласт-Львів»  
Начальник лабораторії


 Авраменко О. В.

Україна 81500  
м. Городок, Львівська обл.,  
вул. Заводська буд. № 4  
тел. (03231) 3-22-44  
р/р 26001010287545  
Відділення «Львівська регіональна дирекція ПАТ  
«ВТБ»»  
МФО 321767, ЄДРПОУ 23957545  
ІПН 239575413163  
Свідоцтво платника ПДВ №18368432  
Платник податку на прибуток  
на загальних підставах

#### СТОРОНА 2

Виконавці договору від  
Національного університету  
«Львівська політехніка»

 директор ІКТА  
д. т. н. проф. Стадник Б. І.  
 д. т. н. проф.  
Дорожовець М. М.

 аспір. Попович І. В.  
Національного університету  
«Львівська політехніка»  
вул. С. Бандери 12,  
м. Львів, Україна 79013

**Додаток Б****Акти впровадженнь результатів дисертаційної роботи**



### А К Т

про впровадження результатів дисертаційної роботи в навчальний процес

**Бубели Івanni Василівни**

**«Опрацювання результатів вимірювання**

**при відхиленні їх статистичних властивостей від типових»**

представленої на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю

*05.01.02 – стандартизація, сертифікація та метрологічне забезпечення*

Комісія НУ «Львівська політехніка» у складі:

Голова комісії – голова науково-методичної ради інституту комп'ютерних технологій та метрології, д.т.н., проф. Байцар Р.І.

Члени комісії: професор кафедри «Інформаційно-вимірювальні технології», д.т.н., проф. Яцишин С.П., професор кафедри «Інформаційно-вимірювальні технології», д.т.н., проф. Микитин І.П. і професор кафедри «Інформаційно-вимірювальні технології», д.т.н., проф. Скоропад П.І.


Даний акт підтверджує, що проведені дисертанткою наукові дослідження виконувалися на кафедрі інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету «Львівська політехніка». Основні положення та результати дисертаційної роботи впроваджені у навчальний процес кафедри «Інформаційно-вимірювальні технології» Національного університету «Львівська політехніка», зокрема використання методу оцінювання непевності результатів, якими є екстремальні спостереження при невеликій кількості зареєстрованих спостережень, та модифікованого методу порядкових статистик для опрацювання та оцінювання непевності спостережень з розподілами, відмінними від нормального, а також застосовуються для підвищення рівня підготовки фахівців спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка», спеціалізації «Метрологія та вимірювальна техніка», і використовуються при вивченні дисциплін: «Опрацювання результатів вимірювань» та «Комп'ютерне опрацювання вимірювальної інформації».

**Голова комісії,  
голова науково-методичної ради ІКТА**  
д.т.н., проф.

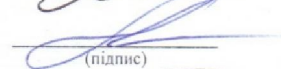
  
(підпис)

Байцар Р.І.  
(прізвище та ініціали)

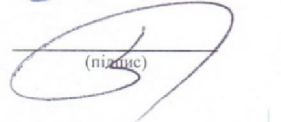
**Члени комісії:**  
**проф. каф. ІВТ,**  
д.т.н., проф.  
**проф. каф. ІВТ,**  
д.т.н., проф.  
**проф. каф. ІВТ,**  
д.т.н., проф.

  
(підпис)

Яцишин С.П.  
(прізвище та ініціали)

  
(підпис)

Микитин І.П.  
(прізвище та ініціали)

  
(підпис)

Скоропад П.І.  
(прізвище та ініціали)

Затверджую  
Проректор з науково-педагогічної роботи  
Національного університету  
«Львівська політехніка»  
доц. Давидчак О.Р.  
"10" 2016 р.



**А К Т**  
про впровадження результатів дисертаційної роботи в навчальний процес  
**Бубели Івanni Василівни**  
**«Опрацювання результатів вимірювання  
при відхиленні їх статистичних властивостей від типових»**  
представленої на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю  
*05.01.02 – стандартизація, сертифікація та метрологічне забезпечення*

Комісія Національного університету «Львівська політехніка» у складі:

Голова комісії – голова науково-методичної ради інституту комп'ютерних технологій та метрології, д.т.н., проф. Байцар Р.І.

Члени комісії: професор кафедри «Метрологія, стандартизація та сертифікація», д.т.н., проф. Бойко Т.Г., професор кафедри «Метрологія, стандартизація та сертифікація», д.т.н., проф. Яцук В.О., професор кафедри «Метрологія, стандартизація та сертифікація», д.т.н., доц. Гоц Н.Є.


Даний акт підтверджує, що проведені дисертанткою наукові дослідження виконувалися на кафедрі інформаційно-вимірювальних технологій Національного університету «Львівська політехніка». Основні положення та результати дисертаційної роботи впроваджені у навчальний процес кафедри «Метрологія, стандартизація та сертифікація» Національного університету «Львівська політехніка», зокрема використання методу оцінювання непевності результатів, якими є екстремальні спостереження при невеликій кількості зареєстрованих спостережень, та модифікованого методу порядкових статистик для опрацювання та оцінювання непевності спостережень з розподілами, відмінними від нормального, а також застосовуються для підвищення рівня підготовки фахівців спеціальності 152 «Метрологія та інформаційно-вимірювальна техніка» за спеціалізацією 0401 «Метрологічне забезпечення випробувань та якості продукції», і використовуються при вивченні дисциплін: «Кваліметрія», «Методи та засоби вимірювань, випробувань і контролю», «Опрацювання результатів вимірювань, випробувань та контролю», «Метрологія та інженерія якості продукції» та «Метрологічне забезпечення виробництва».

**Голова комісії,**  
**голова науково-методичної ради ІКТА**  
д.т.н., проф.

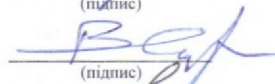
  
(підпис)

**Байцар Р.І.**  
(прізвище та ініціали)

**Члени комісії:**  
**проф. каф. МСС,**  
д.т.н., проф.  
**проф. каф. МСС,**  
д.т.н., проф.  
**проф. каф. МСС,**  
д.т.н., доц.

  
(підпис)

**Бойко Т.Г.**  
(прізвище та ініціали)

  
(підпис)

**Яцук В.О.**  
(прізвище та ініціали)

  
(підпис)

**Гоц Н.Є.**  
(прізвище та ініціали)

Товариство  
з обмеженою відповідальністю  
**«ЕЛЬПЛАСТ-ЛЬВІВ»**

вул. Заводська, 4  
м. Городок,  
Львівська обл.  
Україна, 81500  
тел.: (032) 298-61-28, 298-61-30  
тел.: (03231) 3-22-60, 3-22-44  
факс: (03231) 3-22-42



На Ваш № \_\_\_\_\_

Вих. № 384 від 06.10 2016

Стосується:

e-mail: [elplast@elplast.com.ua](mailto:elplast@elplast.com.ua)  
[www.elplast.com.ua](http://www.elplast.com.ua)

### Акт про використання результатів

Результати досліджень виконані в рамках договору про науково-технічну співпрацю між ТзОВ «Ельпласт-Львів» (м. Городок) і Національним університетом «Львівська політехніка» і представлені в дисертаційній роботі І.В Бубели, використані у метрологічній лабораторії ТзОВ «Ельпласт-Львів» для оцінювання непевності результатів експериментальних досліджень під час контролю відносного видовження та межі плинності пластмасових труб при їх випробуванні на розрив і розтяг.

Затверджую:  
Генеральний директор  
ТзОВ «Ельпласт-Львів»



Гурський О. О.  
(підпис)

ТзОВ «Ельпласт-Львів»  
Начальник лабораторії

(підпис)

Тарас Р. С.

Limited Liability Company **Elplast-Lviv**

4, Zavadska str., Gorodok, Lviv region, Ukraine, 81500

tel.: +38 (032) 298-61-28, 298-61-30; tel.: +38 (03231) 3-22-60, 3-22-44; fax: +38 (03231) 3-22-42

e-mail: [elplast@elplast.com.ua](mailto:elplast@elplast.com.ua), [www.elplast.com.ua](http://www.elplast.com.ua)

**Додаток В**  
**Результати виконаних обчислень**  
**при дослідженні екстремальних спостережень**

Таблиця В.1 – Очікувані значення математичного сподівання  $m_{0,1}$  та стандартного відхилення  $\sigma_{0,1}$  мінімального  $x_1$  спостереження для різних нормованих розподілів при  $n = 3, \dots, 10$   
(для максимального  $x_n$  значення  $m_{0,n}$  мають протилежний знак, а  $\sigma_{0,1} = \sigma_{0,n}$ )

Нормальний розподіл		n	Рівномірний розподіл	
$m_{01}$	$\sigma_{01}$		$m_{01}$	$\sigma_{01}$
-0,84628	0,74798	3	-0,86603	0,67082
-1,02938	0,70122	4	-1,03923	0,56569
-1,16296	0,66898	5	-1,15470	0,48795
-1,26721	0,64492	6	-1,23718	0,42857
-1,35218	0,62603	7	-1,29904	0,38188
-1,42360	0,61065	8	-1,34715	0,34427
-1,48501	0,59779	9	-1,38564	0,31334
-1,53875	0,58681	10	-1,41713	0,28748
Розподіл Лапласа		n	Арксинусоїдний розподіл	
$m_{01}$	$\sigma_{01}$		$m_{01}$	$\sigma_{01}$
-0,79550	0,84111	3	-0,85974	0,64252
-0,97964	0,84904	4	-1,02260	0,50819
-1,12327	0,85739	5	-1,12360	0,40882
-1,24186	0,86428	6	-1,19036	0,33460
-1,34313	0,86972	7	-1,23670	0,27820
-1,43162	0,87403	8	-1,27012	0,23455
-1,51023	0,87748	9	-1,29499	0,20019
-1,58095	0,88030	10	-1,31398	0,17271
Розподіл Коші		n		
$m_{01}$	$\sigma_{01}$		$m_{01}$	$\sigma_{01}$
-1,60218	2,11374	3		
-1,94208	2,20644	4		
-2,18491	2,29652	5		
-2,36596	2,37918	6		
-2,50288	2,45533	7		
-2,60631	2,52612	8		
-2,68339	2,59226	9		
-2,73926	2,65420	10		

Таблиця В.2 – Результати досліджень за ММК  
параметрів нормованого відхилення для мінімального спостереження

<b>Нормальний розподіл</b>				
<b>n</b>	<b>m<sub>z1</sub></b>	<b>s<sub>z1</sub></b>	<b>min<sub>z1</sub></b>	<b>max<sub>z1</sub></b>
3	-0,9543	0,1751	-1,1547	-0,5774
4	-1,1183	0,2302	-1,5000	-0,5030
5	-1,2376	0,2636	-1,7888	-0,4638
6	-1,3305	0,2846	-2,0384	-0,4494
7	-1,4083	0,3016	-2,2599	-0,4773
8	-1,4756	0,3135	-2,4529	-0,4891
9	-1,5313	0,3227	-2,6294	-0,5222
10	-1,5838	0,3319	-2,7563	-0,5923
<b>Рівномірний розподіл</b>				
<b>n</b>	<b>m<sub>z1</sub></b>	<b>s<sub>z1</sub></b>	<b>min<sub>z1</sub></b>	<b>max<sub>z1</sub></b>
3	-0,9509	0,1813	-1,1547	-0,5774
4	-1,1045	0,2345	-1,5000	-0,5042
5	-1,2080	0,2619	-1,7888	-0,4653
6	-1,2824	0,2753	-2,0379	-0,4568
7	-1,3395	0,2827	-2,2554	-0,4783
8	-1,3854	0,2844	-2,4470	-0,4857
9	-1,4202	0,2837	-2,6077	-0,6038
10	-1,4504	0,2820	-2,6910	-0,6175
<b>Розподіл Лапласа</b>				
<b>n</b>	<b>m<sub>z1</sub></b>	<b>s<sub>z1</sub></b>	<b>min<sub>z1</sub></b>	<b>max<sub>z1</sub></b>
3	-0,9530	0,1776	-1,1547	-0,5774
4	-1,1207	0,2454	-1,5000	-0,5018
5	-1,2488	0,2942	-1,7888	-0,4585
6	-1,3530	0,3306	-2,0391	-0,4297
7	-1,4439	0,3620	-2,2649	-0,4620
8	-1,5259	0,3872	-2,4688	-0,4469
9	-1,5960	0,4079	-2,6500	-0,4417
10	-1,6639	0,4290	-2,8333	-0,4999
<b>Арксинусоїдний розподіл</b>				
<b>n</b>	<b>m<sub>z1</sub></b>	<b>s<sub>z1</sub></b>	<b>min<sub>z1</sub></b>	<b>max<sub>z1</sub></b>
3	-0,9433	0,1949	-1,1547	-0,5774
4	-1,0811	0,2585	-1,5000	-0,5004
5	-1,1714	0,2912	-1,7888	-0,4490
6	-1,2302	0,3067	-2,0407	-0,4103
7	-1,2742	0,3159	-2,2663	-0,4126
8	-1,3041	0,3165	-2,4683	-0,4436
9	-1,3244	0,3127	-2,6444	-0,4339
10	-1,3415	0,3077	-2,7814	-0,4950
<b>Розподіл Коші</b>				
<b>n</b>	<b>m<sub>z1</sub></b>	<b>s<sub>z1</sub></b>	<b>min<sub>z1</sub></b>	<b>max<sub>z1</sub></b>
3	-0,9431	0,1951	-1,1547	-0,5774
4	-1,1066	0,3031	-1,5000	-0,5000
5	-1,2379	0,3959	-1,7889	-0,4472
6	-1,3489	0,4777	-2,0412	-0,4083
7	-1,4502	0,5543	-2,2678	-0,3780
8	-1,5472	0,6223	-2,4749	-0,3536
9	-1,6329	0,6843	-2,6667	-0,3334
10	-1,7217	0,7469	-2,8460	-0,3163

Таблиця В.3 – Експериментальні (за ММК) значення контрексцесу  $k_{z1}$   
для різних розподілів  $n = 3, \dots, 10$

	Нормальний розподіл	Рівномірний розподіл	Розподіл Лапласа	Арксинусоїдний розподіл	Розподіл Коші
<b>n</b>	<b><math>k_{z1}</math></b>				
<b>3</b>	0,7018	0,7205	0,7100	0,7518	0,7527
<b>4</b>	0,6859	0,6914	0,6999	0,7069	0,7368
<b>5</b>	0,6638	0,6524	0,6857	0,6556	0,7327
<b>6</b>	0,6452	0,6179	0,6742	0,6079	0,7329
<b>7</b>	0,6297	0,5899	0,6645	0,5736	0,7373
<b>8</b>	0,6156	0,5672	0,6540	0,5481	0,7368
<b>9</b>	0,6039	0,5484	0,6443	0,5257	0,7376
<b>10</b>	0,5974	0,5414	0,6396	0,5154	0,7417



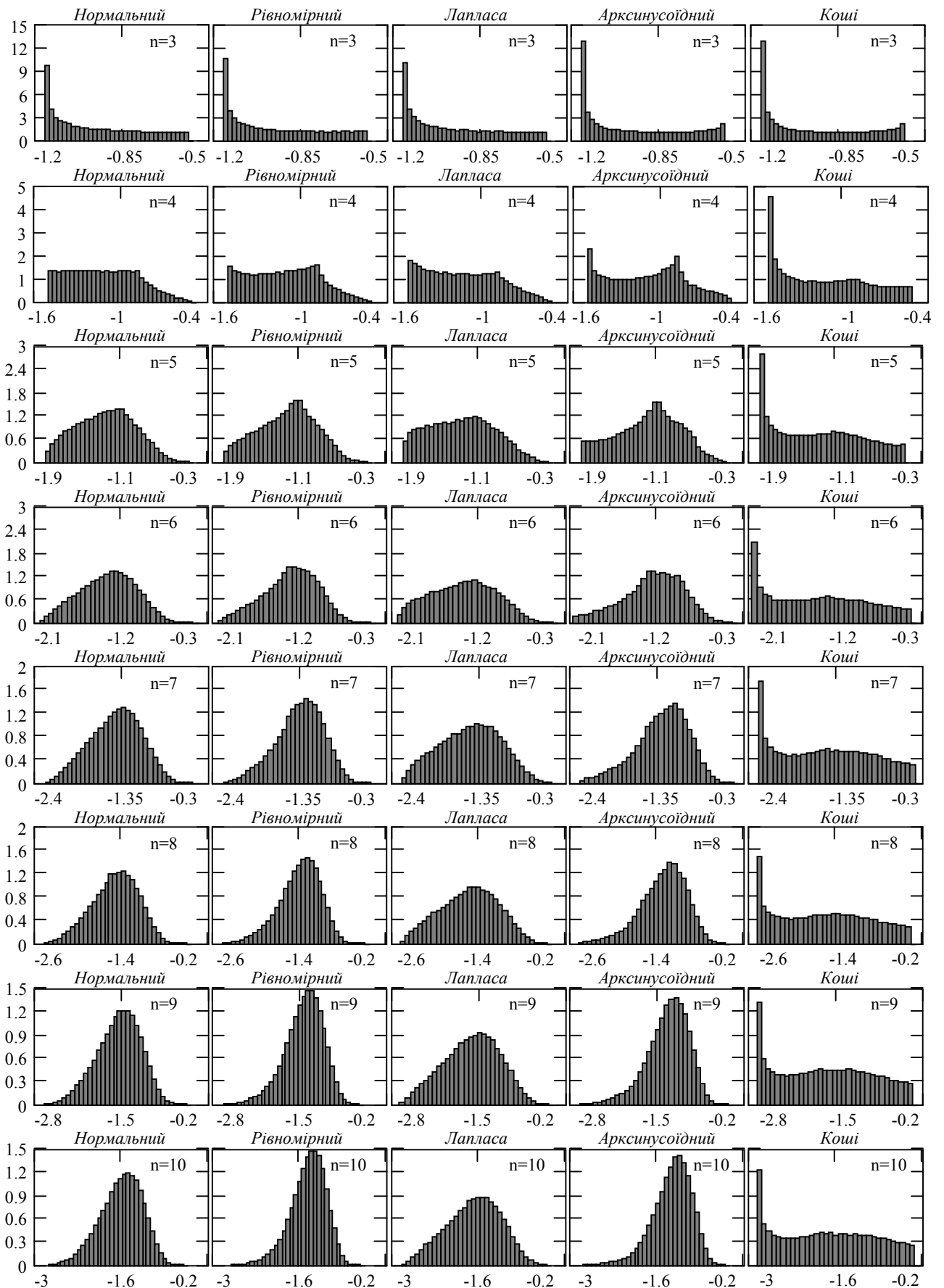


Рисунок В.1 – Гістограми розподілу нормованого відхилення  $z_{1,j}$  мінімального спостереження  $x_l$  при різних розподілах для  $n = 3, \dots, 10$

Таблиця В.4 – Результати досліджень (за ММК) коефіцієнта  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  для обчислення нижньої границі  $z_{1,1,\text{low}}(n, p)$  при односторонній ймовірності при різних розподілах, для рівня довіри  $p = 0,90; \dots; 0,99$  та  $n = 3, \dots, 10$

Нормальний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,\text{low}}(3, p)$	-1,1485	-1,1513	-1,1532	-1,1543	-1,1546
$z_{1,1,\text{low}}(4, p)$	-1,4252	-1,4439	-1,4625	-1,4809	-1,4925
$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6020	-1,6338	-1,6718	-1,7166	-1,7498
$z_{1,1,\text{low}}(6, p)$	-1,7271	-1,7690	-1,8211	-1,8848	-1,9444
$z_{1,1,\text{low}}(7, p)$	-1,8281	-1,8779	-1,9386	-2,0195	-2,0980
$z_{1,1,\text{low}}(8, p)$	-1,9078	-1,9628	-2,0333	-2,1289	-2,2207
$z_{1,1,\text{low}}(9, p)$	-1,9772	-2,0372	-2,1120	-2,2170	-2,3252
$z_{1,1,\text{low}}(10, p)$	-2,0387	-2,1012	-2,1780	-2,2931	-2,4120
Рівномірний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,\text{low}}(3, p)$	-1,1500	-1,1521	-1,1536	-1,1544	-1,1547
$z_{1,1,\text{low}}(4, p)$	-1,4283	-1,4477	-1,4664	-1,4842	-1,4941
$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,5824	-1,6212	-1,6647	-1,7138	-1,7506
$z_{1,1,\text{low}}(6, p)$	-1,6736	-1,7263	-1,7842	-1,8627	-1,9334
$z_{1,1,\text{low}}(7, p)$	-1,7314	-1,7879	-1,8606	-1,9613	-2,0598
$z_{1,1,\text{low}}(8, p)$	-1,7720	-1,8316	-1,9085	-2,0296	-2,1431
$z_{1,1,\text{low}}(9, p)$	-1,7984	-1,8585	-1,9397	-2,0649	-2,2114
$z_{1,1,\text{low}}(10, p)$	-1,8243	-1,8837	-1,9661	-2,0893	-2,2362
Розподіл Лапласа					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,\text{low}}(3, p)$	-1,1491	-1,1516	-1,1533	-1,1544	-1,1546
$z_{1,1,\text{low}}(4, p)$	-1,4420	-1,4577	-1,4726	-1,4867	-1,4948
$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6528	-1,6814	-1,7127	-1,7450	-1,7670
$z_{1,1,\text{low}}(6, p)$	-1,8148	-1,8558	-1,8997	-1,9510	-1,9897
$z_{1,1,\text{low}}(7, p)$	-1,9542	-2,0048	-2,0607	-2,1275	-2,1819
$z_{1,1,\text{low}}(8, p)$	-2,0682	-2,1261	-2,1950	-2,2794	-2,3504
$z_{1,1,\text{low}}(9, p)$	-2,1704	-2,2358	-2,3146	-2,4121	-2,4967
$z_{1,1,\text{low}}(10, p)$	-2,2679	-2,3376	-2,4221	-2,5284	-2,6272
Арксинусоїдний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,\text{low}}(3, p)$	-1,1526	-1,1537	-1,1543	-1,1546	-1,1547
$z_{1,1,\text{low}}(4, p)$	-1,4481	-1,4661	-1,4814	-1,4932	-1,4982
$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,6038	-1,6501	-1,6968	-1,7433	-1,7713
$z_{1,1,\text{low}}(6, p)$	-1,6727	-1,7360	-1,8103	-1,9049	-1,9785
$z_{1,1,\text{low}}(7, p)$	-1,7151	-1,7858	-1,8766	-2,0011	-2,1179
$z_{1,1,\text{low}}(8, p)$	-1,7265	-1,7967	-1,8950	-2,0413	-2,1984
$z_{1,1,\text{low}}(9, p)$	-1,7377	-1,8049	-1,9016	-2,0533	-2,2334
$z_{1,1,\text{low}}(10, p)$	-1,7531	-1,8175	-1,9064	-2,0608	-2,2485
Розподіл Коші					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$z_{1,1,\text{low}}(3, p)$	-1,1526	-1,1537	-1,1543	-1,1546	-1,1547
$z_{1,1,\text{low}}(4, p)$	-1,4838	-1,4910	-1,4960	-1,4990	-1,4998
$z_{1,1,\text{low}}(5, p)$	-1,7577	-1,7714	-1,7812	-1,7869	-1,7885
$z_{1,1,\text{low}}(6, p)$	-1,9938	-2,0140	-2,0292	-2,0382	-2,0408
$z_{1,1,\text{low}}(7, p)$	-2,2095	-2,2347	-2,2535	-2,2641	-2,2671
$z_{1,1,\text{low}}(8, p)$	-2,4046	-2,4345	-2,4565	-2,4703	-2,4742
$z_{1,1,\text{low}}(9, p)$	-2,5854	-2,6202	-2,6461	-2,6616	-2,6658
$z_{1,1,\text{low}}(10, p)$	-2,7603	-2,7967	-2,8240	-2,8403	-2,8451

Таблиця В.5 – Результати досліджень коефіцієнта розширення  $k_{1,\text{low}}(n, p)$ 

для нижньої границі при односторонній ймовірності

відхилення  $z_{l,j}$  найменшого результату(для  $z_{n,j}$  значення  $k_{1,\text{high}}(n, p)$  мають протилежний знак)

Нормальний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$k_{1,\text{low}}(3, p)$	-0,2596	-0,2633	-0,2659	-0,2674	-0,2678
$k_{1,\text{low}}(4, p)$	-0,4377	-0,4643	-0,4909	-0,5171	-0,5337
$k_{1,\text{low}}(5, p)$	-0,5447	-0,5922	-0,6489	-0,7159	-0,7656
$k_{1,\text{low}}(6, p)$	-0,6149	-0,6798	-0,7606	-0,8594	-0,9518
$k_{1,\text{low}}(7, p)$	-0,6706	-0,7503	-0,8471	-0,9765	-1,1017
$k_{1,\text{low}}(8, p)$	-0,7079	-0,7979	-0,9133	-1,0699	-1,2202
$k_{1,\text{low}}(9, p)$	-0,7459	-0,8462	-0,9714	-1,1469	-1,3280
$k_{1,\text{low}}(10, p)$	-0,7753	-0,8817	-1,0126	-1,2088	-1,4114
Рівномірний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$k_{1,\text{low}}(3, p)$	-0,2969	-0,3000	-0,3022	-0,3035	-0,3038
$k_{1,\text{low}}(4, p)$	-0,5722	-0,6067	-0,6396	-0,6711	-0,6886
$k_{1,\text{low}}(5, p)$	-0,7674	-0,8469	-0,9361	-1,0367	-1,1121
$k_{1,\text{low}}(6, p)$	-0,9128	-1,0358	-1,1707	-1,3539	-1,5190
$k_{1,\text{low}}(7, p)$	-1,0264	-1,1743	-1,3646	-1,6282	-1,8863
$k_{1,\text{low}}(8, p)$	-1,1229	-1,2961	-1,5194	-1,8712	-2,2010
$k_{1,\text{low}}(9, p)$	-1,2069	-1,3986	-1,6580	-2,0575	-2,5251
$k_{1,\text{low}}(10, p)$	-1,3008	-1,5075	-1,7939	-2,2224	-2,7335
Розподіл Лапласа					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$k_{1,\text{low}}(3, p)$	-0,2331	-0,2361	-0,2382	-0,2394	-0,2397
$k_{1,\text{low}}(4, p)$	-0,3784	-0,3970	-0,4145	-0,4311	-0,4406
$k_{1,\text{low}}(5, p)$	-0,4711	-0,5045	-0,5410	-0,5786	-0,6043
$k_{1,\text{low}}(6, p)$	-0,5343	-0,5817	-0,6325	-0,6919	-0,7367
$k_{1,\text{low}}(7, p)$	-0,5868	-0,6449	-0,7092	-0,7860	-0,8486
$k_{1,\text{low}}(8, p)$	-0,6205	-0,6868	-0,7656	-0,8622	-0,9434
$k_{1,\text{low}}(9, p)$	-0,6547	-0,7291	-0,8190	-0,9301	-1,0265
$k_{1,\text{low}}(10, p)$	-0,6861	-0,7653	-0,8613	-0,9820	-1,0943
Арксинусоїдний розподіл					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$k_{1,\text{low}}(3, p)$	-0,3258	-0,3275	-0,3285	-0,3289	-0,3290
$k_{1,\text{low}}(4, p)$	-0,7222	-0,7575	-0,7876	-0,8110	-0,8208
$k_{1,\text{low}}(5, p)$	-1,0577	-1,1710	-1,2852	-1,3990	-1,4676
$k_{1,\text{low}}(6, p)$	-1,3223	-1,5117	-1,7336	-2,0162	-2,2362
$k_{1,\text{low}}(7, p)$	-1,5846	-1,8390	-2,1652	-2,6128	-3,0327
$k_{1,\text{low}}(8, p)$	-1,8010	-2,1004	-2,5192	-3,1430	-3,8130
$k_{1,\text{low}}(9, p)$	-2,0643	-2,4000	-2,8829	-3,6409	-4,5406
$k_{1,\text{low}}(10, p)$	-2,3830	-2,7559	-3,2706	-4,1647	-5,2514
Розподіл Коші					
	$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
$k_{1,\text{low}}(3, p)$	-0,0991	-0,0996	-0,0999	-0,1001	-0,1001
$k_{1,\text{low}}(4, p)$	-0,1710	-0,1742	-0,1765	-0,1779	-0,1782
$k_{1,\text{low}}(5, p)$	-0,2263	-0,2323	-0,2366	-0,2391	-0,2398
$k_{1,\text{low}}(6, p)$	-0,2710	-0,2795	-0,2859	-0,2897	-0,2908
$k_{1,\text{low}}(7, p)$	-0,3092	-0,3195	-0,3272	-0,3315	-0,3327
$k_{1,\text{low}}(8, p)$	-0,3394	-0,3512	-0,3599	-0,3654	-0,3669
$k_{1,\text{low}}(9, p)$	-0,3674	-0,3809	-0,3908	-0,3968	-0,3984
$k_{1,\text{low}}(10, p)$	-0,3913	-0,4050	-0,4153	-0,4215	-0,4233

Таблиця В.6 – Значення коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  залежно від  $\sigma_r/\sigma_x$  для  $n = 5, p = 0,90; \dots; 0,99$  та різних комбінацій розподілів спостережень і випадкових зміщень

$\sigma_r/\sigma_x$		$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
		Нормальний - рівномірний				
1/1	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5956	-1,6295	-1,6675	-1,7115	-1,7465
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,6008	-1,6337	-1,6722	-1,7149	-1,7479
1/3	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,6023	-1,6354	-1,6720	-1,7159	-1,7484
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,6018	-1,6343	-1,6710	-1,7157	-1,7498
1/10	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,6033	-1,6363	-1,6712	-1,7157	-1,7499
		Рівномірний - рівномірний				
1/1	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5924	-1,6253	-1,6630	-1,7071	-1,7439
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5885	-1,6241	-1,6638	-1,7093	-1,7443
1/3	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5822	-1,6202	-1,6606	-1,7095	-1,7451
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5849	-1,6221	-1,6652	-1,7131	-1,7494
1/10	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5838	-1,6207	-1,6637	-1,7146	-1,7502
		Рівномірний - нормальний				
1/1	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5942	-1,6291	-1,6675	-1,7118	-1,7459
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5892	-1,6250	-1,6643	-1,7113	-1,7453
1/3	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5819	-1,6184	-1,6607	-1,7090	-1,7477
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5825	-1,6213	-1,6634	-1,7116	-1,7487
1/10	$z_{1,r,1,low}(5, p)$	-1,5812	-1,6193	-1,6634	-1,7126	-1,7489

Таблиця В.7 – Значення відносних похибок  $\delta_{z_{1,u,набл}}$  коефіцієнта розширення  $z_{1,r,1,low}(n, p)$  залежно від  $\sigma_r/\sigma_x$  для  $n = 5$  та різних комбінацій розподілів і випадкових зміщень, при  $p = 0,90; \dots; 0,99$

$\sigma_r/\sigma_x$		$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
		Нормальний - рівномірний				
1/1	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,04	0,01	0,04	0,03	0,02
1/3	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,04	0,03	0,04	0,04	0,03
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,04	0,04	0,06	0,08	0,06
1/10	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,23	0,44	0,37	0,35	0,28
		Рівномірний - рівномірний				
1/1	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,40	0,56	0,84	0,78	0,88
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,38	1,21	1,03	1,07	0,84
1/3	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,48	1,01	1,59	0,94	1,18
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,95	0,91	0,38	0,68	0,76
1/10	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,40	0,66	0,56	0,51	0,47
		Рівномірний - нормальний				
1/1	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,22	0,67	1,65	0,76	1,01
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,19	1,51	1,11	1,21	1,04
1/3	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	1,00	0,86	0,79	0,58	0,93
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,70	0,81	0,99	0,76	0,87
1/10	$\delta_{z_{1,u,набл}}(5, p)$	0,27	0,59	0,57	0,21	0,26

Таблиця В.8 – Значення коефіцієнтів довірчих границь  $z_{1,s,1,low}(n, p)$  залежно від відношення стандартних відхилень  $\sigma_y/\sigma_x$  та для різних комбінацій розподілів спостережень і систематичних зміщень,  
 $n = 5, p = 0,90; \dots; 0,99$

$\sigma_y/\sigma_x$		$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
		Нормальний - рівномірний				
1/1	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,6339	-2,7363	-2,8564	-3,0195	-3,1747
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,0843	-2,1621	-2,2573	-2,3873	-2,5114
1/3	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,8027	-1,8648	-1,9407	-2,0445	-2,1438
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,6711	-1,7207	-1,7813	-1,8644	-1,9438
1/10	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,6159	-1,6538	-1,7002	-1,7639	-1,8249
		Нормальний - нормальний				
1/1	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,563	-2,726	-2,938	-3,264	-3,642
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,051	-2,151	-2,281	-2,479	-2,709
1/3	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,785	-1,851	-1,936	-2,064	-2,211
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,665	-1,713	-1,773	-1,861	-1,959
1/10	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,616	-1,654	-1,698	-1,76	-1,823
		Рівномірний - рівномірний				
1/1	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,602	-2,704	-2,822	-2,988	-3,154
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,048	-2,125	-2,223	-2,360	-2,494
1/3	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,767	-1,832	-1,912	-2,025	-2,133
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,641	-1,694	-1,761	-1,851	-1,936
1/10	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,595	-1,636	-1,686	-1,755	-1,822
		Рівномірний - нормальний				
1/1	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,534	-2,697	-2,910	-3,236	-3,612
$1/\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-2,022	-2,123	-2,254	-2,453	-2,684
1/3	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,757	-1,825	-1,911	-2,042	-2,193
$1/3\sqrt{3}$	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,640	-1,690	-1,754	-1,847	-1,948
1/10	$z_{1,s,1,low}(5, p)$	-1,596	-1,637	-1,686	-1,753	-1,819

Таблиця В.9 – Значення відносних похибок  $\delta_{z_{и,набл.}}$  коефіцієнта розширення
 $z_{1,s,1,low}(n, p)$  залежно від відношення стандартних відхилень  $\sigma_s/\sigma_x$  та

для різних комбінацій розподілів і систематичних зміщень

$$n = 5, p = 0,90; \dots; 0,99$$

$\sigma_s/\sigma_x$		$p = 0,90$	$p = 0,925$	$p = 0,95$	$p = 0,975$	$p = 0,99$
		Нормальний - рівномірний				
1/1	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	21,614	19,475	17,028	13,595	10,177
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	8,670	6,918	4,714	1,595	-1,516
1/3	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	2,589	1,216	-0,553	-3,140	-5,800
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	1,025	0,135	-1,094	-3,038	-5,160
1/10	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	0,591	0,311	-0,230	-1,325	-2,738
		Нормальний - нормальний				
1/1	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	24,979	19,927	13,778	5,086	-3,959
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	10,434	7,470	3,626	-2,163	-8,700
1/3	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	3,606	1,970	-0,312	-4,055	-8,663
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	1,395	0,585	-0,631	-2,860	-5,896
1/10	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	0,585	0,299	-0,101	-1,106	-2,636
		Рівномірний - рівномірний				
1/1	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	23,105	20,902	18,455	14,793	10,900
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	10,596	8,785	6,330	2,770	-0,829
1/3	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	4,661	3,028	0,940	-2,207	-5,323
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	2,878	1,713	0,046	-2,336	-4,778
1/10	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	1,909	1,402	0,610	-0,824	-2,583
		Рівномірний - нормальний				
1/1	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	26,409	21,216	14,873	5,995	-3,162
$1/\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	12,018	8,887	4,868	-1,126	-7,850
1/3	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	5,257	3,423	0,992	-3,021	-7,914
$1/3\sqrt{3}$	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	2,941	1,954	0,445	-2,124	-5,364
1/10	$\delta_{z_{и,набл.}}(\mathbf{5}, p)$	1,845	1,340	0,610	-0,711	-2,422

## Додаток Г

**Результати виконаних обчислень удосконаленим методом  
порядкових статистик для плоско-нормального розподілу спостережень**

Таблиця Г.1 – Характеристики стандартної непевності та похибки  
параметра розташування  $\hat{\mu}$  та ширини  $\hat{\sigma}$  за ММК

b	Значення параметра розташування			Значення параметра ширини		
	$\overline{u}_A(\hat{\mu})$	$\sigma_x/\sqrt{n}$	$s_{\Delta_{\hat{\mu}}}$	$\overline{u}_A(\hat{\sigma})$	$\sigma_x/\sqrt{n}$	$s_{\Delta_{\hat{\sigma}}}$
Кількість значень n = 21						
0,1	0,01361	0,02182	0,01602	0,00910	0,01543	0,00797
0,4219	0,01702		0,02045	0,01157		0,01224
0,7722	0,01916		0,02232	0,01356		0,01500
1,295	0,02028		0,02308	0,01494		0,01668
2,370	0,02068		0,02318	0,01529		0,01732
20	0,02081		0,02322	0,01540		0,01745
Кількість значень n = 31						
0,1	0,01090	0,01796	0,01258	0,00719	0,01270	0,00620
0,4219	0,01597		0,01649	0,01166		0,00975
0,7722	0,01722		0,01804	0,01264		0,01195
1,295	0,01758		0,01846	0,01274		0,01326
2,370	0,01781		0,01849	0,01296		0,01379
20	0,01784		0,01844	0,01299		0,01386
Кількість значень n = 41						
0,1	0,00936	0,01562	0,01050	0,00612	0,01104	0,00533
0,4219	0,01449		0,01416	0,01051		0,00832
0,7722	0,01531		0,01555	0,01111		0,01021
1,295	0,01558		0,01581	0,01118		0,01136
2,370	0,01575		0,01580	0,01134		0,01183
20	0,01579		0,01585	0,01138		0,01189
Кількість значень n = 51						
0,1	0,00831	0,01400	0,00920	0,00539	0,00990	0,00479
0,4219	0,01217		0,01254	0,00784		0,00737
0,7722	0,01335		0,01389	0,00908		0,00907
1,295	0,01409		0,01407	0,01003		0,01006
2,370	0,01419		0,01408	0,01014		0,01046
20	0,01423		0,01410	0,01018		0,01057

**Додаток Д**  
**Експериментальні дослідження пластмасових труб**

Таблиця Д.1 – Характеристики засобів вимірювальної техніки [25]

Позначення	Свідоцтво про державну повірку калібрування	Допустима похибка $\Delta(\delta)$ вимірювань, розширена непевність $U_p$ ( $k=2$ )
Штангенциркуль зав. № 310145		
ШЦ -1 0,02 - 150 мм	№ UA 0204 № 23426 до 08.10.2014 р.	$U_p = \pm 0,02$ мм при вимірюванні зовнішніх лінійних розмірів
Гігрометр психрометричний зав. № ВІТ-1 Л100		
ВІТ-1 0 до +25°C СКВ = $\pm(0,03; 0,03; 0,02)$ °C СКВ = $\pm(0,02; 0,02; 0,01)$ °C	№ UA 02 02 790 до 01.10.2015 р.	$\Delta = \pm 0,2$ °C $\delta = \pm 6$ % (по сухому і вологому термометру)
Мікрометр МТ-25 зав. № В42400		
Межі вимірювання: від 0,01 до 25 мм точність відліку 0,01 мм	Межі вимірювання: від 0,01 до 25 мм точність відліку 0,01 мм	Межі вимірювання: від 0,01 до 25 мм точність відліку 0,01 мм
Машина розривна Z010 зав. № 13899698 Німеччина «Zwick/Roell»		
Діапазон вимірювання сил: від 0...10 кН; $\delta_{F,гр} = \pm 1$ % Діапазон вимірювання переміщення траверси: від 0,1 до 1060 мм; $\Delta = \pm 1$ мм Діапазон вимірювання швидкості переміщення траверси: від 0,1 до 1000 мм/хв	Свідоцтво про повірку № 5735 від 08.10.2013 р (згідно з даними виробника)	$\delta = \pm 1$ % від значення сили Переміщення траверси: $\Delta = \pm 1$ мм