

ВСТУП

Актуальність теми досліджень.

Фундаментальні дослідження Лапласа, Лежандра і Гаусса в теорії Ньютонового потенціалу є класичним представленням гравітаційного потенціалу небесних тіл із записом у вигляді нескінчених рядів кульових функцій. Цей запис має міждисциплінарне значення при вивченні статичних і залежних від часу полів Землі і планет. Така параметризація гравітаційного потенціалу вважається стандартною та однією з найкращих для розв'язання сучасних наукових і прикладних задач небесної механіки, супутникової геодезії, глобальної геодинаміки тощо.

Сучасний стрімкий розвиток геодезії характерний використанням різноманітних вимірів з підвищенням їх точності, що впливає на визначення фігури та гравітаційного поля Землі на якіснішому рівні. За визначенням, гравітаційне поле Землі відображає розподіл мас і перенесення їх як всередині, так і на поверхні Землі.

З 2000-го до 2009-й років запущено супутники CHAMP, GRACE та GOCE, які відносяться до категорії супутників LEO (Low Earth Orbit), з висотою орбіти, яка не перевищує 500 км. Дані з цих супутників значно уточнили та розширили відомості про магнітне та гравітаційне поле Землі.

Моделювання магнітного поля Землі потребує щільних та однорідних вимірів. Це не можна досягнути лише на основі наземних даних, саме тому дані з супутників CHAMP та GRACE, які покривають всю планету, дозволяють використати нові методи для розв'язання основної задачі геодезії.

Останніми досягненнями науки у сфері супутникової геодезії є проект Європейського космічного агентства (ESA) - супутник GOCE, який використовує метод супутникової градієнтометрії, який ґрунтується на засадах гравітаційного варіометра Етвеша.

За супутниковими спостереженнями можна впевнено визначати тільки низькочастотну складову геопотенціальних коефіцієнтів. Аномалії сили тяжіння та дані супутникової альтиметрії на морях та океанах мають вищу

просторову роздільну здатність. Середні аномалії сили тяжіння, які отримані з наземних спостережень та даних супутникової альтиметрії на океанах, використовують для визначення геопотенціальних моделей високого степеня.

Питанням розв'язання задачі побудови гармонічних коефіцієнтів розкладу геопотенціалу присвячена значна кількість наукових праць зарубіжних та вітчизняних авторів, вагомий внесок для вирішення цього питання зробили такі відомі вчені Moritz H., Koch K.-R., Rapp R., Lerch F.J., Balmino G., Wenzel H.-G., Eicker A., Mayer-Gürr T., Brockman E., Ries J., Руденко С., Зазуляк П., Марченко О та інші.

Актуальною задачею суттєвого покращення низькочастотної та середньочастотної складових гравітаційного поля є вибір алгоритму, за яким визначають гармонічні коефіцієнти геопотенціалу.

В даній роботі реалізовано другий метод Неймана, який ґрунтується на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра для побудови моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії.

Побудовані моделі апробовано в рамках розв'язання основної задачі геодезії на акваторіях Чорного моря через використання даних супутникової альтиметрії, а саме визначення стаціонарної топографії Світового океану відносно геоїда.

Таким чином, поставлена у дисертації мета “Побудова моделей гравітаційного поля Землі за супутниковими даними” має міждисциплінарний характер для задач супутникової геодезії і глобальної геодинаміки. Оскільки поставлені і розв'язані задачі є суттєвим доповненням зазначених вище класичних досліджень, що свідчить про актуальність теми дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами:

Виконана робота відповідає науковому напряму кафедри вищої геодезії та астрономії «Моніторинг фізичної поверхні Землі та її атмосфери на основі аналізу результатів сучасних наземних і супутникових вимірювань». Розробки автора використовувались в рамках науково-дослідної роботи Національного

університету «Львівська політехніка»: «Комплексна геодинамічна модель гравітаційного поля і деформацій земної кори регіону Чорного моря за супутниковими даними», («Геоїд»), (заклучний), номер держреєстрації 0111U001213.

Мета і задачі дослідження:

Дана робота спрямована на вдосконалення існуючих методів побудови моделей гравітаційного поля Землі за супутниковими даними. За останнє десятиліття стрімкого розвитку набули супутникові місії (і не тільки земні). До них можна віднести значну кількість альтиметричних супутників, супутники класу LEO (Low Earth Orbit) (зокрема місія GOCE), загальноземні навігаційні супутникові системи та безліч космічних місій, запущених з метою вивчення гравітаційних полів інших космічних об'єктів. Всі ці проекти дають можливість велику кількість даних. Саме з цієї причини основною задачею роботи є розробка алгоритму, який дозволить ефективніше використовувати наявні масиви різнорідних даних для побудови моделей гравітаційного поля Землі. Для досягнення ефективного результату в роботі використано дані супутникової градієнтометрії та набір даних супутникової альтиметрії, що дає змогу отримати якісніший розв'язок.

Отже, в роботі поставлено такі ***основні завдання:***

- виконати аналіз різних методів побудови моделей гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії;
- вдосконалити метод побудови моделей гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії, який базуються на квадратурних формулах;
- здійснити побудову моделей гравітаційного поля Землі за розробленою методикою.

Об'єкт дослідження: гравітаційне поле Землі.

Предмет дослідження: моделювання гравітаційного поля Землі.

Методи дослідження: з метою побудови моделей гравітаційного поля Землі в роботі запропоновано методику використання другого методу Неймана, яка базується на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра.

Структурно робота складається з вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У *першому розділі* наведено інформацію про сучасний стан вивчення гравітаційного поля Землі, описано групу супутників, які відносяться до супутників, які літають на низьких висотах. Особливу увагу приділено супутнику GOCE, дані з якого використовуються в цій роботі.

В *другому розділі* показано основні представлення гравітаційного потенціалу, аномальний потенціал та основні геодезичні функціонали. Описано квадратурні формули Driscoll - Healy, Gauss, O.Colombo та будову відповідних їм рівномірних сіток.

Третій розділ повністю присвячений розв'язанню поставленої задачі. Зображено послідовний алгоритм побудови моделі геопотенціалу за даними градієнтометра місії GOCE. А також перевірка побудованих моделей з даними GPS-нівелювання.

В *четвертому розділі* наведено результати апробації побудованих моделей з даними супутникової альтиметрії в межах процедури вилучення-відновлення.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому, що:

- Розроблено методику побудови моделей за даними супутникової градієнтометрії, що базується на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра.
- Побудовано модель гравітаційного поля GOCE-LP01s за даними супутникової градієнтометрії до 220 степеня/порядку відносно нормального поля WGS84 до 10 степеня.
- Побудовано модель гравітаційного поля GOCE-LP02s за даними супутникової градієнтометрії до 250 степеня/порядку відносно нормального поля GOCE-LP01s до 180 степеня.

- Побудовані поля Δg і висот N (з точністю ≤ 10 см) в межах апробації моделей GOCE-LP01s та GOCE-LP02s за даними супутникової альтиметрії для регіону Чорного моря.

- Побудовану модель GOCE-LP02s перевірено з даними GPS-нівелювання з стандартним відхиленням 40 см, що відповідає іншим сучасним розв'язкам, отриманими за даними GOCE.

- Побудовано модель стаціонарної топографії на регіон Чорного моря за різнорідними даними, використовуючи отримані моделі та дані супутникової альтиметрії.

Практичне значення одержаних результатів:

Дана робота спрямована на зменшення часу опрацювання та зменшення необхідних комп'ютерних потужностей під час визначення гармонічних коефіцієнтів, отриманих із великої кількості даних. Максимальна кількість даних для визначення гравітаційного поля Землі обмежена максимальною потужністю комп'ютерних ресурсів. Запропонований алгоритм дає змогу працювати з великою кількістю даних, не використовуючи «супер-комп'ютери», що дало змогу отримати моделі GOCELP-01S з роздільною здатністю до 220 степеня/порядку та GOCELP-02S з роздільною здатністю до 260 степеня/порядку. Складені програмні пакети для розв'язку типових задач можуть бути використані в освітніх та науково-дослідних інституціях, які займаються подібною проблематикою.

Основні положення, що виносяться на захист:

- модель гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії **GOCE-LP01s** до 220 степеня/порядку;

- модель гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії **GOCE-LP02s** до 260 степеня/порядку;

- методика побудови моделей геопотенціалу за даними супутникової градієнтометрії, що базується на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра;

- результати побудови регіональної моделі стаціонарної частини топографії океану SST в регіоні Чорного моря на основі даних альтиметрії за

період з 1992 по 2010 р.р. з використанням моделей **GOCE-LP01s** та **GOCE-LP02s**.

Особистий внесок здобувача. Основні наукові положення, які становлять суть дисертації, були сформульовані та вирішені автором самостійно. Особистий внесок автора полягає у постановці задачі побудови моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії, розроблення методики побудови моделей гравітаційного поля Землі, що базується на квадратурних формулах Гаусса-Лежандра, проведенні робіт з побудови за даними альтиметрії поля висот (квазі)геоїда і поля аномалій сили ваги для акваторій Чорного моря.

Апробація результатів роботи.

1. Результати визначення геодинамічних параметрів за даними супутника GOCE» (XVI Міжнародна науково-технічна конференція "ГЕОФОРУМ-2011", м.Яворів)

2. «Компоненти тензора інерції Землі за даними місії GRACE і GOCE» (XVI міжнародного науково-технічного симпозиуму "Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища: GPS і GIS-технології", 2011, м.Алушта, Крим)

3. «Визначення тензора інерції Землі за даними місії GRACE і GOCE» (IV міжнародна наукова конференція молодих вчених «Геодезія, архітектура та будівництво 2011», м.Львів)

4. «Основні етапи підготовки вихідних даних для побудови топографічної поверхні моря» (науково-ювілейна практична конференція присвячена 140-річчю кафедри Геодезії, м.Львів)

5. XVIII Міжнародний науково-технічний симпозиум «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GNSS і GIS – технології», Марченко О. М., Лопушанський О.М. (2013) Створення моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії (Алушта, Крим)

6. V міжнародна наукова конференція «Геофізичні технології прогнозування та моніторингу геологічного середовища» Марченко О.М., Лопушанський О.М. (2013) Застосування другого методу Неймана для створення моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії, м.Львів

7. 7-ма Міжнародна науково-технічна конференція «Кадастр, фотограмметрія, геоінформатика – сучасні технології та перспективи розвитку» Лопушанський О.М. (2013) Основні співвідношення для визначення гармонічних коефіцієнтів розкладу гравітаційного потенціалу Землі за даними супутника GOCE, м.Львів

8. 18-та Міжнародна науково-практична конференція «ГЕОФОРУМ-2013» Лопушанський О.М. (2013) Побудова гравітаційного поля Землі методом Гаусса (Львів-Яворів)

Стаття у науковому періодичному виданні іншої держави:

1. Lopyshansky A. Recent dynamic ocean topography models and their comparison/ Marchenko A., Tretyak K., Lopyshansky A., Pavliv T.//Infrastructure and ecology of rural areas, No 11– Krakow 2010 - P. 151-158.

Статті у науковому періодичному виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази:

2. Лопушанський О.М. Визначення геоїда, поле сили тяжіння, та топографії Чорного моря за даними супутникової альтиметрії/ Марченко О.М., Лопушанський О.М.// Геодезія, картографія і аерофотознімання, Випуск.81 – Львів 2015 - С. 45-57.

3. Лопушанський О.М., Про побудову моделей гравітаційного поля Землі за даними GOCE/ Марченко О.М., Марченко Д.О., Лопушанський О.М.// Геодезія, картографія і аерофотознімання, Випуск 79 – Львів 2014 - С. 74-81.

Статті у наукових фахових виданнях України:

4. Лопушанський О.М. Застосування другого методу Неймана для створення моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової

градієнтометри/ Марченко О.М., Лопушанський О.М.// Геодинаміка, Випуск 2(15) – Львів 2013- С.7-9.

5. Лопушанський О.М. Основні співвідношення для визначення гармонічних коефіцієнтів розкладу гравітаційного потенціалу Землі за даними супутника GOCE/ Лопушанський О.М.// Геодезія, картографія і аерознімання, Випуск78, - Львів 2013 - С.149-154.

6. Лопушанський О.М. Основні етапи підготовки вихідних даних для побудови топографічної поверхні моря/ Ярема Н.П., Лопушанський О.М., Павлів Т.Р.// Геодезія, картографія і аерофотознімання», Випуск 74- Львів 2011 - С. 60-64.

Матеріали в наукових виданнях, збірниках наукових доповідей конференцій:

7. Лопушанський О.М. Створення моделі гравітаційного поля Землі за даними супутникової градієнтометрії/ Марченко О. М., Лопушанський О.М.// Збірник матеріалів XVIII Міжнародного науково-технічного симпозіуму «Геоінформаційний моніторинг навколишнього середовища GNSS і GIS – технології» - Алушта 2013 - С. 328-330.

8. Лопушанський О.М. Визначення тензора інерції Землі за даними місії GRACE і GOCE/ Лопушанський О.М.// Збірник матеріалів IV міжнародної конференції молодих вчених GAC-2011 – Львів 2011 - С. 200-203.

ВСТУП	1
1 ЗАСТОСУВАННЯ Супутників LEO ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ	12
1.1 Сучасні методи визначення гравітаційного поля Землі	12
1.2 Динамічний метод супутникової геодезії	18
1.2.1 Лінеаризація геодезичних вимірів	23
1.2.2 Побудова системи вараційних рівнянь для визначення необхідних похідних	27
1.3 Особливості місії CHAMP та GRACE.....	32
1.4 Основи методу Етвеша виміру других похідних потенціалу. Аероградієнтометрія.....	36
1.5 Аероградієнтометрія.....	39
1.6 Метод супутникової градієнтометрії.....	43
1.7 Особливості місії GOCE.....	45
1.8 Основні системи координат GOCE	48
1.9 Просторовий підхід визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm}	51
1.10 Підхід часових рядів визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm}.....	53
1.11 Висновки та рекомендації.....	54
2 Методи квадратурних формул для визначення гармонічних коефіцієнтів	56
2.1 Загальні відомості гравітаційного Ньютонового потенціалу. 56	56
2.2 Аномальний потенціал та основні геодезичні функціонали 65	65
2.3 Застосування квадратурних формул на сфері	72
2.4 Квадратурні формули Driscoll - Healy.....	73
2.5 Модифікація квадратурних формул Gauss-Legendre для супутникової градієнтометрії	75
2.6 Квадратурні формули O.Colombo.....	78
2.7 Висновки та рекомендації	79

3	Побудова моделей гравітаційного поля землі за даними GOCE	
81		
3.1	Вихідні дані.....	81
3.2	Бракування даних	82
3.3	Застосування процедури «вилучення – відновлення» для визначення C_{nm}, S_{nm}	85
3.4	Фільтрація за Кальманом для побудови рівномірної сітки Gauss-Legendre.....	86
3.5	Побудова моделі GOCE-LP01s.....	86
3.6	Побудова моделі GOCE-LP02s.....	93
3.7	Перевірка побудованих моделей на даних GPS-нівелювання	99
3.8	Результати застосування різних моделей геопотенціалу для побудови (квазі)геоїда в регіоні New Mexico.....	100
3.9	Висновки та рекомендації	106
4	Застосування побудованих моделей для визначення поверхні (квазі)геоїда та поля Δg на морі.....	108
4.1	Дослідження океанічних течій. Основні положення.....	108
4.2	Основні припливні системи	110
4.3	Основні співвідношення для побудови поля Δg та (квазі)геоїда за даними SSH	112
4.4	Фільтрація вихідних даних	114
4.5	Інверсія висот поверхні моря SSH в аномалії сили тяжіння Δg	115
4.6	Побудова (квазі)геоїда на основі процедури вилучення – відновлення	118
4.7	Побудова статичної моделі SSH _M висот поверхні моря	122
4.8	Висновки та рекомендації	126
	ЗАГАЛЬНІ висновки.....	128
	Список використаної літератури.....	129

АБРИВІАТУРИ

ICGEM - International Centre for Global Earth Models – Міжнародний Центр Глобальних Моделей Землі

ESA - Europe Space Agency- Європейська Космічна Агенція

GOCE - Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer - «дослідник гравітаційного поля й сталих океанських течій»

AGG – Airborne Gravity Gradiometry – Аеробортова гравітаційна градієнтометрія

LEO - Low Earth Orbit – Низько-орбітальні

GGI – Gravity Gradient Instrument – Технологія гравітаційного градієнта

EGG - Electrostatic Gravity Gradiometer – Електростатичний гравітаційний градієнтометр

SGG - Satellite Gravity Gradiometer – Супутниковий гравітаційний градієнтометр

SSH – Sea Surface Height – Висоти поверхні моря

TFS - Tide Free System – Система вільна від припливів

ZFTS - Zero Frequency Tide System – Припливна система нульової частоти

MTS - Mean Tide System – Середня припливна система

GPS - Global Positioning System - Система глобального позиціонування

EGM – Earth Gravitational Model – Гравітаційна модель Землі

WGS – World Geodetic System – Світова Геодезична Система

FFT- Fast Fourier Transform – швидке перетворення Фур'є

NASA - National Aeronautics and Space Administration - Національне управління з авіації і дослідження космічного простору

1 ЗАСТОСУВАННЯ СУПУТНИКІВ LEO ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ

1.1 Сучасні методи визначення гравітаційного поля Землі

Для координації робіт з побудови моделей гравітаційного поля в межах IAG (МАГ) в грудні 2003 р. був створений Міжнародний центр ICGEM моделей глобального гравітаційного поля Землі. Він знаходиться у науково-дослідному центрі м. Потсдам (Німеччина) як підрозділ Міжнародної служби гравітаційного поля Землі (IGFS).

Необхідність існування такого центру пов'язана із суттєвим розвитком запусків спеціальних супутників таких, як CHAMP та GRACE на низьких орбітах з метою вивчення гравітаційного і магнітного полів Землі а також її клімату.

Згідно стандартного представлення зовнішній гравітаційний потенціал V Землі може бути обчисленим за відомою формулою:

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^k \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (1.1)$$

де $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ - повністю нормовані гармонічні коефіцієнти гравітаційного потенціалу Землі; $\bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$ - повністю нормовані приєднані функції Лежандра степені n і порядку m ; GM - добуток гравітаційної сталої на масу прийнятої моделі Землі; a - велика піввісь земного еліпсоїда, до якої віднесені коефіцієнти $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$; k - максимальна степінь розкладу потенціалу V в ряд типу (1.1); (r, φ, λ) - сферичні полярні координати точки, в якій функція V обчислюється.

Аномальний потенціал T гравітаційного поля Землі, висоти (квазі)геоїда і аномалії у вільному повітрі тепер можуть бути вираженими таким розкладом у ряд сферичних гармонік:

$$T = W - U = \sum_{n=0}^k T_n(\varphi, \lambda) \quad (1.2)$$

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^k T_n(\varphi, \lambda) \quad (1.3)$$

$$\Delta g = \sum_{n=0}^k \frac{(n-1)}{r} T_n(\varphi, \lambda) \quad (1.4)$$

$$T_n(\varphi, \lambda) = \frac{GM}{r} \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi) \quad (1.5)$$

де a U – гравітаційний потенціал нормального еліпсоїда; γ - нормальне значення сили ваги на поверхні нормального еліпсоїда; $\bar{\Delta C}_{nm}$ і \bar{S}_{nm} - повністю нормовані гармонічні коефіцієнти аномального потенціалу

$$\bar{\Delta C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \frac{GM_e}{GM} \left(\frac{a_e}{a} \right)^n \bar{C}_{nm}^e \quad (1.6)$$

де \bar{C}_{nm}^e - повністю нормовані гармонічні коефіцієнти потенціалу нормального еліпсоїда ($\bar{S}_{nm}^e \equiv 0$); GM_e та a_e - відповідні константи нормального еліпсоїда, які можуть співпадати з величинами GM і a . Ще раз зазначимо, що традиційно нормальний еліпсоїд вибирається так, щоб його центр співпадав з геоцентром, а маса дорівнювала б масі Землі.

Табл. 1.1 ілюструє найбільш поширені супутникові і комбіновані моделі гармонічних коефіцієнтів геопотенціалу, побудовані з 1991 по 2008р.р. [60] на основі супутникових, гравіметричних та даних супутникової альтиметрії.

Зауважимо, що при побудові наведених у табл. 1.1 моделей, за виключенням моделі OSU91A [43], прийнятими є такі сталі:

для моделей, побудованих в GFZ Potsdam - $GM=398600.4415$ км³/с², $a=6378136.46$ м, епоха фіксації 1997 р.;

для моделей, побудованих іншими центрами обробки $GM=398600.4415$ км³/с², $a=6378136.3$ м, епоха фіксації 1986 р.,

які суттєво відрізняються від GM_e та a_e - найбільш поширених геодезичних референсних систем GRS80 і WGS84 [16].

Отже, і гравітаційний потенціал Землі, і аномальний потенціал T можуть бути представленими поза масами Землі набором сферичних гармонічних коефіцієнтів \bar{C}_{nm} і \bar{S}_{nm} які, фактично, і називаються *моделлю геопотенціалу*.

Глобальні моделі гравітаційного поля, побудовані за даними супутника

GOCE, GRACE, CHAMP

	Модель	Рік	Степінь	Вихідні дані*	Організація
1	GGM05C	2016	360	S(Grace,Goce) G,A	Ries et al, 2016
2	GECO	2015	2190	S(Goce),EGM2008	Gilardoni et al, 2015
3	GGM05G	2015	240	S(Grace,Goce)	Bettadpur et al, 2015
4	GOCO05s	2015	280	S(see model)	Mayer-Gürr, et al. 2015
5	GO_CONS_GCF_2_SPW_ R4	2014	280	S(Goce)	Gatti et al, 2014
6	EIGEN-6C4	2014	2190	S(Goce,Grace,Lageos), G	Förste et al, 2015
7	ITSG-Grace2014s	2014	200	S(Grace)	Mayer-Gürr et al, 2014
8	ITSG-Grace2014k	2014	200	S(Grace)	Mayer-Gürr et al, 2014
9	GO_CONS_GCF_2_TIM_ R5	2014	280	S(Goce)	Brockmann et al, 2014
10	GO_CONS_GCF_2_DIR_R 5	2014	300	S(Goce,Grace,Lageos)	Bruinsma et al, 2013
11	JYY_GOCE04S	2014	230	S(Goce)	Yi et al, 2013
12	GOGRA04S	2014	230	S(Goce,Grace)	Yi et al, 2013
13	EIGEN-6S2	2014	260	S(Goce,Grace,Lageos)	Rudenko et al. 2014
14	GGM05S	2014	180	S(Grace)	Tapley et al, 2013
15	EIGEN-6C3stat	2014	1949	S(Goce,Grace,Lageos), G	Förste et al, 2012
16	GOCE-LP02s	2013	260	S(Goce)	NULP
17	GOCE-LP01s	2013	220	S(Goce)	NULP
18	Tongji-GRACE01	2013	160	S(Grace)	Shen et al, 2013
19	JYY_GOCE02S	2013	230	S(Goce)	Yi et al, 2013
20	GOGRA02S	2013	230	S(Goce,Grace)	Yi et al, 2013
21	ITG-Goce02	2013	240	S(Goce)	Schall et al, 2013
22	GO_CONS_GCF_2_TIM_ R4	2013	250	S(Goce)	Pail et al, 2011
23	GO_CONS_GCF_2_DIR_R 4	2013	260	S(Goce,Grace,Lageos)	Bruinsma et al, 2013

24	EIGEN-6C2	2012	1949	S(Goce,Grace,Lageos), G,A	Förste et al, 2012
25	DGM-1S	2012	250	S(Goce,Grace)	Hashemi Farahani, et al. 2012
26	GOCO03S	2012	250	S(Goce,Grace,...)	Mayer-Gürr, et al. 2012
27	GO_CONS_GCF_2_DIR_R 3	2011	240	S(Goce,Grace,Lageos)	Bruinsma et al, 2010
28	GO_CONS_GCF_2_TIM_ R3	2011	250	S(Goce)	Pail et al, 2011
29	GIF48	2011	360	S(Grace)	Ries te al, 2011
30	EIGEN-6C	2011	1420	S(Goce,Grace,Lageos), G,A	Förste et al, 2011
31	EIGEN-6S	2011	240	S(Goce,Grace,Lageos)	Förste et al, 2011
32	GOCO02S	2011	250	S(Goce,Grace,...)	Goiginger et al, 2011
33	AIUB-GRACE03S	2011	160	S(Grace)	Jäggi et al, 2011
34	GO_CONS_GCF_2_DIR_R 2	2011	240	S(Goce)	Bruinsma et al, 2010
35	GO_CONS_GCF_2_TIM_ R2	2011	250	S(Goce)	Pail et al, 2011
36	GO_CONS_GCF_2_SPW_ R2	2011	240	S(Goce)	Migliaccio et al, 2011
37	GO_CONS_GCF_2_DIR_R 1	2010	240	S(Goce)	Bruinsma et al, 2010
38	GO_CONS_GCF_2_TIM_ R1	2010	224	S(Goce)	Pail et al, 2010a
39	GO_CONS_GCF_2_SPW_ R1	2010	210	S(Goce)	Migliaccio et al, 2010
40	GOCO01S	2010	224	S(Goce,Grace)	Pail et al, 2010b

**Вихідні дані: S -супутникові, G -гравіметричні, A — супутникової альтиметрії.*

Таким чином, рівняння (1.1) є класичним представленням моделі геопотенціалу. На даний час існує три головних джерела для їх визначення:

супутникові спостереження;

точкові та осереднені аномалії сили тяжіння;

дані супутникової альтиметрії (на морях та океанах).

За супутниковими спостереженнями можна впевнено визначати тільки низькочастотну складову геопотенціальних коефіцієнтів (див. табл. 2.1). Аномалії сили ваги та супутникова альтиметрія на морях та океанах мають набагато вищу просторову роздільну здатність [44]. Середні аномалії сили ваги (які отримані з наземних спостережень та даних супутникової альтиметрії на океанах) використовуються для визначення геопотенціальних моделей *високої* степені [103]. У табл. 1.1 представлено моделі геопотенціалу Землі, які характеризуються досить високою роздільною здатністю від 120 до 360 степені.

Прикладом моделі геопотенціалу надвисокої степені є комбінована модель GPM98C до 1800 степені/порядку, для обчислення якої було використано спеціальний алгоритм, заснований на інтегральних формулах [45].

Для побудови моделей геопотенціалу, що були отримані до найбільш поширеного розв'язку EGM96, крім даних гравіметрії та альтиметрії залучали у якості референцних попередні моделі геопотенціалу (GEM9, GEM12, GEMT2, GRIM4C4) [33].

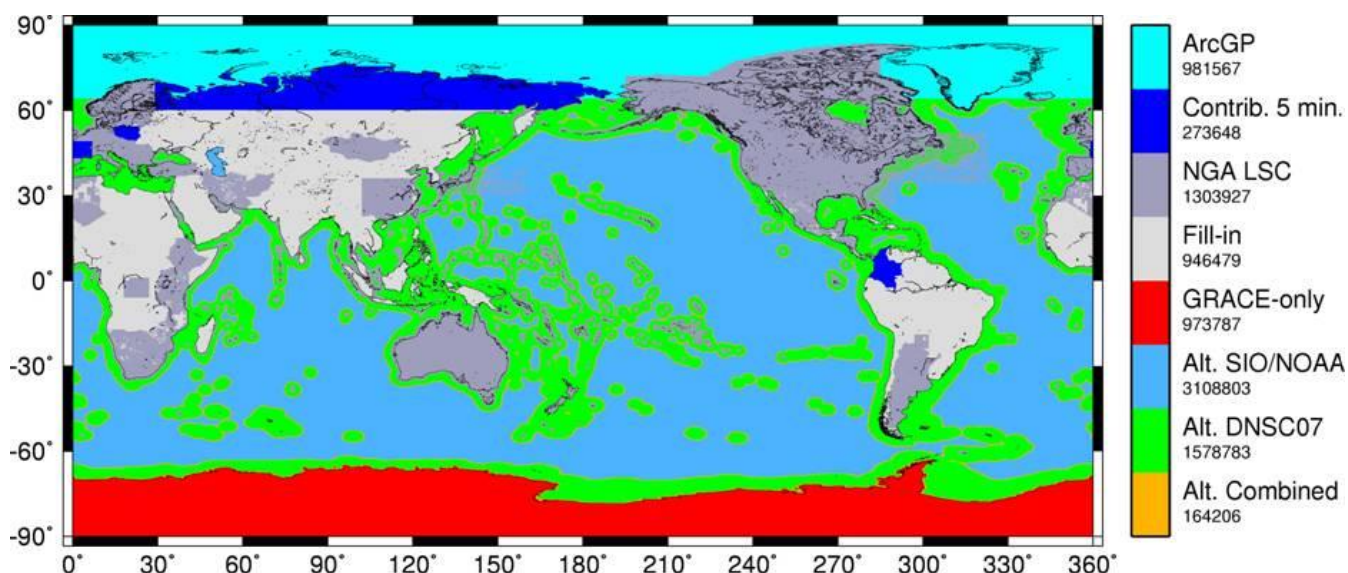


Рис. 1.1. Джерела інформації для побудови EGM2008.

Після EGM96 всі моделі геопотенціалу можна розділити на дві групи:
спутникові - які будувались виключно за даними спостережень як пасивних штучних супутників Землі (ШСЗ), так і низьких активних супутників CHAMP і GRACE;

комбіновані - для побудови яких, крім даних супутникових спостережень, використовувались гравіметричні дані та дані альтиметрії.

Останньою сучасною комбінованою моделлю надвисокої степені є модель EGM2008 [75], яка побудована в Національній геопросторово-розвідувальній агенції США (U.S. National Geospatial-Intelligence Agency (NGA)) командою розробників EGM Development Team. Дана модель гравітаційного поля містить у собі коефіцієнти сферичних гармонік до 2159-го степеня. За основу були взяті значення Δg на сітці 5'x5', які в свою чергу були отримані з прогнозу наземних даних аномалій сили тяжіння на основі моделі PGM2007B [34]. Також незалежно оброблялися дані Δg , отримані з інверсії альтиметричних даних (рис. 1.1). В результаті було отримано нову комбіновану сітку 5'x5' аномалій сили тяжіння в глобальному масштабі.

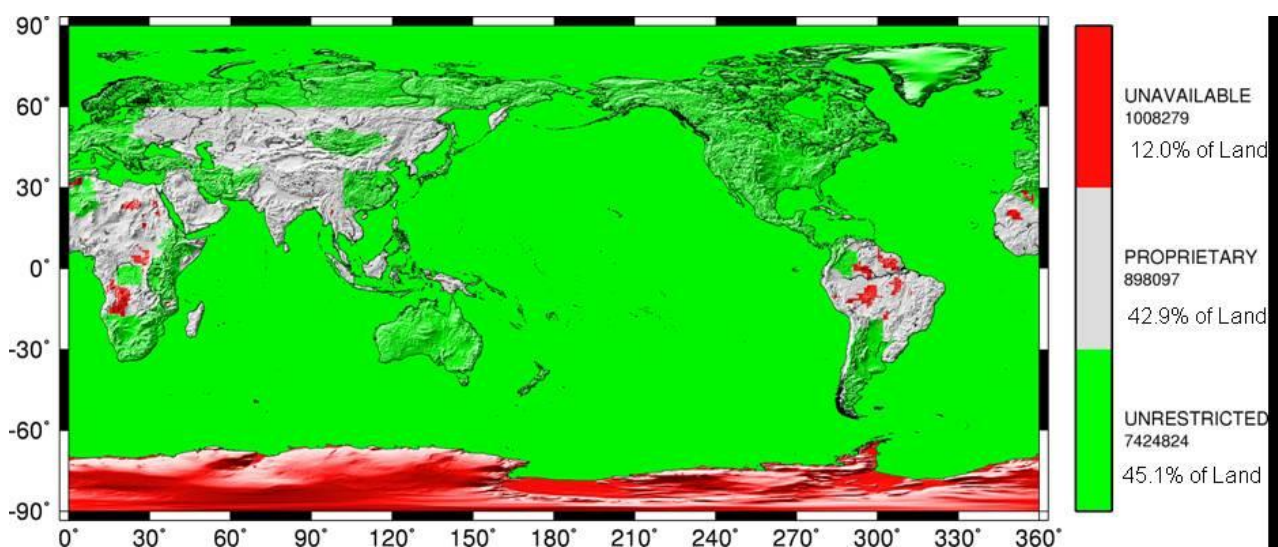


Рис. 1.2. Доступність інформації для побудови EGM2008.

На жаль ця модель, хоч і є останньою і з високим рівнем точності, але вона не придатна до розв'язку завдань, поставлених в роботі. Так з рис. 1.2 видно що регіон Антарктиди залишається не покритий вихідною інформацією.

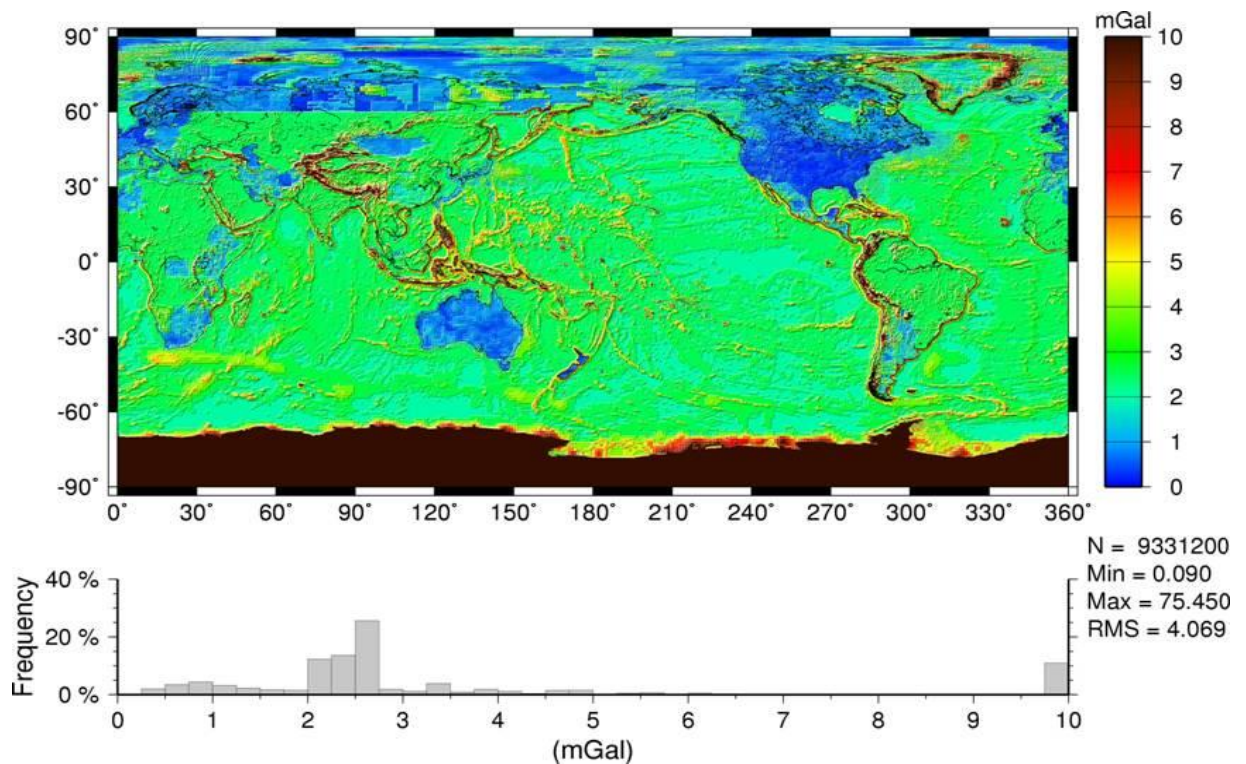


Рис. 1.3. Оцінка точності моделі EGM2008 в глобальному масштабі з відповідним частотним аналізом.

Окрім того, точність цієї моделі в досліджуваному регіоні залишає бажати кращого. Так, коли центральних широтах точність складає порядка 3 мГал, то в регіоні Антарктики вона перевищує 10 мГал, що обумовлено інтерполюванням на регіон з відсутньою інформацією (рис. 1.3).

З-поміж розглянутих моделей гравітаційного поля, що отримані за даними спостережень низьких активних супутників CHAMP і GRACE, було вибрано і використано роботі модель EGIEN-CG01C. Дану модель було застосовано в межах процедури вилучення-відновлення для побудови полів висот (квазі)геоїда та аномалій сили ваги.

1.2 Динамічний метод супутникової геодезії

Нелінійна задача визначення параметрів руху градієнтометра за даними спостережень та її розв'язування методом регуляризації.

Динамічний метод супутникової геодезії – класичний метод для опрацювання супутникових вимірів. Опрацювання широкого спектру різноманітних геодезичних вимірів, які базуються на різних технологіях,

включаючи сучасні супутникові, потребує єдиного підходу до процесу їх лінеаризації. Згідно роботи [65] кожний вимір трактується залежністю від координат однієї або більше точок і гравітаційного поля планети [76]. Проблема визначення гравітаційного поля Землі в глобальному або регіональному масштабах вважається однією з головних задач геодезії. Вона завжди починається з вимірів і параметризації гравітаційного потенціалу V Землі або потенціалу W сили тяжіння планети. Найпростіша модель з обмеженою кількістю чотирьох параметрів (a, f, GM, ω) – це нормальний потенціал U сили тяжіння загальноземного еліпсоїда обертання. Однак, сьогодні ми маємо вже і модель EGM08 (Pavlis et al., 2008) гравітаційного поля Землі, яка містить $(2160+1)^2$ параметрів для максимальної степені $N_{\max} = 2160$ обмеження апроксимуючого ряду кульових функцій, побудованого з комбінації гравіметричних, альтиметричних та супутникових даних. Найбільша деталізація моделі EGM08, яка відповідає $N_{\max} = 2160$ має просторову роздільну здатність $\lambda/2 = 5'$ (λ - половина довжини хвилі) згідно відомого правила

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{180^\circ}{N_{\max}} \quad (1.7)$$

При вивченні гравітаційного поля Землі ми, фактично, маємо справу з операційним та модельним підходами до фізичної геодезії. Згідно з [65] “В модельному підході ставиться питання: як можна найкращим чином визначити модель за відповідними спостереженнями? В операційному підході ставиться інше питання: як можна найкращим чином використати всі спостереження?...Фактично, два ці підходи не суперечать один одному; кожний з них включає в себе важливі аспекти, і два підходи взаємно доповнюють один одного”. Можемо зауважити тут, що найкращі практичні результати застосування операційного підходу були одержані саме тоді, коли використовувалася комбінація операційного та модельного підходів для обробки даних. Наприклад, було доведено [68], що побудова (квазі)геоїда

операційним підходом (середньою квадратичною колокацією) [57] в комбінації з модельним підходом (видалення тренду за допомогою так званої процедури вилучення-відновлення) дає найточніші результати.

Для відповіді на ці питання розглядаються не тільки основні типи геодезичних вимірів, але й їх чутливість до впливу сили тяжіння: астрономічні та гравіметричні спостереження, кутові та лінійні виміри, дані лазерної локації штучних супутників Землі SLR, дані супутникової альтиметрії, дані супутникової градієнтометрії, дані радіоінтерферометрії з наддовгою базою VLBI, GNSS спостереження та ін. Зрозуміло, що цей перелік можна розглядати лише як наближений, як основний, оскільки на практиці маємо значно більший спектр спостережень. Крім того, відповідно до відомих класичних робіт [65], [67], згадаємо, що кожний геодезичний вимір залежить від: 1) від одної або декількох точок в просторі; 2) від гравітаційного поля Землі; 3) від часу t . Залежність від часу дає змогу кожне геодезичне спостереження трактувати або як “геодинамічний вимір”, або як статичний геодезичний вимір, в якій введені необхідні геодинамічні поправки. Ілюстрація чутливості різних вимірів до різних характеристик, пов’язаних з операційним підходом або так званою інтегрованою геодезією згідно якої залежний від часу потенціал сили тяжіння $W(t)$ може бути представленим для біжучої точки з радіусом-вектором $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), Y_1(t), Z_1(t))$, $\mathbf{Y}(t) = (X_2(t), Y_2(t), Z_2(t))$ у такій формі:

$$W[\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t), dm(t)] = G \iiint_{Earth} \frac{dm(t)}{|\mathbf{X}(t) - \mathbf{Y}(t)|} + \frac{\omega^2(t)}{2} [X^2(t) + Y^2(t)]. \quad (1.8)$$

Позначимо певний тип спостережень (вхідну інформацію) через ℓ , який згідно з (1.8) є чутливим до всіх параметрів. Іншими словами, будемо трактувати ℓ як функціонал виду (1.8):

$$\ell = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t), dm(t), \omega(t), \Lambda(t), G], \quad (1.9)$$

де $dm(t)$ – елемент маси з радіус-вектором $\mathbf{Y}(t)$; $\omega(t)$ – кутова швидкість обертання Землі; $\mathbf{X}(t)$ – координати біжучих точок для довільного t ; $\Lambda(t)$ – зміщення земної системи координат відносно фіксованої інерційної.

Важливим аспектом проблеми, що обговорюється, є практична стійкість визначення гравітаційного поля. Г.Морітцем [65] було запропоновано математичне трактування геодезичних вимірів як геодезичних нелінійних функціоналів, які залежать від статичного гравітаційного поля Землі. В результаті строге обґрунтування операційного підходу фізичної геодезії було зроблене без введення часу t . Але з точки зору геодинамічних проблем приходимо до такого питання: які види спостережень треба вибрати для стійкого визначення залежного від часу гравітаційного поля Землі. Зрозуміло, однак, що потенціал W не можна визначити стійко на основі, наприклад, лише кутових і лінійних вимірів (класичні геодезичні дані). З цієї причини дослідження чутливості вихідних даних та очікуваної стійкості розв'язку W є корисними для оптимальних практичних результатів.

Оцінки чутливості геодезичних вимірів базуються, головним чином, на їх характеристиках точності. Згідно аналізу та остаточних висновків роботи [66] всі види чутливості представлені з різним рівнем точності. Однак, більшість вимірів різних типів має середню або високу гравіметричну чутливість. Серед відносних величин точності наземних вимірів лише точність абсолютних значень сили ваги сягає 10^{-10} . Відомо, що така висока відносна точність має рівень точності GRACE, GOCE та GNSS спостережень і потребує побудови залежних від часу моделей гравітаційного поля. Крім цього, приймаючи до уваги можливість методу GNSS-нівелювання, знаходимо ще один з незалежних шляхів моделювання гравітаційного поля не тільки в локальному, але й в регіональному масштабах. Для наземних та морських регіонів доцільним є використання таких типів даних: 1) дані про силу тяжіння у вигляді гравіметричних мереж, точкових аномалій сили тяжіння та морської гравіметрії; 2) напрями прямовисних ліній; 3) мережа пунктів GPS-нівелювання; 4) дані супутникової альтиметрії; 5) дані сучасних супутникових місій GRACE і GOCE на орбітах з малою висотою. Відзначимо, що саме дані спостережень супутникової градієнтометрії GOCE та виміри “супутник – супутник” системи GRACE і відкрили можливість суттєвого покращення

точності і побудови залежних від часу моделей поля, які включають і статичну складову, і вікові, і сезонні зміни гравітаційного потенціалу. Такі моделі геопотенціалу накопичуються в Міжнародному центрі ICGEM (International Centre for Global Earth Models) моделей глобального гравітаційного поля Землі як підрозділу Міжнародної Служби Гравітаційного Поля Землі (IGFS).

Таким чином, згідно класичної роботи [65] ми трактуємо залежні від часу виміри як нелінійні геодезичні функціонали (геодезичні виміри), які залежать від гравітаційного поля Землі, однієї або кількох точок в просторі та часу t [68]:

$$\ell = F[\mathbf{X}, W], \quad (1.10)$$

де потенціал (1.8) сили тяжіння W записується у вигляді суми гравітаційного потенціалу V та потенціалу відцентрової сили Φ :

$$W = V + \Phi, \quad (1.11)$$

а вектор \mathbf{X} складається з залежних від часу координат точки де виконується геодезичний вимір. Для лінеаризації достатньо інтерпретувати кожен геодезичний вимір будь-якого типу як нелінійний геодезичний функціонал, який не залежить від часу, а рівняння (1.10) можна представити у наступній формі

$$\ell = F[\mathbf{X}, W] = F[\mathbf{X}, W], \quad (1.12)$$

$$W = V + \Phi, \quad (1.13)$$

що в такій постановці не буде відрізнятися від підходу [65] якщо необхідні корекції для приведення до вибраної референцної епохи внесені і з'являється формальна можливість оперувати з залежними від часу вектором \mathbf{X} та потенціалом W як з незалежними \mathbf{X} , W величинами. Отже, тепер в (1.31) кожний геодезичний вимір залежить: 1) від одної або кількох точок в просторі; 2) від гравітаційного поля, а всі спостереження без будь-якого виключення можна представити як нелінійні функціонали (1.12).

Якщо позначити тепер число компонент вектора \mathbf{X} через p , то розглядаючи \mathbf{X} як елемент евклідова простору \mathbf{R}^p , запишемо на основі (1.12) базове рівняння для лінеаризації геодезичних вимірів

$$\ell = F[\mathbf{X}, W], \quad \ell = F[\mathbf{X}, V + \Phi], \quad (1.14)$$

де функція V належить до певного Гільбертового простору $H_2(\Sigma)$ гармонічних функцій, визначених в області Σ , зовні внутрішньої до поверхні Землі сфери Бьєрхамара. Відзначимо, що для кожного фіксованого $t = \text{const}$ функціонал F є відображенням добутку просторів $\mathbf{R}^p \times H_2(\Sigma)$ на множину \mathbf{R} дійсних чисел [55]. Різним типам геодезичних вимірів відповідають різні функціонали F , які в загальному випадку є нелінійними. В зв'язку з тим, що V належить до нескінченновимірному простору $H_2(\Sigma)$, а кількість вимірів або функціоналів на V – завжди скінчена, відповідна обернена геодезична задача не має єдиного розв'язку, а визначення гравітаційного потенціалу може розглядатися лише як некоректна задача. Зрозуміло, що пряме використання нелінійних співвідношень (1.12) на практиці може бути дуже складним.

1.2.1 Лінеаризація геодезичних вимірів

Традиційний шлях розв'язування нелінійних задач містить в собі лінеаризацію рівнянь за допомогою теореми Тейлора і безпосереднє їх розв'язування. Такий підхід є основою для методів обробки даних в геодезії з традиційно великою кількістю вимірів. В таких випадках нелінійні задачі можуть бути розділеними на відносно незалежні частини: лінеаризацію та розв'язування системи лінійних рівнянь. Приймаючи до уваги необхідну точність обчислень, можемо зробити висновок про ітераційну природу зазначеного підходу. Розв'язок будь-якої нелінійної задачі можна трактувати як диференціальну корекцію відповідного набору параметрів, що визначаються.

Отже, лінеаризацію нелінійних функціоналів ми починаємо на основі апроксимації \mathbf{X}_0 і U для \mathbf{X} і потенціалу W відповідно. Тоді можемо записати

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \delta\mathbf{X}, \quad (1.15)$$

$$W = V + T, \quad (1.16)$$

$$\delta \mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0, \quad (1.17)$$

$$T = W - U, \quad (1.18)$$

де U – нормальний потенціал сили поля тяжіння; T – аномальний або аномальний потенціал. Тепер на основі (1.12), (1.15) і (1.16) легко отримати наступне представлення геодезичного функціоналу [65]:

$$\ell = F[\mathbf{X}_0 + \delta \mathbf{X}, U + T]. \quad (1.19)$$

Розклад (3.13) в ряд Тейлора дає лінеаризовану форму (1.19):

$$\ell = F[\mathbf{X}_0, U] + \mathbf{a}^T \cdot \delta \mathbf{X} + LT, \quad (1.20)$$

якщо ми нехтуємо членами другої й більш високих степенів. Тут \mathbf{a} – вектор часткових похідних від $F[\mathbf{X}, W]$ по компонентах X_k вектора \mathbf{X} де замість таких параметрів як \mathbf{X} , W після диференціювання прийнято їх наближені значення \mathbf{X}_0 , U :

$$a_k = \left. \frac{\partial F[\mathbf{X}, W]}{\partial X_k} \right|_{\mathbf{x}_0, U}. \quad (1.21)$$

Член $(\mathbf{a}^T \cdot \delta \mathbf{X})$ – представляє скалярний добуток; LT – відображає дію лінійного оператора L на аномальний потенціал T . Прикладами лінійного оператора L можуть бути оператор Брунса для обчислення висот (квазі)геоїда на основі відомого T та так зване основне рівняння фізичної геодезії, яке забезпечує зв'язок між T та аномалією сили тяжіння. Тепер зауважимо, що ліву частину результату лінеаризації представляє звичайна різниця

$$\delta \ell = F[\mathbf{X}, W] - F[\mathbf{X}_0, U], \quad (1.22)$$

де $F[\mathbf{X}, W]$ – спостереження; $F[\mathbf{X}_0, U]$ – наближене значення $F[\mathbf{X}, W]$, яке практично можна знайти в результаті обчислень; $\delta \ell$ – різниця між спостереженою та обчисленою величинами.

Позначимо через q кількість вимірюваних величин (нелінійних функціоналів). Тоді лінеаризована система рівнянь може бути записана згідно (1.39) – (1.41) в формі

$$\left. \begin{aligned} \delta l_1 &= \mathbf{a}_1^T \delta \mathbf{X} + L_1 T, \\ \delta l_2 &= \mathbf{a}_2^T \delta \mathbf{X} + L_2 T, \\ &\dots\dots\dots \\ \delta l_q &= \mathbf{a}_q^T \delta \mathbf{X} + L_q T. \end{aligned} \right\} \quad (1.23)$$

При лінеаризації кожного конкретного типу спостережень треба звернути увагу на те, що в цілому наша функція U часто відрізняється від потенціалу сили тяжіння еквіпотенціального еліпсоїда. Замість цього ми розглядаємо як правило більш складну функцію, для якої зберігаємо традиційне позначення U . Крім цього, з (1.20) і (1.21) можна бачити, що розв'язування лінійної оберненої задачі (1.23) містить в собі розв'язування прямої задачі: обчислення наближеного значення $F[\mathbf{X}_0, U]$ на основі прийнятої моделі нормального гравітаційного поля.

Запишемо тепер систему (1.23), яка була знайдена шляхом лінеаризації, в матричній формі [65]:

$$\ell = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}T + \mathbf{n}, \quad (1.24)$$

де \mathbf{X} – p -вектор, який складається з компонент X_k , а ℓ – q -вектор, що складається тепер з компонент δl_i . Відзначимо, що при переході до матричної форми (1.24) порівняно з системою (1.23) ми міняємо члени δX_k на X_k та δl_i на ℓ_i . Матриця \mathbf{A} , яка складається з часткових похідних (1.21), має розмірність $(q \times p)$, а лінійний оператор \mathbf{B} формується з q лінійних функціоналів, в результаті чого мають місце такі позначення

$$\ell = \begin{bmatrix} \delta l_1 \\ \delta l_2 \\ \dots \\ \delta l_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T \\ \mathbf{a}_2^T \\ \dots \\ \mathbf{a}_q^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_q \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

з припущенням, що матриця \mathbf{A} має повний ранг для $p < q$, \mathbf{n} – це q -вектор впливу похибок вимірів або так званий “шум” вимірів. Таким чином,

головна задача – це визначення вектора \mathbf{X} і аномального потенціалу T на основі вектору вимірів ℓ та рівняння (1.24). Детальне обговорення розв’язування такої задачі на основі теорії апроксимації функцій розглянуто в [65]. Нижче ми приймаємо аномальний потенціал T відомим, $\mathbf{V} = 0$, за рахунок чого (1.24) приводиться до

$$\ell = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{n}, \quad (1.26)$$

системи лінійних рівнянь, яка традиційно розв’язується методом найменших квадратів. Система, що відповідає рівнянням (1.24) може інтерпретуватися як розширення стандартної моделі (1.26).

Повертаючись тепер до розв’язування системи (1.26), зауважимо, що така обернена задача називається коректною за Адамаром, якщо для неї:

- 1) розв’язок існує,
- 2) цей розв’язок – єдиний,
- 3) розв’язок системи – стабільний.

Якщо одна з цих умов порушена, то задача називається некоректною і потребує введення додаткових умов, які достатньо часто базуються на використанні апріорної інформації [54]. Знаходження вектора \mathbf{X} на основі (1.26) так само є прикладом некоректної задачі, оскільки кількість параметрів традиційно менше ніж кількість вимірів ($p < q$) за рахунок чого рішення (1.26) не має єдиного розв’язку і ми змушені використати додаткову умову, що згідно [7] є одним з можливих підходів розв’язування некоректних задач. Тому будемо шукати розв’язок (1.26) під умовою принципу найменших квадратів

$$(\ell - \mathbf{A}\mathbf{X})^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} (\ell - \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathbf{n}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{n} = \text{minimum} \quad (1.27)$$

і отримаємо оцінку $\hat{\mathbf{X}}$ рішення \mathbf{X} у наступній формі

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{nn}^{-1} \ell, \quad (1.28)$$

де \mathbf{C}_{nn} – ($q \times q$) коваріаційна матриця похибок вимірів, яка на практиці в більшості випадків задається в діагональній формі. Рівняння (1.28) є розв’язком добре відомої системи нормальних рівнянь. Відзначимо, що завдяки принципу (1.27) забезпечуються перші дві умови коректності. Третя

умова, стабільність розв'язку характеризується тим, що малим змінам вимірів відповідають малі зміни оцінки розв'язку. Стабільність розв'язку може бути порушена в рівнянні (1.28), тобто у випадках коли відповідна задача трансформується до некоректної оберненої задачі [7]. Розв'язування некоректної оберненої геодезичної задачі виконують методом регуляризації [7], до якого відноситься і добре відомий в геодезії метод середньої квадратичної колокації [65] розглянуто нижче.

1.2.2 Побудова системи вараційних рівнянь для визначення необхідних похідних

Підсумовуючи подані вище дослідження необхідно відзначити, що математичною основою рішення задач космічної геодезії є векторне рівняння

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{R}, \quad (1.29)$$

яке пов'язує топоцентричний $\boldsymbol{\rho}$ радіус-вектор градієнтометра з його геоцентричним \mathbf{r} радіусом-вектором та геоцентричним радіусом-вектором \mathbf{R} наземної станції.

Згадаємо, що рівняння руху градієнтометра записується традиційно у наступній формі

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{K}_s = \mathbf{F}, \quad (1.30)$$

де сила \mathbf{F} включає в себе кеплеровий член (притяжіння супутника центральною точкою) та сукупність гравітаційних і негравітаційних прискорень

$$\mathbf{K}_s = \ddot{\mathbf{r}}_E + \ddot{\mathbf{r}}_S + \ddot{\mathbf{r}}_M + \ddot{\mathbf{r}}_e + \ddot{\mathbf{r}}_o + \ddot{\mathbf{r}}_D + \ddot{\mathbf{r}}_{SP} + \ddot{\mathbf{r}}_A. \quad (1.31)$$

В (1.30) збурюючі сили відповідають:

1. Прискореннями $\ddot{\mathbf{r}}_E$, обумовленими дією нецентральных та неоднорідних особливостей Землі як планети;
2. Прискореннями $\ddot{\mathbf{r}}_S$ і $\ddot{\mathbf{r}}_M$, обумовленими дією інших планет (головним чином Сонцем та Місяцем);
3. Прискореннями $\ddot{\mathbf{r}}_e$ і $\ddot{\mathbf{r}}_o$, обумовленими земними та океанічними

припливами;

4. Прискореннями $\ddot{\mathbf{r}}_D$, обумовленими впливом атмосфери Землі;

5. Прискореннями $\ddot{\mathbf{r}}_{SP}$ і $\ddot{\mathbf{r}}_A$, обумовленими прямим та відбитим від Землі сонячним радіаційним тиском.

В результаті розв'язування системи (1.30) геоцентричний \mathbf{r} радіус-вектор супутника

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \delta_V, \delta_P, \delta_Q), \quad (1.32)$$

з початковими умовами

$$\mathbf{r}|_{t=t_0} = \mathbf{r}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}|_{t=t_0} = \dot{\mathbf{r}}_0, \quad (1.33)$$

є функція

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q), \quad (1.34)$$

векторів положення \mathbf{r}_0 та швидкості $\dot{\mathbf{r}}_0$ градієнтометра в початковий момент часу t_0 , параметрів δ_V моделі потенціалу V притягіння Землі, параметрів δ_P моделей інших потенціальних сил та параметрів δ_Q моделей непотенціальних сил.

Рівняння (1.30) з початковими умовами (1.31) застосовані тут для дослідження руху градієнтометра в інерційній геоцентричній системі координат. За рахунок цього рівняння (1.29) розглядаються у тій самій системі. Однак координати станцій жорстко пов'язані з тілом Землі, що обертається. У кожний момент часу взаємна орієнтація цих двох систем приймається традиційними трьома ортогональними матрицями

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{R}_3(-z_A)\mathbf{R}_2(\theta_A)\mathbf{R}_3(-\xi_A), \quad (1.35)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_1(-\varepsilon - \Delta\varepsilon)\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)\mathbf{R}_1(\varepsilon), \quad (1.36)$$

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_1(-y_P)\mathbf{R}_2(-x_P)\mathbf{R}_3(\theta_g + \Delta\nu), \quad (1.37)$$

Ці матриці враховують повороти за рахунок прецесії, нутації і обертання Землі. В формулах (1.35) – (1.37) $\mathbf{R}_j(\alpha)$ – це матриці повороту навкруги осей X , Y та Z на заданий кут α ; z_A , θ_A , ξ_A – параметри прецесії; ε – середній

нахил екліптики в площині екватора; $\Delta\psi$ і $\Delta\varepsilon$ – складові нутації у довготі та нахилі; $\Delta\nu$ – складова нутації в прямому сходженні, що легко обчислюється на основі $\Delta\psi$; θ_g – середній зоряний час за Гринвічем; x_p і y_p – координати полюса миттєвої осі обертання Землі.

Таким чином, геоцентричний радіус-вектор \mathbf{R} наземної станції в рівняннях (1.29) є функцією часу t і параметрів моделей поворотів (1.35) – (1.79). Крім того при опрацюванні спостережень високої точності виникає необхідність врахування деформацій земної поверхні. В результаті функція \mathbf{R} розглядається у наступному вигляді

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{R}_0, \delta_{\Pi}, \delta_{\text{N}}, \delta_{\Omega}, \delta_{\text{T}}, \delta_{\text{M}}), \quad (1.38)$$

– як функція часу t координат станцій \mathbf{R}_0 у вибраний початковий момент часу t_0 , які віднесені до земної координатної системи, а також параметрів $\delta_{\Pi}, \delta_{\text{N}}, \delta_{\Omega}$, перетворень між земною та інерційною системами та параметрів $\delta_{\text{T}}, \delta_{\text{M}}$, які характеризують припливні та неприпливні деформації земної поверхні.

Отже, основне рівняння (1.29) дозволяє обчислити топоцентричний ρ радіус-вектор супутника як функцію часу та сукупності параметрів, що відповідають за всі перелічені ефекти

$$\rho_C = \rho(t, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q, \mathbf{R}_0, \delta_{\Pi}, \delta_{\text{N}}, \delta_{\Omega}, \delta_{\text{T}}, \delta_{\text{M}}) \quad (1.39)$$

При наявності вимірних значень ρ отриманий вираз дозволяє виконати лінеаризацію $dS = S - S[\mathbf{X}_0, U] = \rho - \rho_C$ після знаходження всіх необхідних часткових похідних. Часткові похідні від топоцентричного радіус-вектора супутника ρ по параметрам, що уточнюються, можна розділити на дві групи. Перша з них – це похідні від компонент геоцентричного радіуса-вектора \mathbf{R} наземної станції. Їх знаходження не має будь яких складнощів. Друга група – це похідні від компонент геоцентричного \mathbf{r} радіуса-вектора супутника, який представлено у формі рішення системи рівнянь руху (1.32). Знаходження

останніх – найбільш складний процес реалізації динамічного методу супутникової геодезії.

Запишемо рівняння руху (1.30) на одній вибраній орбіті

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= F_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0, E_5^0, E_6^0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q), \\ \ddot{y} &= F_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0, E_5^0, E_6^0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q), \\ \ddot{z} &= F_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0, E_5^0, E_6^0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q), \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

де $(E_1^0, E_2^0, E_3^0, E_4^0, E_5^0, E_6^0)$ – початкові значення елементів Кеплера. Якщо тепер позначити через β_k один з параметрів $E_j^0, \delta_V, \delta_P, \delta_Q$, то нам необхідно для системи параметричних рівнянь обчислення таких похідних

$$\frac{\partial x}{\partial \beta_k}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta_k}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta_k}. \quad (1.41)$$

Для знаходження (1.41) шляхом диференціювання рівнянь (1.40) отримаємо систему варіаційних рівнянь, яку ми записуємо у матричному вигляді

$$\dot{\gamma} = \mathbf{B}_r \gamma_k + \mathbf{B}_v \dot{\gamma}_k + \mathbf{C}_k, \quad (1.42)$$

з початковими умовами

$$\gamma_k|_{t=t_0} = \gamma_{k0}, \quad \dot{\gamma}_k|_{t=t_0} = \dot{\gamma}_{k0}, \quad (1.43)$$

та такими складовими

$$\mathbf{B}_r = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_v = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_1}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_2}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{y}} & \frac{\partial F_3}{\partial \dot{z}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_k = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \beta_k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \beta_k} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \beta_k} \end{bmatrix}, \quad (1.44)$$

$$\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]^T, \quad \mathbf{r} = [x, y, z]^T, \quad \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T. \quad (1.45)$$

Систему (1.42) нескладно отримати і шляхом диференціювання (1.32) по β_k . Початкові умови (1.43) – це нульові вектори, виключаючи випадок, коли β_k є одним з компонентів початкового вектора положення \mathbf{r}_0 або швидкості $\dot{\mathbf{r}}_0$. Тоді γ_{k0} і $\dot{\gamma}_{k0}$ визначаються за допомогою таких рівнянь

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{r}_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \dot{\mathbf{r}}_0} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_0}{\partial \mathbf{r}_0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.46)$$

Єдиний параметр в (1.46), методика обчислення якого залежить від змісту β_k , є вектор \mathbf{C}_k . Вирази для його компонент виводяться на основі (1.44) після диференціювання формул, які дають праві частини рівнянь руху (1.32). Крім того, у випадку коли β_k - це один з шести компонент вектору початкового стану градієнтметра, то $\mathbf{C}_k \equiv 0$, оскільки праві частини (1.32) не залежать від \mathbf{r}_0 або $\dot{\mathbf{r}}_0$ в явному вигляді.

Для обчислення правих частин системи (1.42) необхідні координати та швидкості градієнтметра в миттєвий момент часу. Останнє призводить до паралельного інтегрування варіаційних рівнянь разом рівняннями руху супутника [52]. Таким чином, знаходження коефіцієнтів та вільних членів рівнянь поправок може бути реалізованим шляхом чисельного інтегрування великої кількості диференціальних рівнянь другого порядку: трьох рівнянь руху супутника і – при уточненні N параметрів моделі руху супутника – $3N$ варіаційних рівнянь.

Підсумовуючи зауважимо, що матрицю \mathbf{B}_r на практиці достатньо застосовувати у наступній формі

$$\mathbf{B}_r = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad (1.47)$$

де V – зовнішній гравітаційний потенціал планети, а (x, y, z) – координати градієнтометра в інерційній системі [53]. Найбільш проста форма варіаційних рівнянь достатньо часто застосовується у такому вигляді

$$\ddot{\gamma} = \mathbf{B}_r \gamma_k + \mathbf{C}_k, \quad (1.48)$$

який відповідає відсутності залежності між параметрами, що визначаються, та вектором швидкості супутника.

1.3 Особливості місії CHAMP та GRACE

Місія CHAMP

CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload) супутникова місія, яка відноситься до серії супутників LEO, задумана та реалізована геоцентром Науково-дослідним Потсдаму (Geoforschungszentrum Potsdam) [30]. Процес розробки розпочався в 1997 році, а сам запуск відбувся 15 липня 2000 року з Російського космодрому Плесецьк. Основні параметри: орбіта майже кругова (ексцентриситет $e < 0.004$) і майже полярна ($i=87^\circ$), початкова висота 454 км, тривалість проекту – 5 років (при запуску очікувалось, що термін буде продовжений), вага 522 кг, довжина 8.3 м, ширина 1.6 м, висота 0.75 м.

Проект CHAMP переслідує такі основні цілі: дослідження глобального гравітаційного поля, або, конкретніше, уточнення довгохвильової частини статичного поля та її часових варіацій (викликаних, наприклад, перерозподілом атмосферних мас, циркуляцією океанів, зміною рівня моря за рахунок танення полярного льодового покриву), вивчення глобального магнітного поля, а саме, уточнення основного магнітного поля і магнітного поля земної кори та їх просторово-часових варіацій уточнення атмосфери з точки зору її температури, склад водяної пари та електронної структури по даним про заломлення сигналів GPS – так зване профілювання іоносфери та тропосфери [78].

Початкову висоту супутника (484 км) можна розглядати як компроміс між умовами для визначення магнітного та гравітаційного полів, оскільки для вимірів гравітаційного поля бажана більш низька висота [89]. Але завдяки,

головним чином опору атмосфери, висота буде поступово знижуватись до 300 км і навіть менше, що сприятливо позначиться на визначенні гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля.

Для досягнення поставлених цілей проекту на борту супутника було встановлено наступне обладнання:

двочастотний GPS-приймач, зв'язаний з системою антен, щоб визначати орбіту супутника CHAMP, використовуючи кодові та фазові псевдовідстані;

триосний акселерометр, щоб вимірювати негравітаційне прискорення, яке діє на космічний корабель (аерокосмічний опір, тиск сонячного випромінювання);

лазерний ретранслятор для дублювання системи стеження, щоб вимірювати двосторонню відстань між наземними станціями і супутниками з точністю 1-2 см; ці виміри забезпечують точне визначення орбіти;

магнітометр магнітного потоку, який вимірює векторні компоненти магнітного поля Землі;

обладнання для визначення електричного поля, концентрації, температури і зносу іонів;

два прилади для стеження за зірками, щоб отримувати високоточну інформацію про орієнтування триосного акселерометра і цифрового вимірювача іонного зносу, а також для корекції положення супутника.

Основою проекту CHAMP є система супутник-супутник в режимі високий-низький. Гравітаційне поле Землі збурює орбіту супутника CHAMP. Ці збурюючі прискорення відповідають першим похідним гравітаційного потенціалу V [30]. Тому гравітаційне поле Землі може бути уточнено за результатами вимірювань гравітаційних збурень орбіти супутника.

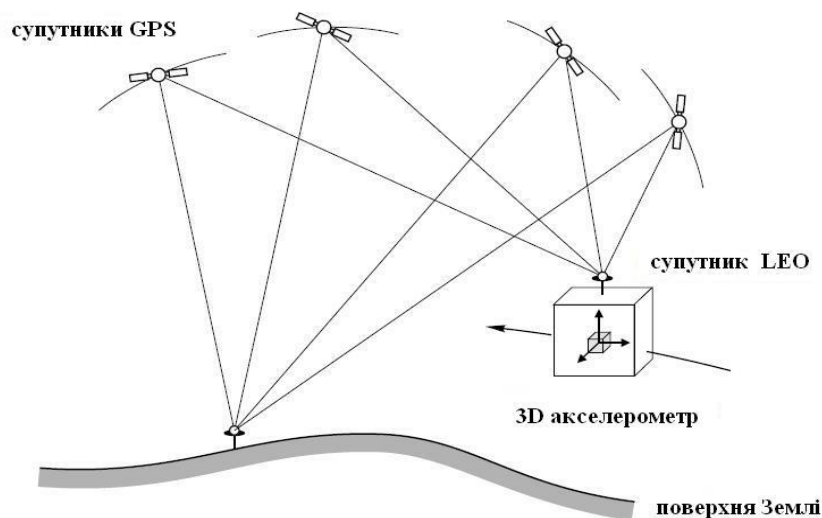


Рис 1.4 Система супутник-супутник в режимі: високі-низькі виміри[30]
Місія GRACE

GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) – спільний проект Американського національного управління аеронавтики і космонавтики (U.S.National Aeronautics and Space Administration, NASA) і Німецького центру авіаційних і космічних проектів (Deutsches Zentrum für Luft-und Raumfahrt, DLR) [89].

Основними цілями проекту є визначення глобального гравітаційного поля Землі з високою роздільною здатністю та вивчення варіацій сили тяжіння з часом.

Інша задача складається з вивчення за допомогою GPS-вимірів явищ заломлення в іоносфері та тропосфері шляхом детального визначення їх електронного складу. Два супутника цього проекту були запущені одночасно 17 березня 2002 року з космодрому Плесецьк.

Основні параметри супутників: майже кругова (ексцентриситет $e < 0.005$) і майже полярна ($i=89^\circ$) орбіта, початкова висота 485км і 500 км, супутники знаходяться на відстані приблизно 220 км один від одного (щоб зберігати таке положення, необхідні активні орбітальні маневри кожні один-два місяці), розрахункова тривалість місії – 5 років, вага кожного супутника – приблизно 480 кг, довжина – близько 3м.

Основне обладнання:

- Ключовим інструментом GRACE є далекомірна система в смузі частот К, яка вимірює зміни віддалей між обома супутниками, використовуючи двополосні мікрохвильові сигнали з точністю 1 мкм с^{-1} . Відстані вимірюються з частотою 10 Гц [77].

- GPS-приймач служить для точного визначення орбіти космічного корабля GRACE і дає дані для атмосферного та іоносферного профілювання. Щоб досягти цього, система супутник-супутник реалізована не лише між двома супутниками GRACE, але і між GPS-супутниками [30].

- Система орієнтації та відстеження орбіти включає в себе газову рухому установку, три магнітних крутильних динамометра, прилад стеження за зорями, трьохосну інерційну відлікову систему для вимірювання кутових швидкостей та триосний магнітометр.

- Акселерометр вимірює набір не гравітаційних прискорень, виникаючі на GRACE, наприклад, за рахунок сонячного тиску чи аеродинамічного опору.

- Лазерний ретранслятор являється пасивним інструментом, призначений для відбиття посланих наземними станціями коротких лазерних імпульсів. Відстань між наземною станцією і супутником GRACE може бути визначена з точністю 1-2 см. Лазерні дані з ретранслятора використовуються разом з даними GPS-приймача для точного визначення орбіти.

На основі супутника GRACE базується система супутник-супутник в режимі низький-низький, тобто два супутника рухаються по одній і тій самій орбіті на відстані кількох сотень кілометрів, 220 км у випадку GRACE. Відстань між ними та швидкість зміни цієї відстані вимірюються з максимально можливою точністю. Орбіта кожного супутника під впливом індивідуально-збурюючих прискорень, що відповідають першим похідним гравітаційного потенціалу [100]. Інформація з обох супутників дає різниці прискорень [79]. Крім того положення супутників з GPS на борту відносно системи GPS NAVSTAR. Тому режим високий-низький також в принципі має місце.

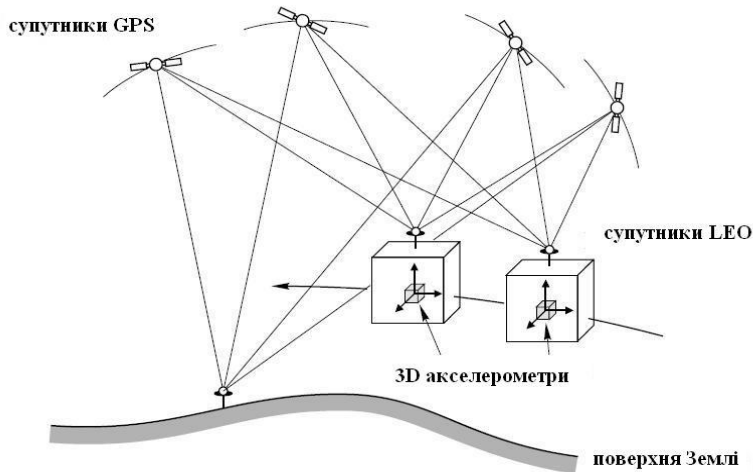


Рис 1.5 Система супутник-супутник в режим вимірів: «низький-низький» [30]

1.4 Основи методу Етвеша виміру других похідних потенціалу. Аероградієнтометрія

Одним з перших питань про обчислення градієнтів сили тяжіння зайнявся угорський фізик барон Лоранд Етвеш (1848-1919). Він розробив прилад, виміри з якого розвинули теорію дослідження сили ваги та рівневої поверхні [19].

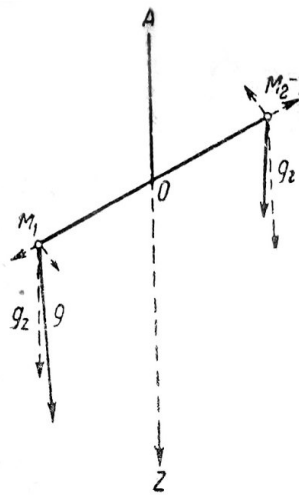


Рис.1.6 Схема варіометра першого типу

Розроблений Етвешом прилад називають гравітаційним варіометром, або

варіометром Етвеша. Як наслідок високої чутливості варіометра до притягання близьких мас, він більше застосовувався для геолого-вишукувальних робіт. Хоча і геодезичне застосування вимірів з цього приладу важливе та цікаве. Варіометр використовувався Етвешом у двох типах.

Розглянемо теорію варіометра першого типу (Рис.1.6), який являє собою прості крутильні ваги: легке горизонтальне коромисло, M_1M_2 підвішена посередині на тонкій нитці AO . На кінцях коромисла прикріплені два тягарці однакової маси M_1 та M_2 . Припустимо, що прилад знаходиться в однорідному полі тяжіння, в якому всі горизонтальні напрями конформні.

В неоднорідному полі тяжіння існують напрямки, в яких сила тяжіння збільшується швидше і як наслідок на коромисло буде діяти пара сил, які закрутять нитку так, що положення рівноваги буде досягнуто в іншому азимуті, що буде відповідати певній закрученості нитки.

В аналітичній формі [19]: представимо у вигляді векторів силу, що діє на тягарці M_1 та M_2 . Візьмемо систему прямокутних осей координат з початком в точці O . Вісь z спрямуємо вертикально вниз по продовженню нитки AO , вісь x спрямуємо на північ, вісь y - на схід. Розглянемо випадкову точку нашої системи з елементарною масою dm і координатами (x, y, z) . Розкладемо силу тяжіння g , яка діє на точку, на три складові по топоцентричним координатам (x, y, z) , які позначимо як g_x, g_y, g_z . Остання складова, паралельна нитці AO , не може вплинути на поворот системи навколо осі z . Перші дві складові дадуть елементарний момент відносно осі z , який дорівнює

$$dM = (xg_y - yg_x)dm \quad (1.49)$$

Повний момент сил, діючий на всі точки системи буде відповідати наступному рівнянню:

$$M = \int (xg_y - yg_x)dm \quad (1.50)$$

Поблизу точки O компоненти сили ваги ми можемо представити рядом Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= (g_x)_0 + \left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_x}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_x}{\partial z}\right)_0 z + \dots \\ g_y &= (g_y)_0 + \left(\frac{\partial g_y}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_0 y + \left(\frac{\partial g_y}{\partial z}\right)_0 z + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Де позначкою $_0$ позначені відповідні величини для початку координат. Але те, що вісь z напрямлена по вертикалі, тобто по напрямку сили g в точці O , будемо мати:

$$(g_x)_0 = (g_y)_0 = 0 \quad (1.52)$$

Вводячи потенціальну функцію W сили тяжіння, запишемо компоненти в такому вигляді:

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (1.53)$$

Звідки похідні від компонент виразяться так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & \frac{\partial g_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial g_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial g_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial g_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, & \frac{\partial g_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial g_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial g_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.54)$$

Внівши це в рівнянн (1.51), вони перепишуться так:

$$\begin{aligned} g_x &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right)_0 z \\ g_y &= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 x + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)_0 y + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)_0 z \end{aligned} \quad (1.55)$$

Внесення цих виразів в рівняння, після преведення отримає вигляд:

$$M = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)_0 \int x y d m + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)_0 \int (x^2 - y^2) d m + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)_0 \int x z d m - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} \right)_0 \int y z d m. \quad (1.56)$$

Зрозуміло, що використання іншої системи координат (x, y, z) призведе до зміни g_x, g_y, g_z .

Спостереження з варіометром дають величину похідних $W_{\Delta}, W_{xy}, W_{xz}, W_{yz}$.

Визначимо зміст і значення цих величин. Розпочнемо з двох останніх похідних.

Таким чином,

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (1.57)$$

Так само як:

$$W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right) = \frac{\partial g}{\partial y} \quad (1.58)$$

Ці дві похідні дають зміну сили тяжіння в горизонтальній площині: перша – в напрямку осі Ox , взятої нами на північ, друга – в напрямку осі Oy – повернутої на схід. Тому ці похідні називаються горизонтальними градієнтами сили тяжіння [19].

Запишемо повний диференціал прискорення g :

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (1.59)$$

Проінтегруємо цей вираз в межах між двома заданими точками (x_1, y_1, z_1) та (x_2, y_2, z_2) . Отримаємо:

$$g_2 - g_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial g}{\partial x} dx + \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial g}{\partial y} dy + \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial g}{\partial z} dz \quad (1.60)$$

Варіометр не дає похідної $\frac{\partial g}{\partial z}$, тому обмежимося її нормальним значенням. Збільшення z рівносильне зменшенню висоти H , тому що координата z в нас напрямлена вниз. Відповідно:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = - \frac{\partial g}{\partial H} \quad (1.61)$$

1.5 Аероградієнтометрія

Компанія Bell Aerospace (нині Lockheed Martin) в період між 70-80-ми роками ХХ століття розробила технологію гравітаційного градієнтометра (GGI) для різного використання. Проект найбільшої в світі гірничодобувної компанії «ВНР» (нині ВНР Billiton) та Lockheed Martin призвів до розробки нового гравітаційного градієнтометра, що базувався на старих розробках Lockheed Martin (GGI), прилад назвали аеробортовим гравітаційним градієнтометром (AGG), який згодом став провідною розробкою Lockheed Martin.

Технологія GGI [37], що розроблена Bell Aerospace спільно з ВМС США, базувалася на винаході барона Лоранда фон Етвеша [19]. Крутильні ваги Етвеша пояснювали його інтерес до фундаментальних властивостей кривини гравітаційного поля Землі, що було розвинуто в роботах Маруссі. Згодом прилад використовувався для пошуку корисних копалин, в 1929 році

налічувалося понад 170 крутильних ваг в Північній Америці, Австрії, Китаї, Хорватії, Великобританії та Німеччині. Основним застосуванням було відображення соляних куполів для розвідки нафти.



Рис.1.7 Лоранд фон Етвеш під час дослідження роботи крутильних ваг

Технологія GGI в 1970-х роках застосовувалася для врівноваження навігаційних систем ВМС США. У 1986 році прилад використали в умовах близьких до розвідки корисних та мінеральних копалин. Він виявився ефективним для визначення невеликих локальних гравітаційних аномалій, які асоціюються з мінеральними покладами. Відстань між прольотами склала 5км, на висоті 700 метрів над місцевістю [58]. В результаті дослідження виникли проблеми з GPS-позиціонуванням, контролем температури та дрейфом гіроскопа. Похибки у визначенні значень градієнтів сили тяжіння відповідали похибкам на рівні 30-40 $E\sqrt{Гц}$. Завдяки наступним удосконаленням помилки були виправлені, та визначено, що діапазон похибок визначення градієнтів повинен коливатися в межах 7-14 $E\sqrt{Гц}$ для висоти не менше 100 метрів.

В GGI чотири акселерометри встановлені на роторі рівностепенно розташовані по колу, їх чутливі осі розташовані по дотичній по колу з тим самим принципом [47]. Ротор обертається з постійною швидкістю, як правило 0,25 Гц, відносно осі перпендикулярної до площини акселерометрів. Ці

обертання призводять до модуляції сигналу градієнта сили тяжіння з частотою 0,5 Гц, в той час як загальний режим сигналу статичного тяжіння знаходиться на рівні 0,25 Гц. Сигнали з комплекту чотирьох акселерометрів GGI об'єднуються таким чином, що сигнали з ортогональних між собою акселерометрів мають протилежні знаки. [рис. 1.8]

Найкраще роботу акселерометра описує наступне співвідношення:

$$4\rho \left[\sin(2\Omega t)G_{xy} + \cos(2\Omega t) \left(\frac{G_{xx} - G_{yy}}{2} \right) \right] \quad (1.62)$$

де ρ – радіус осей акселерометра, Ω - швидкість обертання (рад/с), t – час, а також

$$G_{ij} = \frac{\sigma g_i}{\sigma_j} \quad (1.63)$$

G_{ij} - похідна від i – компонента вектора сили тяжіння з вагою вимірів j

Чутливість GGI для прискорення в площині акселерометрів видаляється в першому порядку шляхом узгодження чутливості акселерометрів. Чутливість до прискорення перпендикулярна до площини, видаляється в першому порядку орієнтацією чутливих осей в площині конструкції акселерометрів.

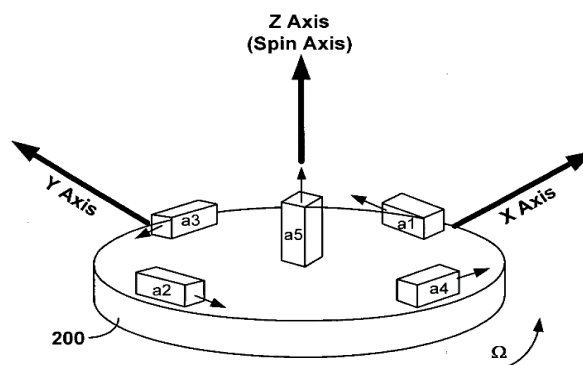


Рис. 1.8 Принципова схема акселерометра

В жовтні 1999 року в Батрустському таборі в Нью-Брунсвіку випробували перший в світі аеробортовий гравітаційний градієнтметр. Через вісім років після запуску першого число операційних систем на базі AGG значно збільшилося.

Концепція градієнтметра полягає в тому, що це розділена пара акселерометрів із спільною чутливою віссю та закріплена спільною основою. Гравітаційний градієнт в цьому випадку буде різницею в вимірів прискорень, що ділиться на інтервал поділки. Так як у них спільна основа, то підвищення прискорення акселерометра залежить від поведінки повітряного судна. Обертальні рухи повітряного судна спричинить появу псевдо-градієнтів. Відповідний тензор буде анти-симетричним, тому для симетрії градієнту другу пару акселерометрів можна вирівняти таким чином, що кожна пара бути мати власну чутливу вісь паралельну до основної лінії іншої пари. Сума отриманих даних з цих пар без врахування обертальних моментів і буде значенням гравітаційного градієнта.

В режимі знімання (рис.1.9), в умовах низької висоти обстеження навколишнього середовища прискорення сили тяжіння повинно бути порядку $1 \text{ м с}^{-2} \sqrt{G\gamma}$. Прискорення сили тяжіння навколишнього середовища для гравітаційного градієнтметра з розмірністю 100 мм для досягнення порогу похибок в $10 \text{ Е} \sqrt{G\gamma}$ повинно коливатися на рівні порядку 10^9 . Похибка акселерометра повинен бути порядку $10^{-9} \text{ м с}^{-2} \sqrt{G\gamma}$. Повороти акселерометра повинні бути знижені до 30 мрад/с.

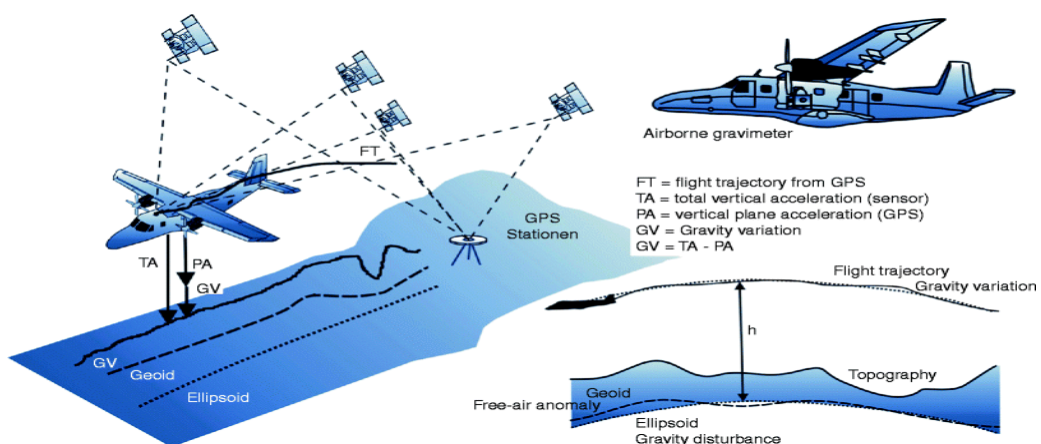


Рис.1.9 Принцип роботи AGG Falcon

Враховуючи всі вищі перелічені основні принципи розглянемо особливості градієнтометрів, що розташовані на борту супутників.

1.6 Метод супутникової градієнтометрії

Електростатичний градієнтометр сили тяжіння GOCE

Найцікавішим обладнанням на борту супутника GOCE з точки зору геодезії є електростатичний градієнтометр. Основна операція градієнтометра полягає у вимірюванні сил, що діють на “пробну масу”, яка знаходиться в центрі спеціально сконструйованої так званої “клітки” [30]. Сервоконтролери забезпечують стабільність “пробної маси”, як у лінійному русі, так і в обертальному. Три пари ідентичних акселерометрів формують три осі градієнтометра, які встановлені на ультрастабільній структурі (рис.1.10).

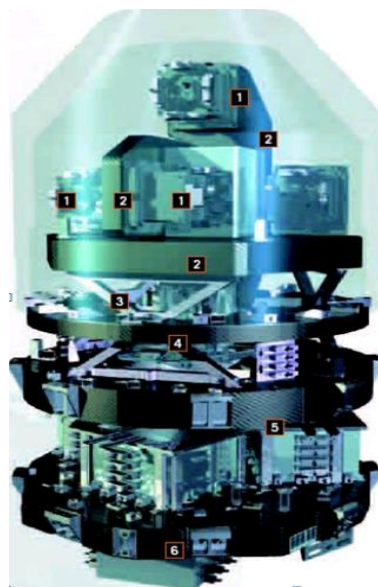


Рис.1.10 Електростатичний градієнтометр сили тяжіння

(1 - пара акселерометрів, 2 - ультрастабільна структура, 3 - ізостатична X-рама, 4 - панель контролю температури, 5 - міжблочна підставка, 6 - панель електроніки)

Різниця між виміряними прискореннями кожної пари акселерометрів називається базисними градієнтометричними даними, а половина їх суми становить вимір прискорення (загальний режим вимірювання). Три осі, встановлені ортогонально одна відносно іншої: перша - лежить вздовж траєкторії супутника, друга - перпендикулярна до цієї траєкторії, третя - наближено спрямовується до центру Землі.

Кожна пара акселерометрів має базисну лінію близько 50 см. Кожний акселерометр є тривимірним з двома осями найвищої точності та одною віссю меншої точності. В ідеальному випадку акселерометри кожної пари мали б бути “близнюками”. Тоді при взятті різниць між двома відліками вздовж одної осі, всі лінійні прискорення на акселерометрах ідеально б видалялись. Компоненти градієнтів сили тяжіння визначаються комбінуванням диференційованих прискорень настільки точно, наскільки точно вимірюються пертурбаційні кутові прискорення. Реально тут досягнуто точності 10^{-5} в режимі CMRR (Common Mode Rejection Ratio) загальний метод відносного збурення. Градієнтометр досягає точності близько $1-3 \text{ mE}/\sqrt{\text{Гц}}$ поза вимірювальним діапазоном ($5 \times 10^{-3} \text{ Гц} - 0.1 \text{ Гц}$). Хоча градієнтометр є високоточний, це не дає можливості визначати все поле сили тяжіння в просторовому масштабі з такою ж точністю.

Положення супутника GOCE відстежується відносно GPS супутників, які літають на висоті 20 000 км. Ця процедура називається вимірюваннями супутник-супутник (SST). Для визначення високороздільної частини поля сили тяжіння, використовується градієнтометр, а GPS використовується для отримання даних низької роздільної здатності [89].

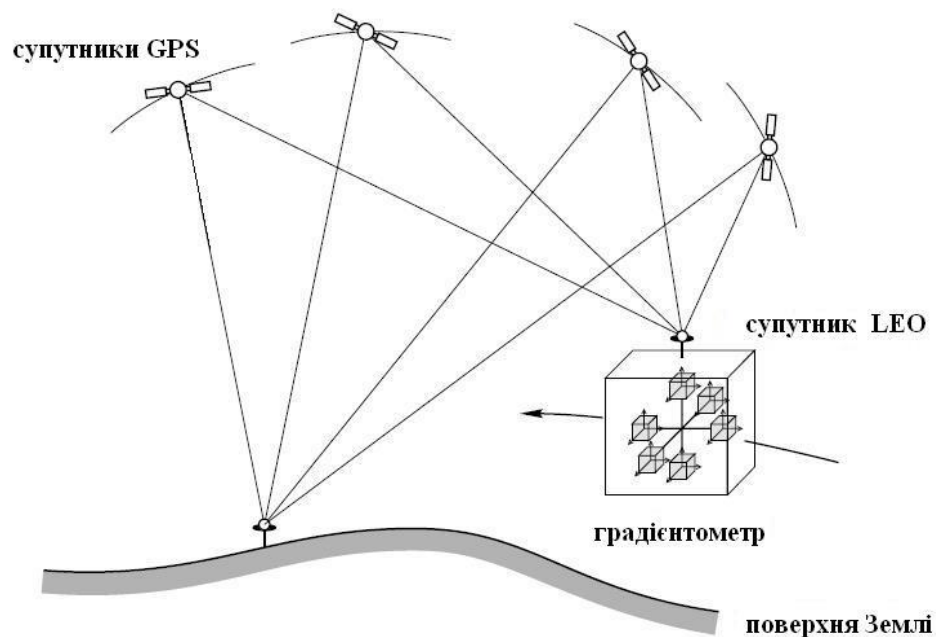


Рис.1.11 Визначення положення GOCE за допомогою GPS (SST) [30]

Супутникова градієнтометрія (рис.1.11) дає вимірювання різниць прискорення компонент сили тяжіння в трьох просторових взаємноортогональних напрямках шістьма акселерометрами (по два на кожній з трьох осей). Отже, вимірний сигнал відповідає похідним компонентами прискорення сили тяжіння, тобто другим похідним гравітаційного потенціалу. GOCE–градієнтометрія базується на таких основних залежностях.

Представимо тензор гравітаційного градієнту потенціалу притягання \mathbf{V} у вигляді матриці:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.64)$$

Тоді тензор сили тяжіння приймає наступний вигляд в (правій) земній глобальній системі XYZ:

$$\mathbf{W}_E = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{xz} & W_{yz} & W_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \omega^2 & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \end{bmatrix}, \quad (1.65)$$

з елементами в полярній системі координат r, ϑ, λ :

$$V_{zz}(r, \theta, \lambda) = V_{rr}(r, \theta, \lambda)$$

$$V_{r,r}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos \theta).$$

$$V_{r,r}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R^3} \sum_{l=L_{min}}^{L_{max}} (l-1)(l-2) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos \theta) \quad (1.66)$$

1.7 Особливості місії GOCE

GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) – це європейський науково-дослідний супутник. Він призначений для дослідження гравітаційного поля Землі і циркуляції океану. Місія реалізується Європейським космічним агентством (ESA) [30]. GOCE був запущений і виведений на орбіту 17 березня 2009 року з космодрому Плесецьк. Нахил

орбіти супутника становить $96,70^\circ$. Його незвичайна стрілоподібна форма, разом з «плавниками» мають допомогати супутнику зберігати орієнтацію під час прольотів через потоки повітря, які присутні на висоті польоту супутника.

Супутник GOCE мав видовжену форму, із секціями шириною близько 0.9 м і довжиною приблизно 5.0 м. Характерною особливістю цього супутника є наявність двох, повністю симетричних панелей, які призначені для зменшення атмосферних збурень і є конструктивною особливістю космічного носія. Для зручності супутник розділений на три платформи, на які кріпляться різні модулі. Нижній модуль включає в себе AOCS/DFACS (Attitude and Orbit Control System/Drag Free Attitude Control System - система контролю висоти і орбіти. Вільна від гальмувань система контролю положення) та комплект іонних двигунів (ІТА – Ion Thrusters Assembly). У центральному модулі розташований комплект так званий EGG або електростатичний градієнтометр сили тяжіння [9]. Центр комплекту (EGG) знаходиться в центрі мас супутника (основною вимогою є суміщеність центру EGG та центру мас супутника протягом всієї експлуатації космічного носія). Верхній модуль переважно складається з електричного обладнання, пристроїв пам'яті, радіочастотного обладнання, і містить бак для зберігання 40 кілограм палива для іонних двигунів.

Електрична енергія генерується чотирма сонячними панелями в встановленими на корпусі супутника та двома – встановленими на крилах (їх площа складає приблизно 5 м^2). Літій-іонна батарея забезпечує потреби супутника, яка має загальну потужність 2.246 кВт та місткість 78 Аг. Космічний апарат є термостійким і містить системи пасивного радіаційного контролю та ізоляції. Загальна маса супутника при запуску становить близько 1000 кг, включаючи паливо для двигунів супутника.

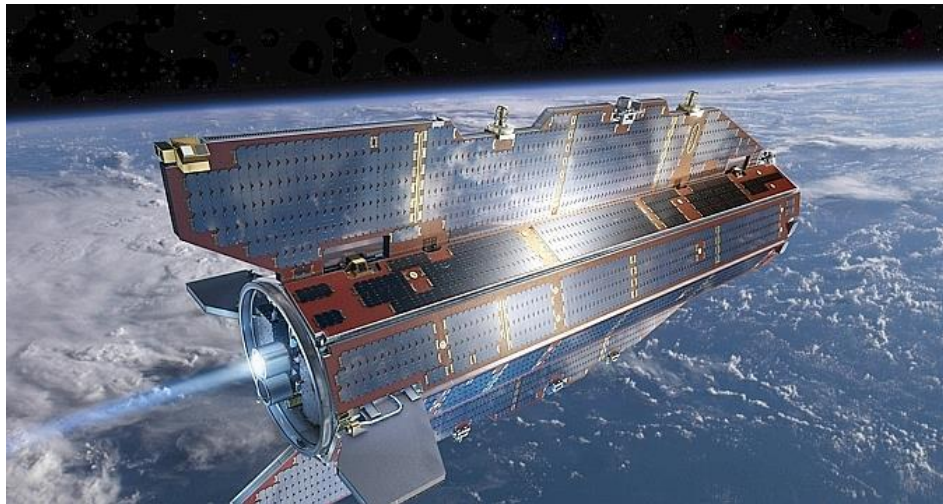


Рис 1.12 Загальний вигляд супутника GOCE

Ключовим елементом системи AOCS/DFACS на супутнику GOCE є вільний від гальмування контроль положення (drag-free attitude control). DFACS була розроблена для компенсації ефектів, що впливають на виміри градієнтометра в діапазоні від 5 мГц до 100 мГц (які пов'язані з силами та моментами атмосферного тертя). Ця система використовує іонні двигуни та мікродвигуни. Загальна помилка градієнтометра складає близько $3 \text{ мЕ} \sqrt{\Gamma_{\text{ц}}}$ (примітка $1 \text{ Е} = 1 \text{ Eötvös} = 10^{-9} \text{ s}^{-2}$, одиниця градієнту сили тяжіння). У вільному від гальмування режимі, система орієнтації космічного корабля (з абсолютною точністю 0.38 мрад) вимагає відстеження зірок та вхідних EGG даних. Однак інформація про положення супутника може забезпечуватись за допомогою сенсора Землі, сенсора Сонця та тривісним магнетометром в інших режимах місії.

Основна система збереження даних, яка встановлена на борту базується на системі MIL-1553, та 32-ох процесорному бортовому компютері (ERC), і об'ємом пам'яті 2.5 Гбіт. Зв'язок забезпечує S-band (два когерентних S-band джерела, дві антени та радіочастотний модуль) з швидкістю відправки даних 2 кбіт/с та прийому – 850 кбіт/с. Головна наземна станція знаходиться в місті Кірума. Контроль над місією GOCE здійснює ESA.

Орбіта супутника є сонце-синхронною та низькою (висота = 250 км; нахил близько 96.5°). Глобальне покриття полярних регіонів забезпечується

через 30 – 40 днів. Номінальна протяжність місії GOCE планується на 20 місяців. Для виходу на орбіту використовується ракетноносій класу Rockot

На GOCE встановлений GRAS приймач, який має 16 двочастотних канали. Є можливість для використання трьох антен, але використовується лише одна (відсутнє шифрування радіо сигналу). Будь-який канал можна вільно підключити до GPS чи GLONASS супутників.

GRAS приймач здатний забезпечувати прийом таких сигналів:

- Псевдовіддалі на некорельованому C/A коді зі стандартним відхиленням 50 см, з частотою даних 1Гц;
- Некорельовані фазові спостереження на частоті L1, зі стандартним відхиленням 1 мм, частота даних 10 Гц (що відповідає 1/3 м/с), та некодовані спостереження на частотах L2-L1 зі стандартним відхиленням 2 мм. Також приймач може забезпечувати GLONASS-спостереження.

Варто зазначити, що можливість прийому даних з частотою 10 Гц не є обов'язковою вимогою, просто інструмент має таку здатність. Для GOCE достатньо приймати дані з частотою 1 Гц.

1.8 Основні системи координат GOCE

GRF - Референцна система градієнтометра (*Gradiometr Reference Frame*) та *ARF* - Референцна система акселерометра (*Accelerometr Reference Frame*). GRF – це система координат, в якій GOCE вимірює компоненти тензора градієнтів сили тяжіння. GRF використовується для орієнтації тривісного градієнтометра відносно інших референцних систем. Також в цій системі розташовуються системи одновісних градієнтометрів, так звані OAGRF – One Axis Gradiometr Reference Frame (Референцна система одновісного градієнтометра). Номінально центри всіх референцних систем одновісних градієнтометрів попарно знаходяться на осях системи GRF. Відповідно осі трьох OAGRF є колінеарними. Отже 6 референцних систем акселерометрів є паралельними та мають однакові напрямки.

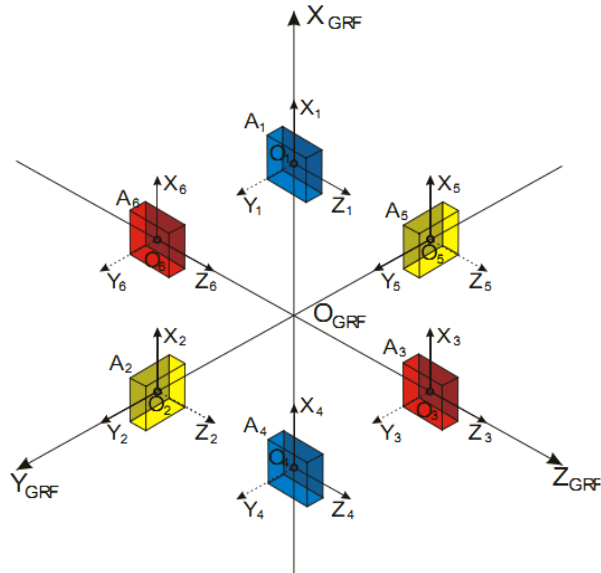


Рис.1.13 GRF та розташування 6 ARF

LORF- Локальна орбітальна референчна система (*Local Orbital Reference Frame*). Центр O_{LORF} знаходиться в центрі мас супутника; вісь X_{LORF} (обертання) є паралельною до миттєвого вектора швидкості (V) на орбіті з тим же напрямком. Вісь Y_{LORF} (висота) до миттєвого напрямку орбітального кутового моменту (N), з тим же знаком, що і N (V та N ортогональні за визначенням $N = R \times V$, де R є вектором від центру Землі до центру даної системи). Вісь Z_{LORF} (розворот) є паралельною до $V \times N$ і має той же знак, що і вектор $V \times N$.

Взаємна орієнтація GRF та LORF в просторі. На рисунку 1.14 показано, як співставляються фундаментальні референчні системи. GRF не повністю співпадає з LORF. З наукової точки зору супутник буде працювати у вільному від гальмування режимі у напрямку польоту тільки для контролю широти, що забезпечується магнітними моментами над полюсам. Оскільки магнітні моменти проявляються тільки близько полюсів, розвертання спричиняє кут обертання на екваторі близько декількох градусів. Максимальний кут розвороту становить 3.5° він досягається на екваторі через вплив зовнішніх сил спричинених обертанням Землі. Таким чином супутник буде розвертатися в межах $\pm 3.5^\circ$ (по відношенню до LORF) в зв'язку з тим, щоб зменшити горизонтальні сили та моменти.

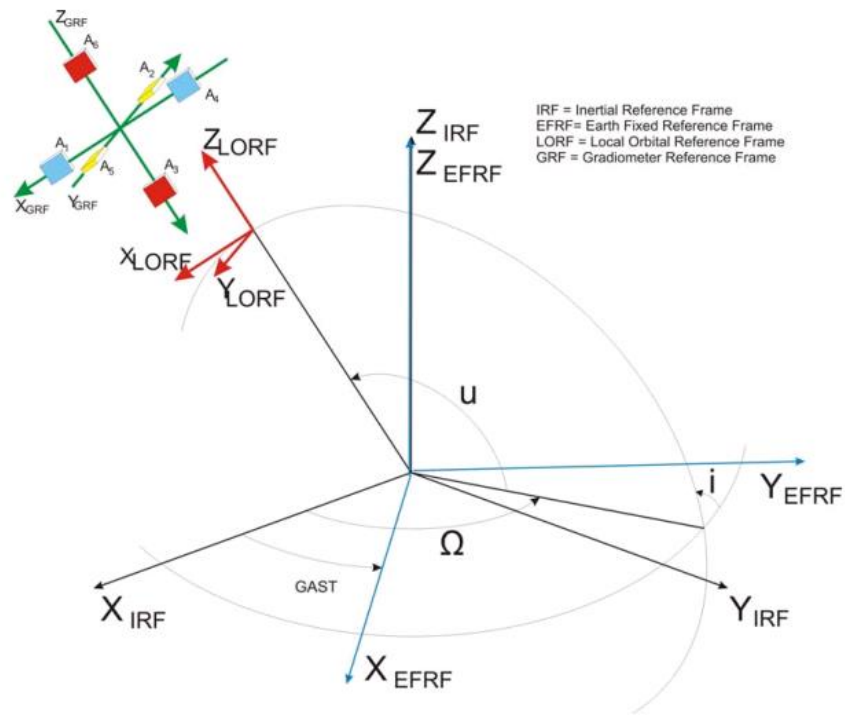


Рис.1.14 Основні референці системи координат GOCE

IRF – Інерціальна референцна система (*Inertial Reference Frame*). Інерціальна референцна система (IRF) є просторовою референцною системою, яка зафіксована в просторі. IRF є ортогональною правою системою. Її центр знаходиться в центрі мас Землі (геоцентр), орієнтація- екваторіальна, вісь Oz напрямлена в небесний полюс. Вісь Ox зафіксована в площині екватора і напрямлена в точку весняного рівнодення. Вісь Oy також лежить в площині екватора, але розвернута на 90 градусів на схід.

EFRF – Земна фіксована референцна система (*Earth Fixed Reference Frame*). Земна фіксована референцна система (EFRF) є просторовою референцною системою, яка обертається разом із Землею в добовому русі. EFRF є ортогональною, правою системою. Її центр знаходиться в центрі мас Землі (геоцентр), орієнтація- екваторіальна, (вісь Oz напрямлена в точку полюсу). Вісь Ox зафіксована у площині екватора і напрямлена до Грінвіцького меридіана. Кут між віссю Ox Інерціальної референцної системи (визначений точкою весняного рівнодення) та Грінвіцьким меридіаном називається Greenwich Apparent Sideral Time (GAST) або просто часовим кутом t .

LNOF – Локальна система орієнтована на північ (*Local North Oriented Frame*). Локальна система орієнтована на північ (*LNOF*) є правою Північ-Захід-Верх системою, вісь *X* спрямована на Північ, вісь *Y* – на Захід та вісь *Z* – вгору. В цій системі подаються калібровані градієнти сили тяжіння *EGG_TRF_2*.

- Центр O_{LNOF} , розташований у номінальному центрі мас супутника;
- Z_{LNOF} визначена вектором від геоцентру до центру O_{LNOF} , (радіальний напрям);
- Y_{LNOF} є паралельна до нормального вектора до геоцентричного меридіана, який проходить через центр мас супутника (західний напрям);
- X_{LNOF} є нормальним вектором до площини, яка визначена Y_{LNOF} та Z_{LNOF} .

Цих три осі, по відношенню до геоцентричної широти та східної довготи (φ, λ) центру мас *GOCE* в *CTRS* (*Conventional Terrestrial Reference System*), визначаються так:

$$Z_{LNOF} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}; Y_{LNOF} = \begin{pmatrix} \sin\lambda \\ -\cos\lambda \\ 0 \end{pmatrix}; X_{LNOF} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \cos\lambda \\ -\sin\varphi \sin\lambda \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

1.9 Просторовий підхід визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm}

Розташування кожної точки яка спостерігається, описується її сферичними координатами; сферичні гармоніки у цьому випадку будуть частково представлені через функції Лежандра. Отже, гравітаційний потенціал можна представити так:

$$V(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_0^{L_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos\theta),$$

$$U(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{R} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos\theta) \quad (1.68)$$

де r, θ, λ є сферичними координатами точки; G – гравітаційна константа; M – маса Землі; R – середній екваторіальний радіус Землі; де – $P_{lm}(\cos\theta)$ –

повністю нормалізовані приєднані функції Лежандра; і C_{nm} та S_{nm} повністю нормовані геопотенціальні коефіцієнти.

Дані SGG (Satellite Gravity Gradiometer), фактично, зробили переворот, дозволивши використовувати модель поля сили тяжіння Землі, як апріорну інформацію. Це означає, що те, що колись можна було тільки обчислити, тепер безпосередньо вимірюється. В наслідок цього ми зможемо завжди впевнені, що наші SGG дані були переопрацьовані. Отже, геопотенціальні коефіцієнти C_{nm} та S_{nm} , встановлені зворотнім шляхом слід вважати як поправки до апріорних коефіцієнтів $C_{nm}^{(ref)}$, $S_{nm}^{(ref)}$. Більше того, роздільна здатність спостережуваних SGG даних є обмежена. Отже, є сенс в межах даного способу встановити мінімальний ступінь, що буде дорівнювати нулю та максимальний ступінь L_{max} коефіцієнтів.

Другі похідні гравітаційного потенціалу обчислюються за рекурентними формулами та і можуть бути представлені в системі LPOF (local pole-oriented frame) зі сферичними координатами (r, θ, λ) де: вісь X напрямлена на Північ, вісь Y – на Захід та вісь Z напрямлена вгору.

$$\begin{cases} V_r(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{a^2} \sum_0^{L_{max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \times \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos\theta) \\ V_\theta(r, \theta, \lambda) = -\frac{GM}{a} \sum_0^{L_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times \sum_{m=0}^l \{C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P'_{lm}(\cos\theta) \sin\theta, \\ V_\lambda(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_0^{L_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \times \sum_{m=0}^l m \{-C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda\} P_{lm}(\cos\theta) \end{cases} \quad (1.69)$$

де вирази для перших і других похідних можна легко обчислити:

$$V_{rr}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^3} \sum_{l=0}^{L_{max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos\theta), \quad (1.69 \text{ a})$$

$$V_{r,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^2} \sum_{l=0}^{L_{max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos\theta) \sin\theta, \quad (1.69 \text{ б})$$

$$V_{r,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a^2} \sum_{l=0}^{L_{max}} (l+1) \left(\frac{a}{r}\right)^{l+2} \sum_{m=0}^l m \{C_{nm} \cos m\lambda - S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos\theta), \quad (1.69 \text{ в})$$

$$V_{\theta,\theta}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} \{P''_{nm}(\cos\theta) \sin^2\theta$$

$$-P'_{nm}(\cos\theta)\cos\theta\}, \quad (1.69 \text{ г})$$

$$V_{\theta,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l m \{C_{nm} \cos m\lambda - S_{nm} \sin m\lambda\} P'_{nm}(\cos\theta) \sin\theta, \quad (1.69 \text{ е})$$

$$V_{\lambda,\lambda}(r, \theta, \lambda) = \frac{GM}{a} \sum_{l=0}^{L_{\max}} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l m^2 \{C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda\} P_{nm}(\cos\theta), \quad (1.69 \text{ є})$$

Перетворення других похідних з LPOF до орбітальної системи виконується таким співвідношенням для трансформації тензорів:

$$\mathbf{V}' = \mathbf{R}\mathbf{V}\mathbf{R}^T, \quad (1.70)$$

де \mathbf{V} – це тензор других похідних у вихідній системі, \mathbf{V}' – тензор других похідних в орбітальній системі, та \mathbf{R} – це матриця поворотів 3×3 , що трансформує тензор з LPOF до орбітальної системи. Тобто, прямий та просторовий підходи відрізняються методами задання градієнтів у певних системах координат.

1.10 Підхід часових рядів визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} та S_{nm}

У цьому випадку положення кожної спостережуваної точки визначається з точки зору орбіти супутника, і формула для гравітаційного потенціалу (1.8) буде мати такий вигляд (в інерціальній системі координат):

$$V(r, \omega_0, \omega_e, I) = \frac{GM}{R} \sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{matrix} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{matrix} \right\}_{l-m:\text{odd}}^{l-m:\text{even}} \times \quad (1.71)$$

$$\sum_{k=-l[2]}^l F_{lmk}(I) \cos\Phi_{km} + \begin{matrix} S_{lm} \\ C_{lm} \end{matrix} \Big|_{l-m:\text{odd}}^{l-m:\text{even}} \sum_{k=-l[2]}^l F_{lmk}(I) \sin\Phi_{km}$$

де r, ω_0, ω_e та I - параметри, які описують орбіту та положення супутника; $\Phi_{km} = k\omega_0 + m\omega_e$; $F_{lmk}(I)$ - так звані “нахилені функції”, та:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{l-m:\text{odd}}^{l-m:\text{even}} = \begin{cases} A, \text{ якщо } l \text{ та } m \text{ того ж паритету} \\ B, \text{ якщо } l \text{ та } m \text{ мають різний паритет} \end{cases} \quad (1.72)$$

Time-wise підхід дозволяє записати рівняння для других похідних прямо в EPOF. Діагональні елементи тензора других похідних можна записати так:

$$V^{(ii)}(r, \omega_0, \omega_e, I) = \frac{GM}{R^3} \sum_{l=L \min}^{L \max} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{array}{l} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{array} \right\}_{l-m: \text{even}}^{l-m: \text{odd}} \times \quad (1.73)$$

$$\sum_{k=-l[2]}^l \kappa_{lmk}^{ii}(I) \cos \Phi_{km} + \left[\begin{array}{l} S_{lm} \\ C_{lm} \end{array} \right]_{l-m: \text{odd}}^{l-m: \text{even}} \sum_{k=-l[2]}^l \kappa_{lmk}^{ii}(I) \sin \Phi_{km}$$

$$\text{де, } x_{lk}^{(ii)} = \begin{cases} -(l+1+k^2), & \text{для компонент } xx \\ -((l+1)^2 - k^2), & \text{для компонент } yy \\ (l+1)(l+2), & \text{для компонент } zz \end{cases} \quad (1.74)$$

У time-wise підході положення супутника визначається чотирма залежними від часу параметрами: I - кут нахилу орбіти; ω_e - кутова відстань між грінвіцьким меридіаном та висхідним вузлом орбіти (довгота висхідного вузла орбіти Ω); ω_0 - кутова відстань між висхідним вузлом орбіти та супутником (аргумент широти u); r - відстань між центром Землі та супутником; для некеплерівської орбіти використовувались миттєві значення.

xz-компонента SGG тензора подана наступним виразом:

$$V^{(xz)}(r, \omega_0, \omega_e, I) = \frac{GM}{R^3} \sum_{l=L \min}^{L \max} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \sum_{m=0}^l \left\{ \begin{array}{l} C_{lm} \\ -S_{lm} \end{array} \right\}_{l-m: \text{even}}^{l-m: \text{odd}} \sum_{k=-l[2]}^l (-l-2)k F_{lmk}(I) \cos \Phi_{km} + \quad (1.75)$$

$$\left[\begin{array}{l} C_{lm} \\ S_{lm} \end{array} \right]_{l-m: \text{odd}}^{l-m: \text{even}} \sum_{k=-l[2]}^l (-l-2)k F_{lmk}(I) \sin \Phi_{km}$$

Треба зазначити, що обидва підходи space-wise та time-wise є еквівалентними у сенсі обчислених SGG даних із встановлених геопотенціальних коефіцієнтів (C_{nm}, S_{nm}) .

1.11 Висновки та рекомендації

1. Проаналізовано сучасні принципи спостереження супутників LEO, вимірювання з яких широко використовуються при моделюванні гравітаційного поля.

2. Зроблено огляд методу аероградієнтометрії, що реалізовує принцип варіометра Етвеша для знаходження градієнтів прискорення сили тяжіння.

3. Супутникова градієнтометрія та аероградієнтометрія вимірює вертикальні градієнти сили тяжіння. На відміну від наземної градієнтометрії,

ці методи дають можливість максимально забезпечити покриття майже повної земної поверхні даними з градієнтометра за достатньо короткий період часу. Це дозволяє не враховувати часових варіацій при побудові моделей гравітаційного поля Землі, отримуючи в свою чергу стаціонарні моделі, не залежні від часу.

4. За даними супутникової градієнтометрії можна впевнено визначити лише низькочастотну складову геопотенціальних коефіцієнтів. Тому моделі отримані виключно за супутниковими даними без залучення інших даних, не використовують для побудови високоточних моделей.

5. Загальноприйнято, що методи визначення гармонічних коефіцієнтів гравітаційного поля Землі, запропоновані центром опрацювання даних місії GOCE, наприклад метод часових рядів, тобто побудова моделей в інерціальній системі координат (Time-wise approach), просторовий метод (Space-wise approach), а також динамічний метод супутникової геодезії, так званий прямий підхід (Direct approach), вимагають обробки великої кількості даних та потужного технічного забезпечення.

6. Таким чином усі вище перелічені методи потребують розв'язування великих систем рівнянь, тому в подальших дослідженнях, буде розглянуто метод квадратурних формул, які дозволяють суттєво прискорити процес обчислень.

7. Проаналізовано, що використовуючи виключно супутникові дані, можна досягнути наступних розв'язків, CHAMP дозволяє визначення C_{nm} S_{nm} до 100 степеня/порядку, GRACE – до 180 степеня/порядку та GOCE – до 250 – 260 степеня/порядку.

2 МЕТОДИ КВАДРАТУРНИХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ГАРМОНІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

2.1 Загальні відомості гравітаційного Ньютонового потенціалу.

Згідно закону Ньютона всесвітнього тяжіння, величина сили F є пропорційною добутку двох точкових мас m_1 , m_2 , які знаходяться на відстані ρ і взаємно притягують одна одну за наступним правилом

$$F = G \frac{m_1 m_2}{\rho^2} . \quad (2.1)$$

У цій формулі G являє собою гравітаційну сталу $G = (6.67259 \pm 0.0003) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}$ (подану тут як найбільш точне значення, рекомендоване Міжнародною Асоціацією Геодезії за останнє десятиліття. Гравітаційна сила з величиною (2.1) має напрям вздовж лінії між точками M і P де знаходяться маси m_1 і m_2 відповідно. Зазначений закон добре відомий ще й як закон обернених квадратів. Саме цю назву використовував К.Ф. Гаусс у 1840 р. для своєї роботи з теорії потенціала [22]. Для визначеності нижче одну з цих мас m_1 , m_2 будемо називати масою, яка притягує, а другу – масою, що притягується. Рівняння (2.1) симетричне: маса m_1 відповідає гравітаційній силі яка діє на m_2 , а маса m_2 відповідає силі з тією ж величиною, яка діє на m_1 , але має протилежний напрям [24]. Якщо прийняти для спрощення масу, що притягується, одиничною і позначити масу, яка притягує через m , то вираз (2.1) може бути записаним у найбільш простій формі

$$F = G \frac{m}{\rho^2} . \quad (2.2)$$

Нижче ми приймаємо систему прямокутних геоцентричних координат $Oxyz$, жорстко зв'язаних з планетою, які згідно [63] визначаються наступним чином: початок системи співпадає з центром мас (геоцентром); вісь Oz співпадає з середнім положенням земної осі обертання, вісь Ox лежить в площині середнього меридіана Грінвіча, вісь Oy є перпендикулярною до площини xOz і має такий напрямок, що система $Oxyz$ є правою; площина xOy є таким чином середньою екваторіальною площиною.

Сила (2.2) тепер просто розглядається як вектор \mathbf{F} (з компонентами $\mathbf{F}=(F_x, F_y, F_z)$), який згідно [29] має напрям від точки M до точки P і характеризується напрямними косинусами $(\cos\alpha_x, \cos\alpha_y, \cos\alpha_z)$ відносно осей x, y, z відповідно. Позначимо тепер координати маси, яка притягує, через (x_M, y_M, z_M) , а координати маси, що притягується, – (x_P, y_P, z_P) . В результаті для компонент гравітаційної сили як векторної характеристики \mathbf{F} ми отримуємо

$$\left. \begin{aligned} F_x &= -GM \frac{x_P - x_M}{\rho^3} = -F \cdot \cos\alpha_x, \\ F_y &= -GM \frac{y_P - y_M}{\rho^3} = -F \cdot \cos\alpha_y, \\ F_z &= -GM \frac{z_P - z_M}{\rho^3} = -F \cdot \cos\alpha_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

де ρ є відстань між точками M і P :

$$\rho = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}. \quad (2.4)$$

Таким чином *гравітаційний потенціал* точкової маси M може бути заданим у наступному вигляді [22]:

$$V = \frac{Gm}{\rho}, \quad (2.5)$$

оскільки компоненти (F_x, F_y, F_z) гравітаційної сили \mathbf{F} згідно визначенню потенціальної функції приймають таку форму

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x_P}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y_P}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z_P}, \quad (2.6)$$

що перевіряється простим диференціюванням (2.5). Крім того, гравітаційна сила генерується оператором Гамільтона ∇ (nabla) за допомогою співвідношень (2.6):

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) = \nabla V = \text{grad}V, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \text{grad}. \quad (2.7)$$

Реальна конфігурація мас об'ємного тіла (Землі) може розглядатися як система нескінченно великої кількості простих точкових мас. Після інтегрування по всіх елементах мас, отримуємо так званий Ньютоновий або об'ємний потенціал

$$V(P) = G \iiint_v \frac{dm}{\rho} = \iiint_v \frac{\delta}{\rho} dv \quad (2.8)$$

де

$$dm(x, y, z) = \delta(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.9)$$

елемент маси, який виражено в (2.9) через об'ємну густину δ тіла, що вивчається; dv – елемент об'єму v ; ρ – відстань між елементом маси dm і біжучою точкою P . Легко перевірити простим диференціюванням (2.8), що гравітаційна сила \mathbf{F} у випадку об'ємного потенціалу (2.8) генерується оператором градієнта (2.7).

Як потенціал (2.8), так і його перші похідні (або компоненти сили) є неперервними у всьому тривимірному Євклідовому просторі \mathbf{R}^3 . Крім того, функція (2.8) зменшується на нескінченності як $1/\rho$, а її перші похідні зменшуються на нескінченності як $1/\rho^2$ для $\rho \rightarrow \infty$. Остання властивість характеризує потенціал V (2.8) як регулярну на нескінченності функцію. Оскільки другі похідні не є неперервними у всьому тривимірному просторі \mathbf{R}^3 , то потенціал V (2.8) об'ємних мас задовільняє в \mathbf{E}^3 рівнянню Пуассона

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi G \delta. \quad (2.10)$$

Однак густина δ дорівнює нулю зовні тіла і на основі (2.10) ми отримуємо широко відоме рівняння Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2.11)$$

Таким чином, рівняння (2.11) дає можливість зробити важливий висновок: гравітаційний потенціал (2.8) є гармонічною функцією тільки зовні тіла. Крім того, функція V є регулярною на нескінченності функцією. В середині Землі потенціал V задовільняє рівнянню Пуассона.

Повертаючись до гравітаційного потенціалу (2.5), відзначимо, що функція Gm/ρ є гармонічною у всьому просторі \mathbf{R}^3 за виключенням точки M і регулярною на нескінченності. Слід зауважити, що функція $1/\rho$ є найпростішою гармонічною функцією, добре відомою ще як

фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа, або так званою функцією взаємної відстані.

За визначенням потенціал W сили тяжіння твердого тіла ν є простою сумою потенціалів гравітаційної \mathbf{F} і відцентрової сил Φ :

$$W = V + \Phi, \quad (2.12)$$

$$\Phi = \text{grad} \Phi = (\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z), \quad \Phi = \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2), \quad (2.13)$$

де ω є кутовою швидкістю обертання Землі. Використовуючи (2.13) і визначення потенціальної функції для компонент відцентрової сили Φ , знаходимо їх значення

$$\Phi_x = \omega^2 x, \quad \Phi_y = \omega^2 y, \quad \Phi_z = 0. \quad (2.14)$$

Зауважимо, що градієнт потенціалу W сили тяжіння є вектором сили тяжіння \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = \text{grad} W = \left(\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z} \right), \quad (2.15)$$

з наступними компонентами

$$\left. \begin{aligned} g_x &= F_x + \Phi_x, \\ g_y &= F_y + \Phi_y, \\ g_z &= F_z + 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Вектор сили тяжіння (2.15) є результатом сумісної дії гравітаційної сили (2.7) та відцентрової сили (2.13) обертання Землі, що формалізується правилом додавання векторів. Крім того, просто перевірити шляхом диференціювання (2.12), що потенціал сили тяжіння задовільняє рівнянню Пуассона зовні планети

$$\Delta W = 2\omega^2. \quad (2.17)$$

Іншими словами, потенціал сили тяжіння не є гармонічною функцією зовні Землі. Величина сили тяжіння (2.15) приймає наступну форму

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}, \quad (2.18)$$

а напрям вектора (2.15) сили тяжіння являє собою прямовисну лінію.

Таким чином, у випадку точкового потенціалу (2.5) ми приходимо до висновку, що згідно (2.7) вектор гравітаційної сили \mathbf{F} (2.3) або її три компоненти можна замінити лише однією функцією V [29]. Такий самий результат може бути знайдено у випадку гравітаційного потенціалу Землі (2.8) і потенціалу сили тяжіння (2.14). Саме з цієї причини вивчення поля сили тяжіння замінюється визначенням потенціалу сили тяжіння W . Останній факт відповідає основній задачі фізичної геодезії: якщо функція W знайдена, то ми можемо знайти як всі рівневі поверхні, так і поверхню (квазі)геоїда на основі наступного рівняння [29]:

$$W(x, y, z) = \text{const.} \quad (2.19)$$

Зауважимо, що поле гравітаційної сили \mathbf{F} являє собою приклад консервативного поля, оскільки кількість гравітаційної роботи при переміщенні точки A в точку B не залежить від шляху. З векторного аналізу відомо [2], що в цьому випадку ротор поля градієнтів завжди дорівнює нулю: $\text{rot grad } f = 0$. Оскільки гравітаційна сила \mathbf{F} та сила тяжіння \mathbf{g} можуть бути представленими як градієнт відповідного скалярного поля у формі (2.7) і (2.15) відповідно, то самі скалярні поля є не що інше, як гравітаційний потенціал V та потенціал сили тяжіння W .

Наступною важливою характеристикою гравітаційного поля стає тензор Етвеша других похідних потенціала сили тяжіння запропонований бароном Етвешом при створенні гравітаційного варіометра [19], який визначається в наші дні і методами супутникової градієнтометрії

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{xy} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{xz} & W_{yz} & W_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Слід відзначити, що тензор (2.20), який відомий ще під назвою матриці Гессе традиційно з часів Етвеша записується у локальній топоцентричній системі координат NEU (напрямок осей: “Північ-Схід-Вверх”). Початок P цієї лівої

системи $PXYZ$ співпадає з біжучою точкою P . В координатній системі NEU вісь X має напрям на північ, вісь Y – на схід ортогонально до X , а вісь Z співпадає з вектором (2.15) сили тяжіння у точці P . Фундаментальна площина $X = 0$ цієї системи співпадає з локальним горизонтом у біжучій точці P . Всього існує п'ять незалежних компонент (2.20) оскільки сума діагональних елементів є не що інше, як рівняння (2.11) Лапласа.

Другі похідні похідні W_{ij} , з яких складається тензор (2.20) мають важливий фізичний зміст. Якщо розділити кожний елемент W_{ij} в (2.20) на силу тяжіння (2.18):

$$w_{ij} = -\frac{W_{ij}}{g}, \quad (2.21)$$

то ми отримаємо так званий тензор Маруссі (2.22)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k_1 & t_1 & \kappa_1 \\ t_1 & k_2 & \kappa_2 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial H^*} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

де $\partial g / \partial H^*$ – вертикальний градієнт сили тяжіння ; k_1 і k_2 – нормальні кривини рівневої поверхні, яка проходить через біжучу точку P у напрямках X (меридіану) та Y (паралелі) відповідно; t_1 і $-t_1$ – геодезичні кручення рівневої поверхні у напрямках меридіану та паралелі; κ_1 і κ_2 – кривини проєкцій прямовисної лінії на площині XOZ та YOZ [29] запишемо наступними формулами для елементів тензора Маруссі

$$\kappa_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial H^*}, \quad \kappa_2 = \cos \varphi \frac{\partial \lambda}{\partial H^*}, \quad (2.23)$$

де φ , λ – астрономічна широта і астрономічна довгота точки P , H^* – ортометрична висота, яка вимірюється вздовж прямовисної лінії. Як добре відомо, саме ці формули і є основними для редукцій астрономічних координат за кривину прямовисної лінії. Для інтерпретації інших елементів (2.22) згідно [29], отримаємо

$$k_1 = -\frac{W_{xx}}{g}, \quad k_2 = -\frac{W_{yy}}{g}, \quad (2.23)$$

та формулу для середньої J і Гауссової K кривин рівневої поверхні в точці P

$$J = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{g} \left(\frac{W_{xx} + W_{yy}}{2} \right), \quad K = \frac{1}{2}(k_1 k_2 - t_1^2) \quad (2.24)$$

Наведені співвідношення дозволяють отримати формулу Брунса

$$\frac{\partial g}{\partial H^*} = -2gJ + 4\pi G\delta - 2\omega^2, \quad (2.25)$$

яка має наступну інтерпретацію [29]. Ліва частина (2.25), є важливим геодезичним параметром або зміною сили тяжіння з нормальною висотою. Середня кривина J рівневої поверхні є геометричною характеристикою, δ як густина планети є фізичною величиною, а ω як кутова швидкість Землі є астрономічним параметром. Тобто, формула (2.25) виражає геодезичний параметр через геометричну, геофізичну та астрономічну характеристики планети.

Ще раз звернемо увагу на те, що загальноприйнята топоцентрична система $PXYZ$, в якій задані тензори Етвеша і Маруссі є лівою системою, а загальноземна геоцентрична координатна система $Oxyz$ є правою системою. Саме тому з'являються специфічні особливості як при переході від однієї до другої, так і при перетворенні елементів тензора других похідних з локальної системи до глобальної або навпаки. Незважаючи на останнє, як параметр $\partial g / \partial H^*$, так і J , δ , ω є інваріантними відносно перетворень системи координат геодезичними, геометричними, геофізичними та астрономічними характеристиками відповідно. Таке ствердження не має відношення до тензора Етвеша або тензора Маруссі, оскільки компоненти тензора за визначенням мають властивість змінюватися при перетвореннях координатної системи.

Саме з появою багаточисельних робіт, що стосуються як опрацювання вимірювань варіометра методом колокації [42], [96], [97], так і даних супутникової градієнтометрії проекту GOCE, які з 2009 р. стали вже вимірюваними у супутниковій локальній системі величинами, то для зручності

обчислень виникла необхідність введення правої локальної топоцентричної системи. З цієї точки зору ми приймаємо нижче координатну систему ENU ($Px_1x_2x_3$) [14] з напрямом осей: “Схід-Північ-Вверх”, початок P якої співпадає з біжучою точкою P , оскільки остання була використана для побудови рекурсивних співвідношень обчислень градієнту потенціалу до третього порядку включно.

В системі ENU вісь x_1 має напрям на схід, вісь x_2 – на північ ортогонально до x_1 , а вісь x_3 проходить через точку P по радіусу r з напрямом до локального zenіту. Фундаментальна площина $x_1 = 0$ цієї системи співпадає з локальним горизонтом у точці P . Представимо тепер головну частину тензора Етвеша (тензор других похідних гравітаційного потенціалу) або тензор гравітаційного градієнта у правих геоцентричній \mathbf{V}_E і топоцентричній \mathbf{V}_t системах

$$\mathbf{V}_E = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

і поставимо задачу перетворення компонент матриці \mathbf{V}_E від глобальної до локальної топоцентричної координатної системи.

Спочатку запишемо відомі перетворення від глобальної декартової системи $Oxyz$ до системи сферичних екваторіальних координат

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \varphi \cos \lambda, \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda, \\ z &= r \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \lambda &= \arctan(y/x), \\ \varphi &= \arcsin(z/r), \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

де r – радіус-вектор біжучої точки P , φ і λ – її геоцентричні широта та довгота. На першому кроці розглянемо задачу знаходження ортогональної матриці \mathbf{R} переходу від глобальної декартової системи до локальної топоцентричної, яка згідно [14] приймає наступну форму

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \varphi, r)} \mathbf{D}, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag} \left[\frac{1}{r \cos \varphi}, \frac{1}{r}, 1 \right], \quad (2.29)$$

де якобіан $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\lambda, \varphi, r)}$ перетворення визначається традиційним шляхом.

Виконаємо тепер згідно [14] трансформацію компонент вектора $\text{grad}V = (F_x, F_y, F_z)$ і тензора \mathbf{V}_E на основі матриці \mathbf{R} (2.28) від глобальної декартової системи до локальної:

$$[F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}] = [F_x, F_y, F_z] \cdot \mathbf{R}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{V}_t = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{V}_E \cdot \mathbf{R}, \quad (2.31)$$

і на основі (2.30), (2.31) та властивостей ортогональних матриць легко отримаємо обернене перетворення

$$[F_x, F_y, F_z] = [F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}] \cdot \mathbf{R}^T, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{V}_E = \mathbf{R} \cdot \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{R}^T. \quad (2.33)$$

Подібні співвідношення мають місце і у випадку переходу від правої до лівої системи топоцентричної координат ($PXYZ$) NEU [96] з напрямом осей “Північ-Схід-Вверх”, початок P якої співпадає з точкою P що характеризується вектором координат $\mathbf{X}_P = (X_P, Y_P, Z_P)^T$. В системі NEU вісь X має напрям на північ, вісь Y – на схід ортогонально до X , а вісь Z співпадає з вектором сили тяжіння у точці P . Перетворення вектора $\mathbf{r}_E = (x, y, z)^T$ з глобальної правої системи до вектора $\mathbf{r}_E = (X, Y, Z)^T$, відомого у топоцентричній лівій системі координат, приймає форму

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{X}_P + \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{R}_2(\vartheta) \cdot \mathbf{R}_3(\lambda) \cdot \mathbf{r}_E = \mathbf{X}_P + \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{r}_E, \quad (2.34)$$

де $\mathbf{D}_1 = \text{diag}[-1, 1, 1]$ – матриця зеркального відображення, яка введена для переходу від правої до лівої координатної системи. Після запису стандартних ортогональних матриць повороту на астрономічну широту Φ і довготу Λ :

$$\mathbf{R}_2(\Phi) = \begin{pmatrix} \sin\Phi & 0 & -\cos\Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\Phi & 0 & \sin\Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_3(\Lambda) = \begin{pmatrix} \cos\Lambda & \sin\Lambda & 0 \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

легко отримати правило переходу координат від глобальної до топоцентричної системи

$$\mathbf{R}_L = \begin{pmatrix} -\sin\Phi \cos\Lambda & -\sin\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \\ -\sin\Lambda & \cos\Lambda & 0 \\ \cos\Phi \cos\Lambda & \cos\Phi \sin\Lambda & \cos\Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{X}_P + \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{r}_E, \quad (2.36)$$

де \mathbf{R}_L – матриця повороту від правої до лівої координатної системи. Враховуючи що матриця \mathbf{R}_L є транспонованою по відношенню до матриці (9) [96], яка реалізує перетворення градієнтів першого та другого порядку, запишемо згідно [96] трансформацію похідних потенціалу з локальної до глобальної системи координат та навпаки

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_L^T \cdot \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_L \cdot \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{V}_E = \mathbf{R}_L^T \cdot \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{R}_L, \quad \mathbf{V}_t = \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{V}_E \cdot \mathbf{R}_L^T. \quad (2.38)$$

На відміну від співвідношень (2.30) – (2.33) в останніх формулах перетворення (2.37) – (2.38), ми вибираємо компоненти сил $[F_x, F_y, F_z]^T$ та елементи тезора гравітаційного градієнта \mathbf{V}_t заданими в *лівій* топоцентричній системі. Використання матриці \mathbf{R}_L повороту від правої до лівої координатної системи дає можливість обчислення за формулами (2.37) – (2.38) перетворення компонент сил $[F_x, F_y, F_z]^T$ та елементів тезора гравітаційного градієнта \mathbf{V}_E в геоцентричній системі координат.

2.2 Аномальний потенціал та основні геодезичні функціонали

Як було вже відзначено раніше оскільки еквіпотенціальний еліпсоїд описує головну частину гравітаційного поля (близько 95%) сили тяжіння, то різниця між потенціалом сили тяжіння W і нормальним потенціалом U називається аномальним або аномальним потенціалом T . Функція T знайшла

найбільш широке використання при побудові лінійних моделей фізичної геодезії

$$W(x, y, z) = U(x, y, z) + T(x, y, z), \quad (2.39)$$

для трансформант аномального потенціалу $(\Delta g, \xi, \eta, \zeta, \delta g)$, відомих ще як лінійні геодезичні функціонали на потенціалі T . Для їх введення використаємо класичне порівняння поверхонь (квазі)геоїда і референц еліпсоїда [29]:

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{const}, \quad U(x, y, z) = W_0 = \text{const}, \quad (2.40)$$

приймаючи на цих поверхнях (2.40) однакові потенціали $U_0 = W_0$. Перед порівнянням відповідних векторів сили тяжіння та нормальної сили тяжіння, зауважимо, що зазначені векторні характеристики мають відношення до різних локальних систем координат. Зокрема, сила тяжіння \mathbf{g} задана у локальній астрономічній (натуральній) g -системі, а нормальна сила тяжіння γ задана у локальній геодезичній γ -системі [64]. Таким чином, на відміну від відповідної до потенціалу $T = W - U$ скалярної різниці

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_p - \gamma_p, \quad (2.41)$$

яка має назву «чисті» аномалії, для різниці двох відповідних векторних характеристик необхідне їх приведення у єдину координатну систему. Запишемо компоненти векторів сили тяжіння \mathbf{g} та нормальної сили тяжіння γ :

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g)_g^T, \quad \gamma = (0, 0, -\gamma)_\gamma^T, \quad (2.42)$$

де відповідні локальні координати прийнятих систем показано індексами g , γ та зауважимо, що вектор координат \mathbf{r}^g , відомий у g -системі перетворюється у вектор \mathbf{r}^γ , заданий у γ -системі за наступним правилом

$$\mathbf{r}^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & \eta \tan B & \xi \\ -\eta \tan B & 1 & \eta \\ -\xi & -\eta & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{r}^g. \quad (2.43)$$

У формулі (2.43) прийнято наступні вирази для елементів матриці повороту

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\Phi_p - B_p), \\ \eta &= (A_p - L_p) \cos B, \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

де ξ та η складові відхилення прямої лінії у напрямках “північ – південь” та “схід – захід” відповідно. На основі (2.43) тепер неважко представити вектор \mathbf{g} (2.42) у локальній геодезичній γ -системі $\mathbf{g} = -g(\xi, \eta, 1)_{\gamma}^T$ і знайти компоненти вектора «чистих» аномалій в геодезичній γ -системі

$$\delta\mathbf{g} = \mathbf{g} - \boldsymbol{\gamma} = -g(\xi, \eta, 1)_{\gamma}^T - (0, 0, -\gamma)_{\gamma}^T = (-g\xi, -g\eta, -\delta g)_{\gamma}^T = (-\gamma\xi, -\gamma\eta, -\delta g)_{\gamma}^T. \quad (2.45)$$

Слід зауважити, що заміна g на γ в останній формулі була зроблена за рахунок малих значень відхилень прямої лінії, що майже не впливає на точність формул. Рис. 2.1 ілюструє проєкцію одержаних компонентів вектора «чистих» аномалій $\delta\mathbf{g}$ на осі $(x^{\gamma}, y^{\gamma}, z^{\gamma})$ геодезичної локальної системи координат згідно (2.45).

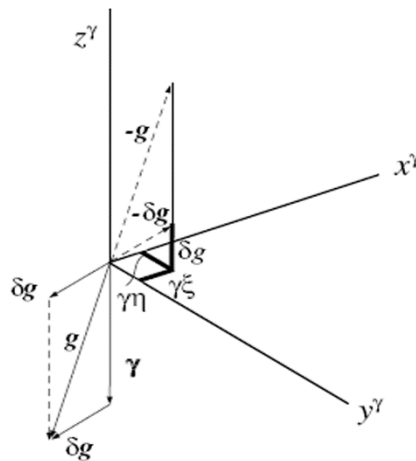


Рис. 2.1 Проєкції компонентів вектора «чистих» аномалій $\delta\mathbf{g}$ на осі $x^{\gamma}, y^{\gamma}, z^{\gamma}$ [92]

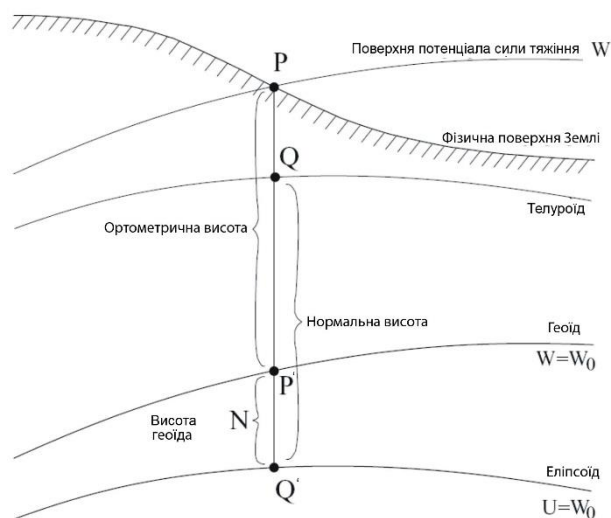


Рис. 2.2 Геометрія основних відлікових поверхонь

Використовуючи тепер оператор Гамільтона, отримаємо на основі (2.45):

$$\delta \mathbf{g} = \nabla W - \nabla U = \nabla(W - U) = \nabla T = \text{grad} T, \quad (2.46)$$

в результаті чого компоненти (2.46) у декартовій та сферичній системах координат набувають наступну форму

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial B} = -\gamma \xi, \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{r \cos B} \frac{\partial T}{\partial L} = -\gamma \eta, \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= \frac{\partial T}{\partial r} = -\delta g, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

Таким чином, три компоненти вектора «чистих» аномалій $\delta \mathbf{g}$, які розглядаються вище у локальній системі координат є вимірюваними характеристиками аномального гравітаційного поля Землі. Сама скалярна величина «чистих» аномалій δg до появи GNSS-технологій мала лише теоретичне значення і знайшла широке застосування як вимірюваний параметр лише після об'єднання GNSS-технологій з аерогравіметричними вимірами [69]. Крім строгих співвідношень (2.44) у сферичному наближенні ми отримуємо згідно (2.47) наступні формули для трансформант, що обговорюються

$$\left. \begin{aligned} \xi_P &= -\frac{1}{\gamma_Q r_P} \frac{\partial T_P}{\partial \varphi_P}, \\ \eta_P &= -\frac{1}{\gamma_Q r_P \cos \varphi_P} \frac{\partial T_P}{\partial \lambda_P}, \end{aligned} \right\} \quad \delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} \cong -\frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.48)$$

де (r, φ, λ) – полярні екваторіальні координати зовнішньої точки (r – геоцентрична відстань, φ – геоцентрична широта, λ – довгота), n – нормаль до еліпсоїда.

Після порівняння поверхонь (2.40) одержуємо на основі формули Брунса ще одну трансформанту гравітаційного потенціалу у вигляді відстані ζ між ними

$$\zeta_P = \frac{T_P}{\gamma_Q}, \quad (2.49)$$

де аномальний потенціал T розглядається у точці P на поверхні Землі. Ця відстань має назву аномалії висоти (або висоти (квазі)геоїда) і пов'язана з

концепцією нормальних висот H^γ . Аномалії висот та нормальні висоти тісно пов'язані з висотою (квазі)геоїда ξ і ортометричними висотами H^* , в результаті цього геодезична висота H може бути представлена у кожній точці земної поверхні:

$$H = H^\gamma + \zeta = H^* + N. \quad (2.50)$$

Виконаємо тепер перехід до найбільш поширеної вимірюваної трансформанти потенціалу – аномалії сили тяжіння Δg . Згідно [29] отримаємо за визначенням

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (2.51)$$

де g_P – сила тяжіння у точці P ($W=W_0$); γ_Q – нормальна сила тяжіння у точці Q ($U=U_0=W_0$). Оскільки значення γ у цих двох точках пов'язано традиційним виразом

$$\gamma_P = \gamma_Q + \frac{\partial \gamma}{\partial n} N, \quad (2.52)$$

то після використання формули Брунса отримаємо наступне рівняння

$$-\frac{\partial T}{\partial n} = \delta g = g_P - \gamma_P = g_P - \gamma_Q - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} T. \quad (2.53)$$

Приймаючи тепер визначення (2.51) аномалії сили тяжіння, отримаємо фундаментальне рівняння фізичної геодезії у сферичній апроксимації

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{r}, \quad (2.54)$$

оскільки нормальна сила тяжіння та відповідний градієнт з формули (2.53) приймають наступні вирази

$$\gamma = \frac{GM}{r^2}, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial n} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} = -2 \frac{GM}{r^3}, \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial n} = -\frac{2}{r}. \quad (2.55)$$

Крім того, легко показати з врахуванням (2.48), що «чисті» аномалії можуть бути представлені через аномалію сили тяжіння у наступній формі

$$\delta g = \Delta g + \frac{2T}{r}. \quad (2.56)$$

Слід зауважити, що розглянуті п'ять трансформант (лінійних геодезичних функціоналів) аномального потенціалу широко

використовуються для знаходження функції T . Як добре відомо, використання аномалій сили тяжіння (або «чисті» аномалії) для визначення гравітаційного потенціалу Землі потребує їх редукції на поверхню (квазі)геоїда, для цього необхідне знання густини мас над (квазі)геоїдом. Зазначені труднощі були розв'язані Молоденським в межах іншого підходу. Згідно роботи [5] для визначення потенціалу сили тяжіння W повинно задовільнятися наступне рівняння у кожній точці P земної поверхні

$$W(P) = U(Q). \quad (2.57)$$

Точка Q є проекцією точки P на допоміжну поверхню, яка була названа гіпсометричною поверхнею або телуроїдом. Задача Молоденського не потребує редукції сили тяжіння на (квазі)геоїд. Замість цього використано редукції нормальної сили тяжіння на поверхню телуроїда незалежно від розподілу земних мас.

Представимо тепер розглянуті трансформанти у вигляді розкладу в ряди сферичних функцій. Для цього згадаємо, що потенціал сили тяжіння W представляє суму $W = V + \Phi$ зовнішнього гравітаційного потенціалу V Землі та потенціалу відцентрової сили Φ . Потенціал V може бути представленим у стандартному вигляді

$$V = \frac{GM_M}{r} \sum_{n=0}^{N^*} \left(\frac{a_M}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin\varphi), \quad (2.58)$$

де \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти гравітаційного потенціалу Землі; $\bar{P}_{nm}(\sin\varphi)$ – повністю нормовані приєднані функції Лежандра степені n і порядку m ; GM – добуток гравітаційної сталої на масу прийнятої моделі Землі; a – велика піввісь земного еліпсоїда, до якої віднесені коефіцієнти \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} вибраної моделі планети; N^* – максимальна степінь розкладу потенціалу V в ряд типу (2.58); (r, φ, λ) – сферичні полярні координати точки, в якій обчислюється V .

Аномальний потенціал T гравітаційного поля Землі, висоти (квазі)геоїда ζ , аномалії у вільному повітрі Δg і «чисті» аномалії δg тепер можуть бути

вираженими розкладом в ряд сферичних гармонік у прийнятій геодезичній референційній системі

$$T = W - U = \sum_{n=0}^{N^*} T_n(r, \varphi, \lambda), \quad \zeta = \frac{T}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \sum_{n=0}^{N^*} T_n(r, \varphi, \lambda), \quad (2.59)$$

$$\Delta g = \sum_{n=0}^{N^*} \frac{(n-1)}{r} T_n(r, \varphi, \lambda), \quad \delta g = \sum_{n=0}^{N^*} \frac{(n+1)}{r} T_n(r, \varphi, \lambda), \quad (2.60)$$

де

$$T_n(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM}{r} \left(\frac{a}{r} \right)^n \cdot \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi). \quad (2.61)$$

Крім того, функція U – нормальний потенціал сили ваги $U = V_e + \Phi$; γ – нормальне значення сили ваги на поверхні референц-еліпсоїда; $\Delta \bar{C}_{nm}$ і \bar{S}_{nm} – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти аномального потенціалу

$$\Delta \bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm} - \frac{GM_e}{GM} \left(\frac{a_e}{a} \right)^n \bar{C}_{nm}^e, \quad (2.62)$$

де \bar{C}_{nm}^e – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти потенціалу нормального еліпсоїда ($\bar{S}_{nm}^e \equiv 0$); GM_e та a_e – відповідні константи нормального еліпсоїда, які можуть співпадати з величинами GM і a . Зауважимо, що наведені формули (1.59) – (1.62) дозволяють провести обчислення не тільки у вибраній геодезичній референційній системі (GRS80 або WGS84) [72], але й зі “своїми” параметрами GM і a прийнятої моделі гравітаційного поля Землі.

У випадку використання формули (2.61) як базової замість спеціальних алгоритмів сумування рядів кульових функцій наведемо одні з найбільш поширених формул рекурсивного обчислення повністю нормованих функцій Лежандра, які базуються на добре відомих співвідношеннях для ненормованих функцій Лежандра [51]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{m,m}(\sin \varphi) &= f_{nm}^{(1)} \cos \varphi \cdot \bar{P}_{m-1,m-1}(\sin \varphi), \\ \bar{P}_{n,m}(\sin \varphi) &= f_{nm}^{(2)} \left(\sin \varphi \cdot \bar{P}_{n-1,m}(\sin \varphi) - (f_{n-1,m}^{(2)})^{-1} \bar{P}_{n-2,m}(\sin \varphi) \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

з наступними множниками та початковим значенням $\bar{P}_{00}(\sin \varphi) = 1$.

$$\left. \begin{aligned} f_{11}^{(1)} &= \sqrt{3}, \\ f_{mm}^{(1)} &= \sqrt{\frac{2m+1}{2m}}, \\ f_{nm}^{(2)} &= \sqrt{\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+m)(n-m)}}, \end{aligned} \right\} \quad (2.64)$$

2.3 Застосування квадратурних формул на сфері

Квадратурні формули в цілому, як описано в [3], є широко використовуваним інструментом для чисельного інтегрування. Застосування квадратур використовуються для визначення сферичних гармонічних коефіцієнтів на основі дискретних значень гравітаційного поля передбачених на рівномірній сітці. Коли сферичні гармонічні коефіцієнти розраховані по заданій функції, використовується властивість ортогональності сферичних гармонік.

$$C_{nm} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} f(x) Y_{nm}(x) d\Omega \quad (2.65)$$

Інтеграл повинен бути апроксимованим за сумами ваг значень функції $f(x_i)$ в заданих точках (x_i) , отримаємо

$$C_{nm} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I w_i f(x_i) Y_{nm}(x_i), \quad (2.66)$$

де ваги w_i можна розглядати як елемент поверхні пов'язаний з точкою на рівномірній сітці. Ваги сумують до площі поверхні одиничної сфери.

$$\sum_{i=1}^I w_i = 4\pi. \quad (2.67)$$

Рівняння (2.66) забезпечує правильний результат, якщо ортонормальність сферичних гармонік зберігається при перетворенні неперервної дискретної (зваженої) суми, якщо виконуються наступні співвідношення, то має місце дискретний випадок

$$\left(Y_{nm}(x), Y_{n'm'}(x) \right)_w = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^I Y_{nm}(x_i) Y_{n'm'}(x_i) w_i = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.68)$$

Взагалі, це не вірно і для довільного розподілу точок і відповідних ваг w_i . Проблема дискретної ортогональності може бути вирішена шляхом

дослідження ваг відповідного методу найменших квадратів для оцінки сферичних гармонічних коефіцієнтів, що описано в [92]. Якщо базисні функції Y_m , об'єднані в матриці A , і ваги об'єднуються в діагональну матрицю W , то оцінка коефіцієнтів за методом найменших квадратів буде мати наступний вигляд

$$c = (A^T W A)^{-1} A^T W f \quad (2.69)$$

Для того, щоб порівняти цей результат з даною квадратурною формулою, (2.66) може бути записана в матричному вигляді,

$$c = A^T W f \quad (2.70)$$

Очевидно, що два результати ідентичні у випадку нормального матричного рівняння $N = A^T W A$, є одинична матриця

$$N = A^T W A = I \quad (2.71)$$

Кожен елемент матриці N , являє собою ваговий скалярний добуток відповідних сферичних гармонік (2.68) Таким чином, значення N , окрім головної діагоналі, являють собою суму неортогональностей відповідних дискретних сферичних гармонік. Оскільки матриця нормальних рівнянь відрізняється від діагональної матриці, залежить з одного боку від щільності точок, а з іншого від вибору рівномірної сітки та відповідних до неї ваг.

2.4 Квадратурні формули Driscoll - Healy

Будь-яка рівномірна сітка являє собою механізм точок, який визначається як набір координат (λ_i, ϑ_i) на поверхні одиничної сфери.

Рівномірна сітка Driscoll - Healy була введена вченими Driscoll - Healy в 1994 році, вона має рівнокутну відстань вздовж меридіанів, а також вздовж кіл широти. У поздовжньому напрямку (вздовж паралелей), ці кутові відмінності для даної розмірності L збігаються з Гауссовою та географічною рівномірними сітками. Уздовж меридіанів, зміни по широті в два рази менші в порівнянні з географічною рівномірною сіткою.

$$\Delta\lambda = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_i = \frac{\Delta\lambda}{2} + i \cdot \Delta\lambda, \quad 0 \leq i \leq 2L \quad (2.72)$$

$$\Delta\vartheta = \frac{\pi}{2L} \Rightarrow \vartheta_j = j \cdot \Delta\vartheta, 1 \leq j \leq 2L \quad (2.74)$$

Отже, число точок сітки визначається за формулою:

$$I = 4 \cdot L^2 \quad (2.75)$$

Рівномірна сітка Driscoll - Healy міцно об'єднана з відповідними квадратурними формулами. Концепція квадратурної формули (та відповідна рівномірна сітка), [71]; [17], дала змогу розробити замкнені вирази для відповідних квадратурних ваг, тому цей метод та розподіл точок на сфері були названі відповідно квадратурами Driscoll - Healy та рівномірною сіткою Driscoll - Healy.

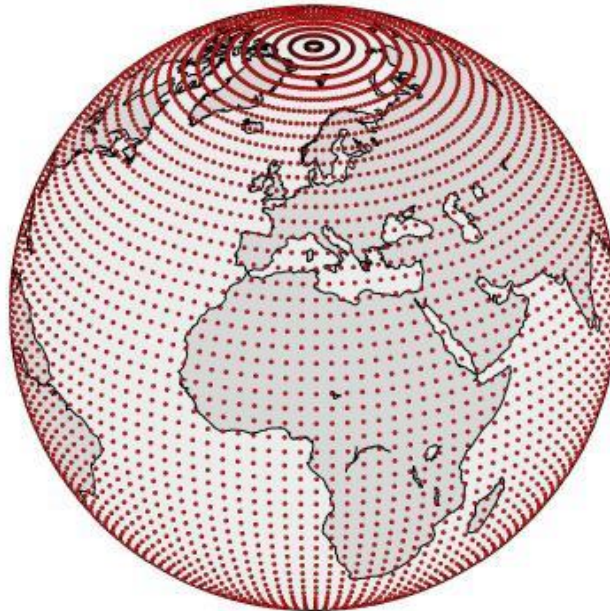


Рис.2.3 Рівномірна сітка Driscoll - Healy

З'ясувалося, що точне чисельне інтегрування сферичних гармонік до степеня $N = L - 1$, можливо при використанні $2L$ кіл широти. Вони можуть бути обрані довільно, але повинні бути різні. Наприклад, рівновіддалених розподілення паралелі можливо. Цей метод квадратур також називають як 'Перший метод Нейманна', [92]. Вчені Driscoll та Healy в 1994 році розробили узагальнені положення для ваг точок які розташовані на рівномірній сітці. Аналітичне обчислення ваги для чисельного інтегрування вздовж паралелей

$$\sum_{j=0}^{2L-1} w_j P_k \left(\cos \frac{j\pi}{2L} \right) = 2\delta_{k0} \quad (2.76)$$

Це призводить до визначення наступних ваг [17], з додатковими поясненнями [62]

$$\bar{w}_i = \frac{4}{2L} \sin(\vartheta_i) \sum_{l=0}^{L-1} \frac{\sin[(2l+1)\vartheta_i]}{2l+1} \quad (2.77)$$

Для отримання ваги \bar{w}_i їх потрібно помножити на $\Delta\lambda$.

$$w_i = \bar{w}_i \cdot \Delta\lambda \quad (2.78)$$

2.5 Модифікація квадратурних формул Gauss-Legendre для супутникової градієнтометрії

Окремий випадок найбільш точної квадратурної функції досягається за рахунок обмеження рівномірної сітки Gauss-Legendre. Нейман вибрав варіант, коли широта кіл збігається з нулями полінома Лежандра степеня $L+1$ [92], тобто

$$P_{L+1}(x_i) = 0, \text{ де } i = 1, 2, \dots, L+1 \quad (2.79)$$

Кількість паралелей можна зменшити до $N = L+1$

Розташування точок на сфері у вузлах рівномірної сітки Gauss-Legendre істотно пов'язано з квадратурними формулами Gauss-Legendre. Особливостями цієї рівномірної сітки – рівностороння відстань вздовж L - кіл широти.

$$\Delta\lambda = \frac{\pi}{L} \Rightarrow \lambda_i = \frac{\Delta\lambda}{2} + i \cdot \Delta\lambda \quad (2.80)$$

$$0 \leq i \leq 2L.$$

Вздовж меридіанів точки розташовані від L паралелей до L нулів, полінома Legendre степеня L_0

$$P_L(\cos \vartheta_j) = 0 \quad (2.81)$$

Отже, число точок сітки в сумі дає

$$I = 2 \cdot L^2 \quad (2.82)$$

Рівномірна сітка Gauss-Legendre виглядає дуже схожою до відповідної географічної рівномірної сітки з тим же числом паралелей. Її особливістю є унікальний вибір в колах широти.

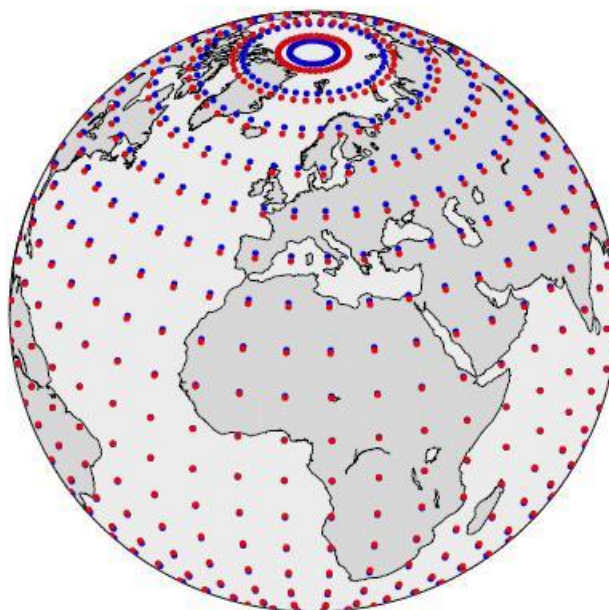


Рис.2.4 Порівняння Gauss-Legendre (червоний) та географічної рівномірної сітки (синій) $L = 18$

Квадратурні формули Gauss-Legendre дозволяють відновлення сферичних гармонік степеня до $N = L = 1$ степеня, де L кола широти [93]. З іншого боку паралелі не можуть бути обрані довільно, але можуть бути розташовані довільно вздовж нулів поліномів Legendre степеня L .

Тому, квадратурні вузли в методі Gauss-Legendre збігаються з точками рівномірної сітки Gauss-Legendre. Вони мають рівносторонню відстань вздовж кіл широти, в той час як вздовж меридіанів вузлові точки, розташовані від L нулів поліномів Legendre до степеня L . Враховуючи специфіку сферичних гармонічних функцій, ортогональність на такій дискретній множині точок може бути визначена.

Тригонометрична функція Y_{lm} залежна лише від довготи λ і пов'язана з функцією Лежандра залежною від полярної відстані ϑ . Це дозволяє окремо досліджувати поведінку базисних функцій у широтному та довготному напрямках.

Визначення гармонічних коефіцієнтів може бути поділене на два кроки

$$\left. \begin{matrix} a_m(\vartheta) \\ b_m(\vartheta) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{(1 + \delta_{m0}\pi)} \int_0^{2\pi} f(x) \left\{ \begin{matrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{matrix} \right\} d\lambda, \quad (2.83)$$

$$\left. \begin{matrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1 + \delta_{m0}}{4} \int_0^\pi \left\{ \begin{matrix} a_m(\vartheta) \\ b_m(\vartheta) \end{matrix} \right\} P_{nm}(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta. \quad (2.84)$$

Довготний напрямок

Рівнокутна відстань у поздовжньому напрямку має довжину $2L$ в точках вздовж кожного кола широти. На такій регулярній конфігурації, тригонометричні функції виконують умову дискретної ортогональності функцій.

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos m\lambda_i \cos \bar{m}\lambda_i = (1 + \delta_{m0} + \delta_{mL}) L \delta_{m\bar{m}} \quad (2.85)$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \sin m\lambda_i \sin \bar{m}\lambda_i = (1 + \delta_{m0} + \delta_{mL}) L \delta_{m\bar{m}} \quad (2.86)$$

$$\sum_{i=0}^{2L-1} \cos m\lambda_i \sin \bar{m}\lambda_i = 0 \quad (2.87)$$

Таким чином перетворення інтегрального виразу (2.83) до дискретної суми забезпечує точний результат. Окремий розрахунок в довготному напрямку, корисно з обчислювальної точки зору, використовувати метод швидкого перетворення Фур'є (FFT), для оцінки (2.83)

Широтний напрямок

Більш важливим для квадратур є напрямок вздовж меридіанів. Тут вона може бути використана як одновимірна Gauss-Legendre квадратура, описана в [3], застосовується до значень функції, дає оцінюється в точки, певні $t_i = \cos\vartheta_i$. За правилом Gauss-Legendre квадратури многочлен степеня $2L-1$ може бути точно інтегрованим з оцінювання L , значень функції

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^L f(t_i) w_i \quad (2.88)$$

Квадратура, ортогональні поліноми, якої є поліномами Legendre P_n , і інтервал інтегрування дорівнює $[a, b] = [-1, 1]$. Ваги w_i , можуть бути отримані з використанням характеристик ортогональних многочленів. Для одновимірних

квадратур вздовж меридіанів, ваги в даному спільних широт ϑ_i , залежать від кількості паралелей і довготи L мають вигляд

$$\bar{w}_i(L) = \frac{2}{(1 - t_i^2)(P'_L(\cos(\vartheta_i)))^2} \quad (2.89)$$

Як говориться в (Stroud and Secrest (1966)), множення на $\Delta\lambda$, дає нам кінцеві ваги, які будуть використовуватись в (1.66).

$$w_i = \bar{w}_i \cdot \Delta\lambda \quad (2.90)$$

2.6 Квадратурні формули О.Солонбо

В 1981 році Oscar Colombo розробив свої квадратурні формули для визначення сферичних гармонік [18].

Відстань між лініями широти, у рівномірній сітці, що застосовується в цьому підході, може бути змінною, але між меридіанами завжди стала і дорівнює $\Delta\lambda = \frac{\pi}{N}$, де N завжди ціле. Для цих квадратурних формул найчастіше розглядається рівномірна сітка, яку ще називають регулярною рівномірною сіткою. У цьому випадку $\Delta\theta$ завжди стала та дорівнює $\Delta\lambda$.

Для рівнокутової рівномірної сітки i та j приймають наступні значення $0 \leq i \leq N-1$ та $0 \leq j \leq 2N-1$.

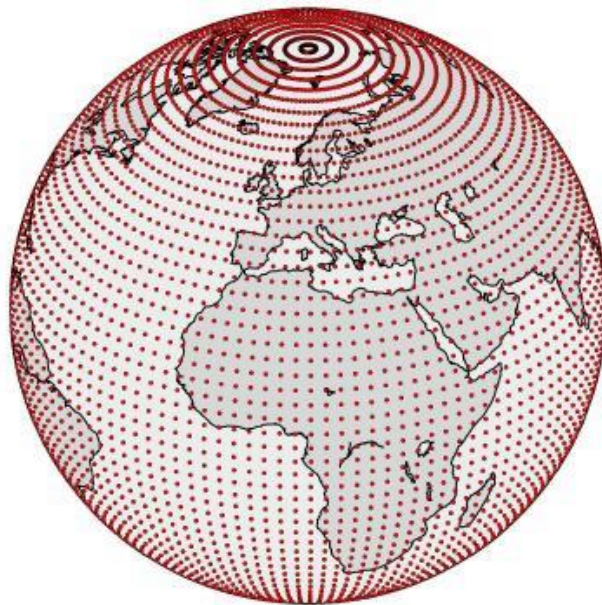


Рис.2.5 Регулярна (географічна) рівномірна сітка

Область середнього значення є визначена за допомогою наступних формул, з умовою, що $0 \leq \theta \leq \pi$ та $0 \leq \lambda \leq 2\pi$

$$\bar{f}_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha=0}^1 \bar{C}_{nm}^{\alpha} \int_{\alpha_{ij}} \bar{Y}_{nm}^{\alpha}(\theta, \lambda) d\alpha = \frac{1}{\Delta_{ij}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\alpha=0}^1 \int_{\theta_j}^{\theta_i + \Delta\theta} \bar{P}_{nm}(\cos\theta) \sin\theta d\theta \times$$

$$\times \left[\bar{C} \int_{\lambda_i}^{\lambda_j + \Delta\lambda} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \int_{\lambda_i}^{\lambda_j + \Delta\lambda} \sin m\lambda d\lambda \right] \quad (2.91)$$

Де \bar{f}_{ij} є середнім значенням $f(\theta, \lambda)$ на елементі сфери σ_{ij} , площа якого

$$\Delta_{ij} = \Delta\lambda(\cos\theta_i - \cos(\theta_i + \Delta\theta)) \quad (2.92)$$

Основною властивістю сферичних гармонік є їх ортогональність

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \bar{Y}_{nm}^{\alpha}(\theta, \lambda) d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha = B, m = p, n = k \\ 0 & \end{cases} \quad (2.93)$$

Як наслідок, отримаємо

$$\bar{C}_{nm}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \bar{Y}_{nm}^{\alpha}(\theta, \lambda) f(\theta, \lambda) d\sigma \quad (2.94)$$

Дискретизація результатів на рівномірній сітці показана в наступній квадратурній формулі, так званої квадратурної формули O.Colombo

$$\hat{C}_{nm}^{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{2N-1} \bar{Y}_{nm}^{\alpha}(\theta_i, \lambda_j) f(\theta_i, \lambda_j) \Delta_{ij} \quad (2.95)$$

Де \hat{C}_{nm}^{α} вказує на оцінку \bar{C}_{nm}^{α} , цей тип формул, як правило, лише наближено.

2.7 Висновки та рекомендації

1. Розглянуто загальні відомості теорії Ньютонового гравітаційного потенціалу.
2. Описано тензор Етвеша та його зв'язок з тензором Маруссі та кривиною рівневої поверхні.
3. Досліджено метод перетворення гравітаційних функціоналів (вимірів) при переході від топоцентричної системи координат.
4. Розглянуто представлення гравітаційного поля Землі та аномального потенціалу у вигляді розкладу за сферичними гармоніками.

5. Описано загальну теорію квадратурних формул та можливість їх застосування для обчислення гармонічних коефіцієнтів розкладу гравітаційного поля Землі.

6. Проведено аналіз квадратурних формул Driscoll - Healy, Gauss-Legendre та O.Colombo. Оскільки в результаті експериментальних досліджень з моделювання зовнішнього гравітаційного поля Землі було встановлено, що квадратурні формули Gauss-Legendre мають кращу обчислювальну стійкість аніж квадратурні формули Driscoll - Healy та O.Colombo.

7. На основі попереднього висновку було прийнято рішення застосування квадратурних формул Gauss-Legendre для подальших досліджень та побудови гравітаційного поля Землі.

8. Модифіковано формули Gauss-Legendre для опрацювання даних супутникової градієнтометрії.

3 ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ГРАВІТАЦІЙНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛІ ЗА ДАНИМИ GOCE

3.1 Вихідні дані

Останнім досягненням науки у сфері супутникової геодезії є проект Європейського космічного агентства (ESA) - супутник GOCE, який використовує метод супутникової градієнтометрії.

Вихідними даними прийнято дані EGG_TRF_2 градієнтометра супутника GOCE (гравітаційні градієнти у системі LNOF, їх точність та географічні координати φ , λ , r) за період близько 3-х років. Використовуючи радіальні вертикальні градієнти $V_W = V_{ZZ}$, можна просто та швидко обчислити гармонічні коефіцієнти гравітаційного поля Землі. Зокрема, гравітаційні градієнти EGG_TRF_2 рекомендовано використовувати для побудови регіональних моделей гравітаційного поля Землі.

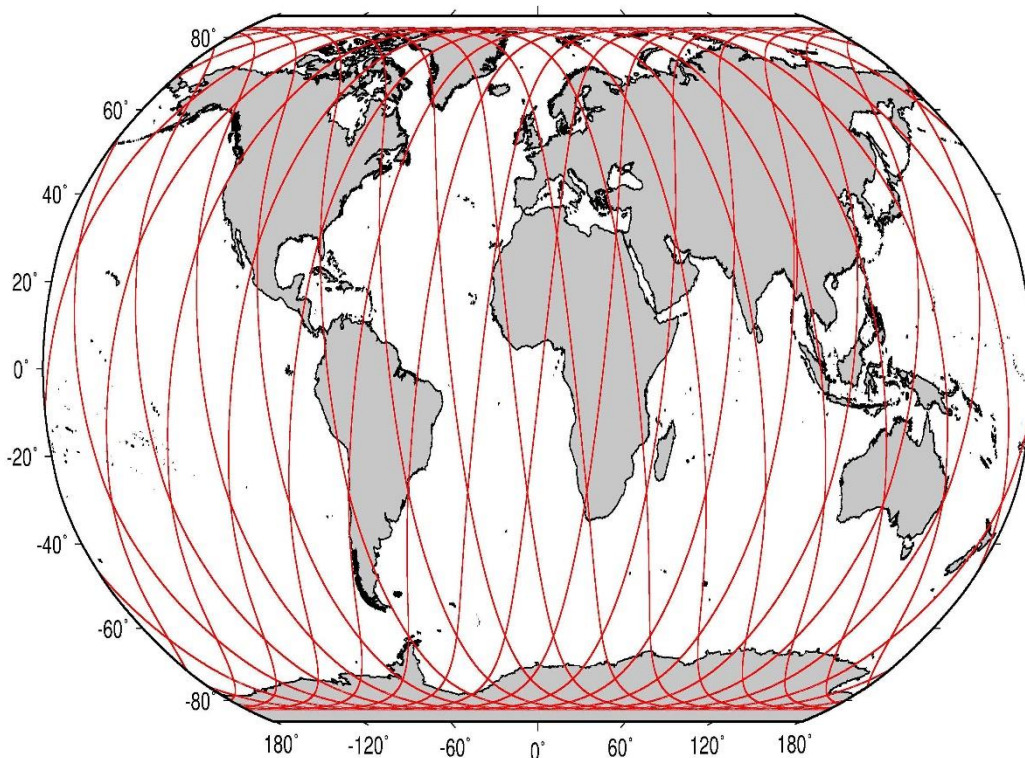


Рис.3.1 Розподіл підсупутникових трас супутника GOCE за період 1 день

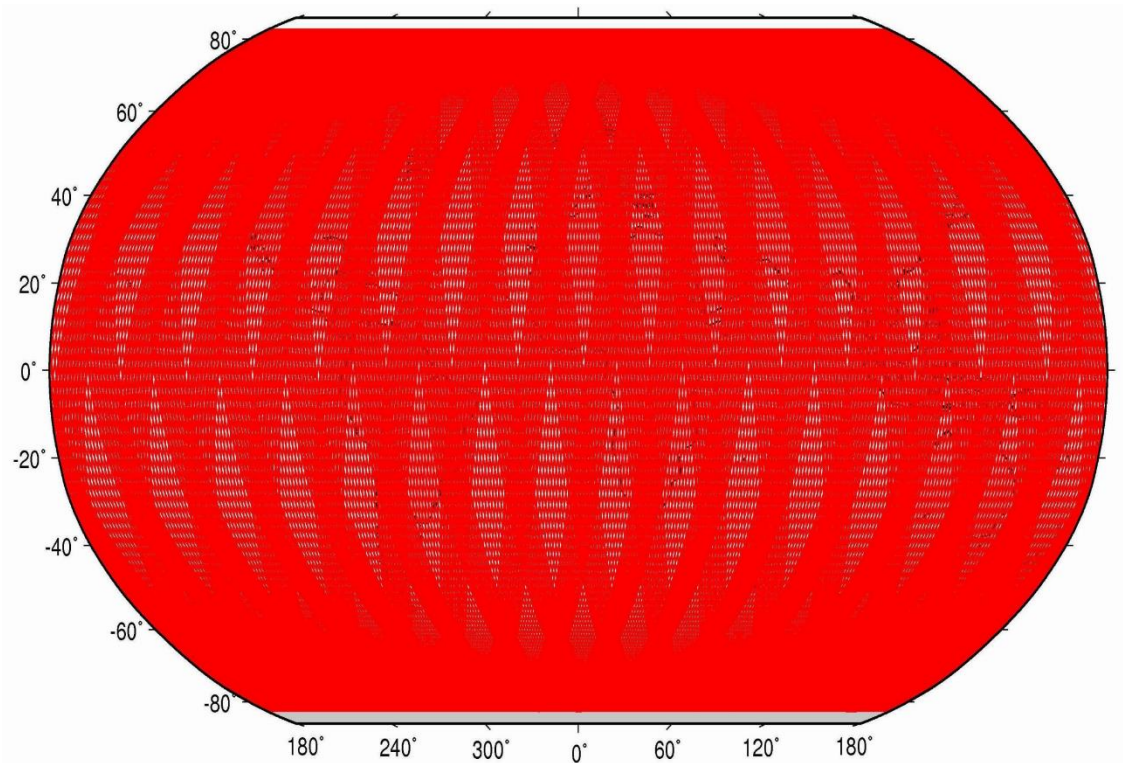


Рис.3.2 Розподіл підсупутникових трас супутника GOCE за період 1 місяць

3.2 Бракування даних

Перед початком обробки була проведена браковка даних, застосувалась браковка за критерієм 3δ

Розглянемо інтервал довжиною $(-\delta, +\delta)$. Обчислимо ймовірність потрапляння на цей інтервал нормально розподіленої випадкової величини, скориставшись наступною формулою

$$P(m-l \leq X \leq m+l) = \Phi_0\left(\frac{m+l-m}{\delta}\right) - \Phi_0\left(\frac{m-l-m}{\delta}\right) = \Phi_0\left(\frac{l}{\delta}\right) - \Phi_0\left(-\frac{l}{\delta}\right) = 2\Phi_0\left(\frac{l}{\delta}\right) \quad (3.1)$$

А тепер розв'яжемо таку задачу: відкладемо відрізки довжиною δ від центра розподілу праворуч і ліворуч тричі послідовно. Нагадаємо, що ймовірності потрапляння випадкової величини X на відрізки $m \pm \delta$, $m \pm 2\delta$, $m \pm 3\delta$, згідно [1]:

$$P(m - \delta \leq X \leq m + \delta) = 2\Phi_0\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 0,6826,$$

$$P(m - 2\delta \leq X \leq m + 2\delta) = 2\Phi_0\left(\frac{2\delta}{\sigma}\right) = 0,9544, \quad (3.2)$$

$$P(m - 3\delta \leq X \leq m + 3\delta) = 2\Phi_0\left(\frac{3\delta}{\sigma}\right) = 0,9972$$

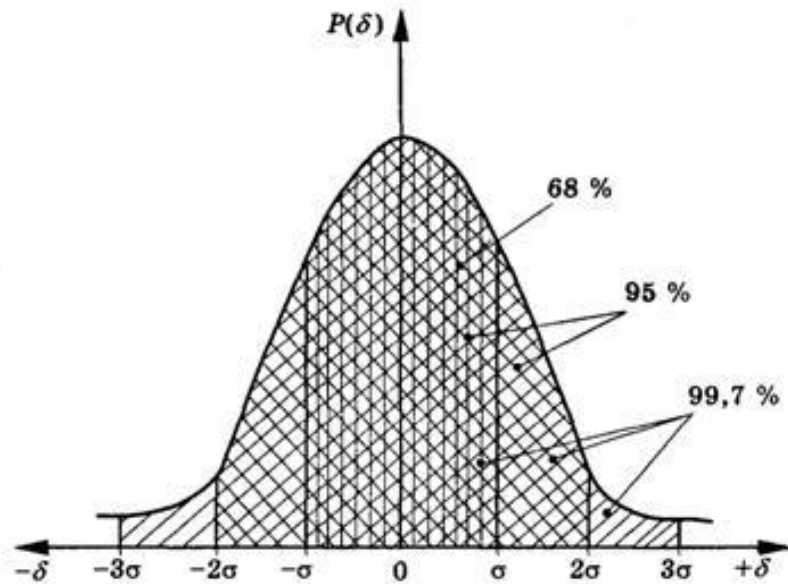


Рис.3.3 Нормальний Гауссовий розподіл

Отже ймовірність того, що випадкова величина X вийде за межі інтервалу $(m - 3\delta, m + 3\delta)$, буде:

$$P(|X - m| \geq 3\delta) = 1 - P(|X - m| \leq 3\delta) = 1 - 0,9972 = 0,0028 \quad (3.3)$$

На основі цих результатів сформульоване наступне важливе правило, - якщо випадкова величина X , має нормальний розподіл, то відхилення її від математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищує потрібного середнього квадратичного відхилення.

Після процесу бракування, із застосуванням (3.3) кількість даних прийняли наступний вигляд (табл.3.1)

Таблиця 3.1

	Дати вимірів	Кількість вимірів до браковки	Кількість вимірів після браковки
1.	31/10/2009	86400	86064
2.	01/11/2009 – 30/11/2009	2591998	2591998
3.	01/12/2009 – 31/12/2009	2678398	2678398
4.	01/01/2010 – 11/01/2010	891495	891488

5.	13/01/2010 – 31/01/2010	1641601	1641601
6.	01/02/2010 – 12/02/2010	974920	973941
7.	07/03/2010 – 19/03/2010	1123200	1123200
8.	25/03/2010 – 31/03/2010	587601	587601
9.	01/04/2010 – 30/04/2010	2591999	2591999
10.	01/05/2010 – 05/05/2010	432000	432000
11.	09/05/2010 – 31/05/2010	1983600	1983600
12.	01/06/2010 – 30/06/2010	2588991	25866564
13.	01/07/2010 – 31/07/2010	2156399	2156210
14.	01/11/2010 – 30/11/2010	2592000	2592000
15.	20/01/2011 – 26/01/2011	604799	604381
16.	29/01/2011 – 31/01/2011	259200	259200
17.	01/02/2011 – 07/02/2011	604800	603859
18.	11/02/2011 – 28/02/2011	1555200	1555200
19.	01/03/2011 – 31/03/2011	2678400	2678400
20.	01/04/2011 – 03/04/2011	259200	259200
21.	06/04/2011 – 30/04/2011	2160000	2159522
22.	01/05/2011 – 31/05/2011	2678400	2677685
23.	01/06/2011 – 06/06/2011	518400	518400
24.	09/06/2011 – 30/06/2011	1900800	1900322
25.	01/07/2011 – 29/07/2011	2496245	2496245
26.	30/07/2011 – 31/07/2011	155237	155237
27.	01/08/2011 – 23/08/2011	1917479	1917479
28.	24/08/2011 – 31/08/2011	647865	647865
29.	01/09/2011 – 23/09/2011	1973981	1973981
30.	28/09/2011 – 30/09/2011	259200	259200
31.	01/10/2011 – 25/10/2011	2084555	2084555
32.	26/10/2011 – 31/10/2011	480788	480788
33.	01/11/2011 – 30/11/2011	2588950	2588945
34.	01/12/2011 – 31/12/2011	2678400	2678400
35.	01/01/2012 – 11/01/2012	1392867	1392867
36.	18/01/2012 – 31/01/2012	1172477	1172477
37.	01/02/2012 – 29/02/2012	2505600	2505600
38.	01/03/2012 – 05/03/2012	359640	359640
39.	09/03/2012 – 15/03/2012	473737	473737
40.	16/03/2012 – 31/03/2012	1339020	1339020
41.	01/04/2012 – 30/04/2012	2592000	2592000
42.	01/05/2012 – 22/05/2012	1824070	1824059
43.	23/05/2012 – 31/05/2012	741285	741285
44.	01/06/2012 – 06/06/2012	518400	518400
45.	14/06/2012 – 16/06/2012	251202	251202
46.	17/06/2012 – 18/06/2012	153880	153880
47.	01/07/2012 – 31/07/2012	2668565	2668543
48.	01/08/2012 – 31/08/2012	2678373	2678373
49.	01/09/2012 – 10/09/2012	864000	864000
50.	12/09/2012 – 30/09/2012	1595814	1595814

51.	01/10/2012 – 31/10/2012	2662690	2662682
52.	01/11/2012 – 07/11/2012	604800	604800
53.	01/12/2012 – 31/12/2012	2567480	2567480
54.	01/01/2013 – 31/01/2013	2467950	2467949
55.	01/02/2013 – 28/02/2013	2567480	2567480
	Загальна кількість	80 860 570	80 849 326

3.3 Застосування процедури «вилучення – відновлення» для визначення

C_{nm}, S_{nm} .

Для обчислення моделі використовується різниця вимірних та модельних градієнтів, що в принципі являє собою техніку „вилучення - відновлення“.

Ми знайшли прирости коефіцієнтів з моделі

$$V_{ZZ} = V_{ZZ_M} + \delta V_{ZZ} \quad (3.4)$$

де V_{ZZ} – градієнти виміряні супутником, V_{ZZ_M} – градієнти побудовані за певною моделлю, δV_{ZZ} – різниці між вимірними та модельними градієнтами.

$$\delta V_{ZZ} = V_{ZZ} - V_{ZZ_M} \quad (3.5)$$

Співвідношення (3.4) традиційно пов’язане з наступним рівнянням:

$$\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}_M + \begin{Bmatrix} \delta C_{nm} \\ \delta S_{nm} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

де $\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}$ - значення гармонічних коефіцієнтів визначених за даними супутника, $\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}_M$ - модельні значення гармонічних коефіцієнтів, $\begin{Bmatrix} \delta C_{nm} \\ \delta S_{nm} \end{Bmatrix}$ – різниці між модельними та визначеними значеннями коефіцієнтів .

Зрозуміло, що складові V_{ZZ_M} і $\begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}_M$ можуть бути обчислені за допомогою однієї і тієї ж моделі геопотенціалу, тому можливим є виконати їх видалення

$$\begin{Bmatrix} \delta C_{nm} \\ \delta S_{nm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{Bmatrix}_M \quad (3.7)$$

3.4 Фільтрація за Кальманом для побудови рівномірної сітки Gauss-Legendre.

Фільтр Кальмана це математичний метод відкритий Рудольфом Кальманом у 1960 році [41]. Метою цього методу є використання вимірювань, які спостерігаються в часі і спотворених шумом (випадковими відхиленнями) та іншими неточностями і генерація значень, що ближчі до справжніх вимірювань.

Всі вихідні дані пройшли етап попередньої обробки та осереднення на рівномірній сітці (4x6) шляхом використання статичного фільтра Кальмана (рекурсивного методу найменших квадратів), ідея якого полягає в уточненні (оновленні) попередньо обчисленого середнього значення. Коли нові дані появляються, вони змінюють оцінюване середнє значення вимірів x :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + \frac{1}{k}(b_k - \hat{x}_{k-1}), \quad (3.8)$$

де \hat{x}_k - шукане середнє значення з даних; \hat{x}_{k-1} - попередньо відоме середнє значення з даних; k - кількість даних; b_k - значення виміру.

А оскільки у випадку супутника GOCE вихідна інформація доступна через певні проміжки часу порціями, то і вибір статичного фільтра Кальмана або рекурсивного методу найменших квадратів, сенс якого полягає в ідеї оновлення, стає зрозумілим.

При побудові моделей за великою кількістю даних, які спотворені похибками вимірів, у всіх випадках необхідним етапом є попередня їх фільтрація, наприклад методом швидкого перетворення Фур'є (FFT)

3.5 Побудова моделі GOCE-LP01s

Отже визначення гармонічних коефіцієнтів C_{nm} , S_{nm} або їх залишків δC_{nm} , δS_{nm} може бути поділене на такі кроки сумування

$$\left. \begin{matrix} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L(1 + \delta_{m0} + \delta_{mL})} \sum_{j=0}^{2L-1} V_{zz}(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{matrix} \right. \quad (3.9)$$

$$\left. \begin{matrix} \delta A_m(\theta_i) \\ \delta B_m(\theta_i) \end{matrix} \right\} = \frac{1}{L(1 + \delta_{m0} + \delta_{mL})} \sum_{j=0}^{2L-1} V_{zz}(\theta_i, \lambda_j) \left\{ \begin{matrix} \cos m\lambda_j \\ \sin m\lambda_j \end{matrix} \right. \quad (3.9a)$$

$$\left. \begin{matrix} \overline{C}_{nm} \\ \overline{S}_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{m0}) \sum_{i=1}^N w_i \overline{P}_{nm}(\cos \theta_i) \begin{cases} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\left. \begin{matrix} \delta \overline{C}_{nm} \\ \delta \overline{S}_{nm} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4} (1 + \delta_{m0}) \sum_{i=1}^N w_i \overline{P}_{nm}(\cos \theta_i) \begin{cases} A_m(\theta_i) \\ B_m(\theta_i) \end{cases} \quad (3.10a)$$

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{[(L+1)P_L(x_i)]^2} \quad (3.11)$$

.де w_i - ваги введені для дискретної ортогональності системи функцій на рівномірній сітці Gauss-Legendre.

Таким чином на основі вибраного підходу була побудована модель гармонічних коефіцієнтів за даними V_{zz} супутника GOCE - **GOCE-LP01s** до 220 степеня/порядку відносно нормального поля WGS84 до 10 степеня/порядку.

Нижче на рис. 3.5 – 3.8 відповідно показано висоти (квазі)геоїда ζ , поле аномалій у вільному повітрі Δg , загальна складова ϑ відхилення прямовисної лінії та середня кривина (квазі)геоїда шляхом введення миттєвого центру притягання. (Рис. 3.4)

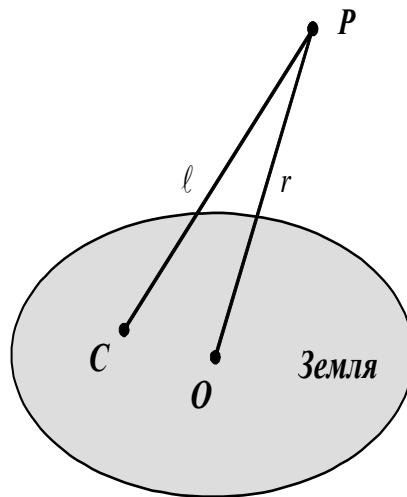


Рис. 3.4. До введення миттєвого центра C

Після розв'язання задачіна власні числа та власні вектори вони дають змогу знайти гауссову і середню кривини поверхні (квазі)геоїда $W(x, y, z) = W_0 = \text{const}$ у такій формі [54]:

$$K = \frac{F^2}{g^2 \ell^2} - \frac{F \omega^2 \cdot (g^2 + g_z^2)}{g^4 \ell} - \frac{\omega^4 [3x^2(g^2 - g_x^2) + 3y^2(g^2 - g_y^2) - g_z^2 \ell^2]}{g^4 \ell^2} \quad (3.12)$$

$$J = \frac{F}{g \ell} - \frac{\omega^2 \cdot (g^2 + g_z^2)}{2g^3} - \frac{3\omega^4 [x^2(g^2 - g_x^2) + y^2(g^2 - g_y^2)]}{2Fg^3 \ell} \quad (3.13)$$

Як середня кривина отримано (3.13), так і співвідношення (3.12) для гаусс
 ової кривини є вірним з точністю до четвертої степені кутової швидкості
 Землі.

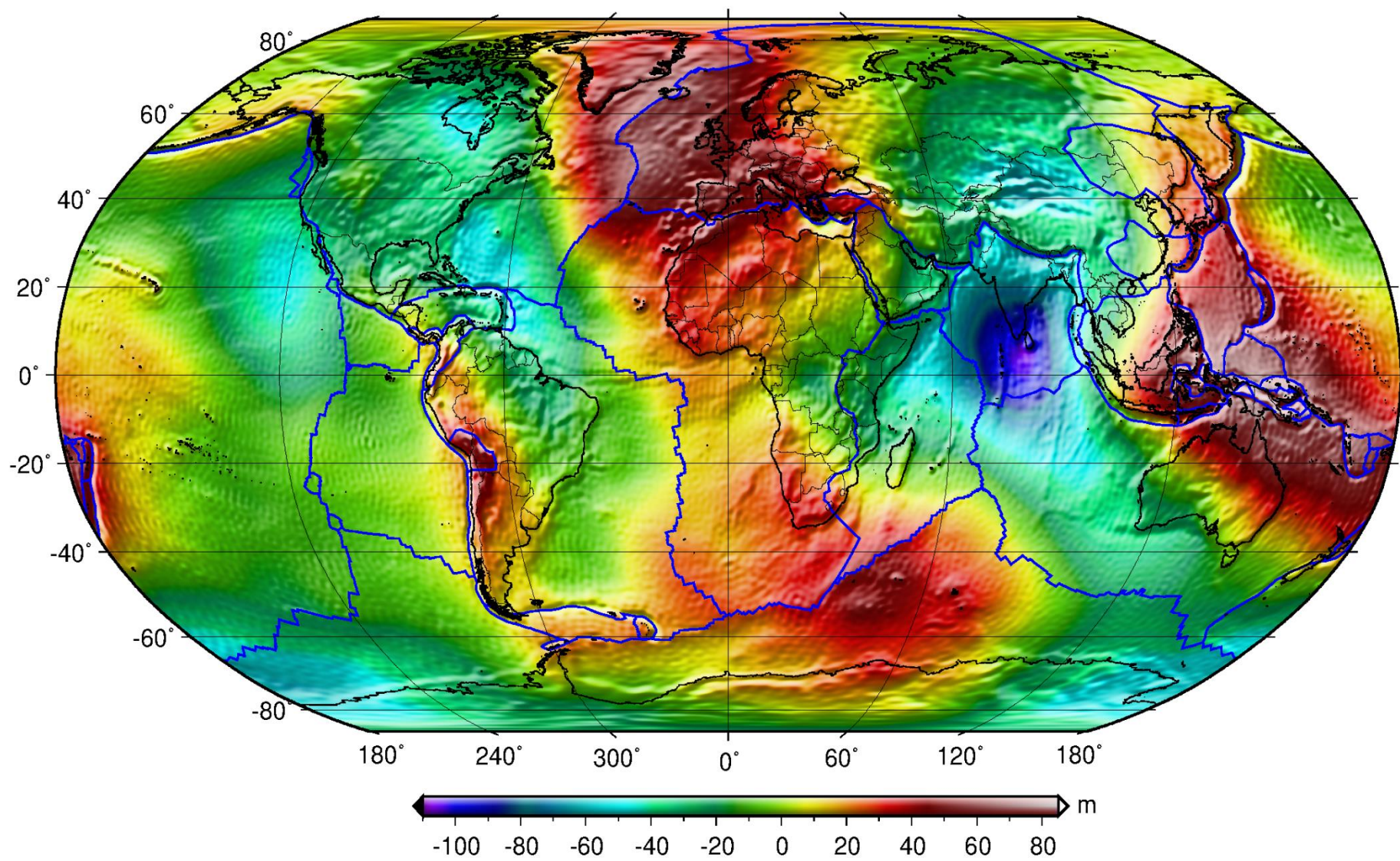


Рис.3.5 Висоти (квазі)геоїда за даними моделі **GOCE-LP01s**

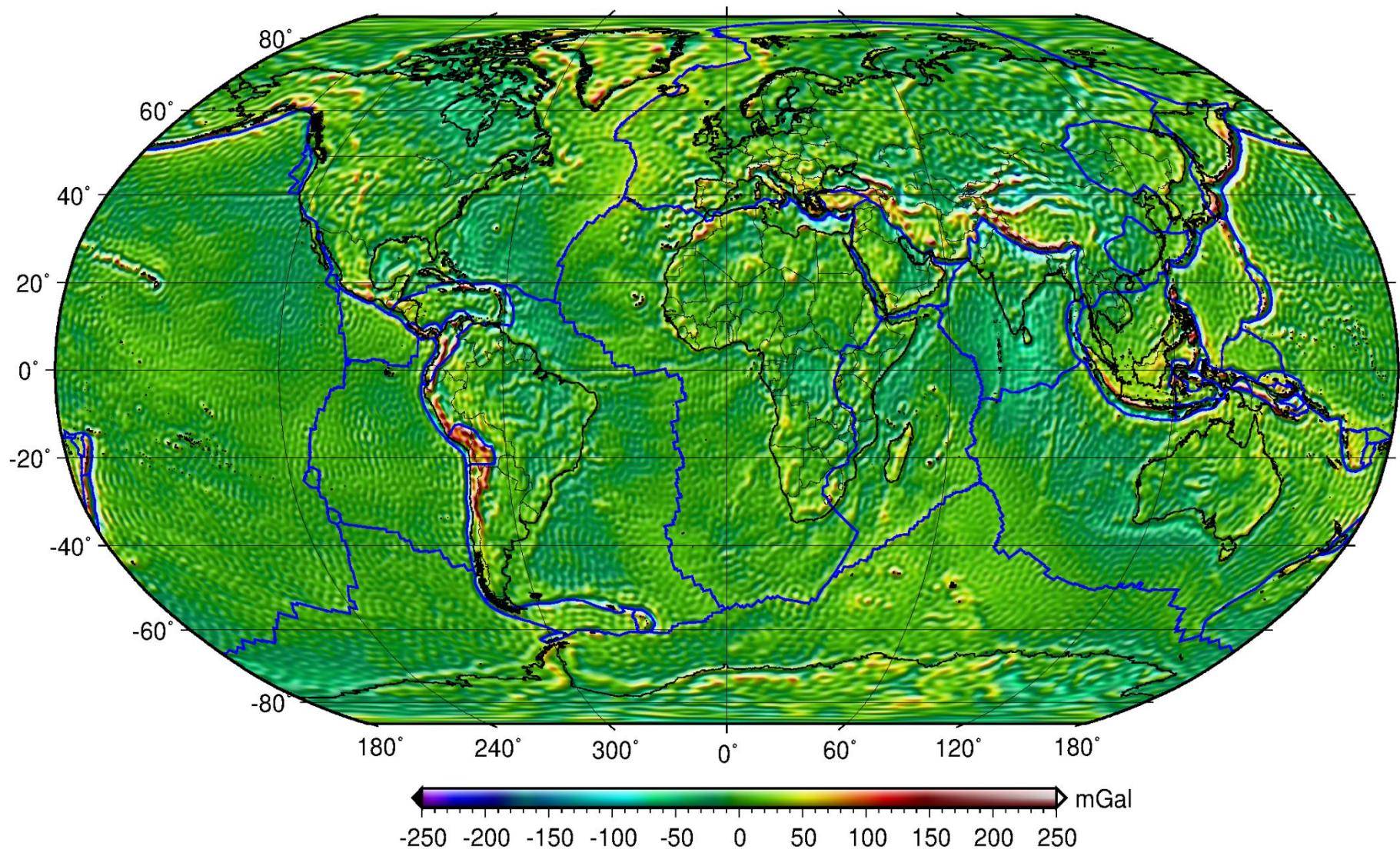


Рис 3.6 Поле аномалій у вільному повітрі за даними моделі **GOCE-LP01s**

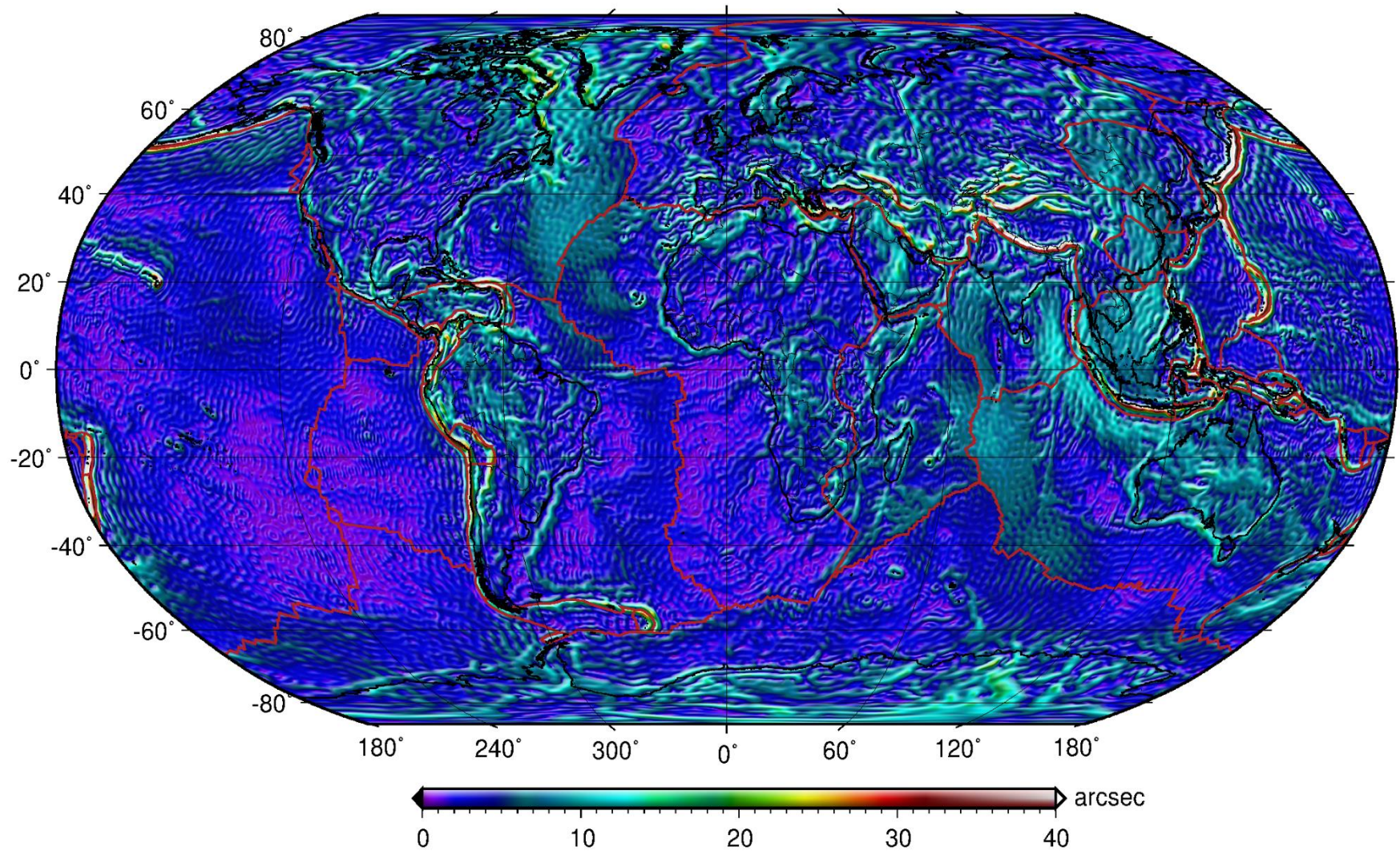


Рис. 3.7 Відхилення $\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ прямовисної лінії за даними моделі **GOCE-LP01s**

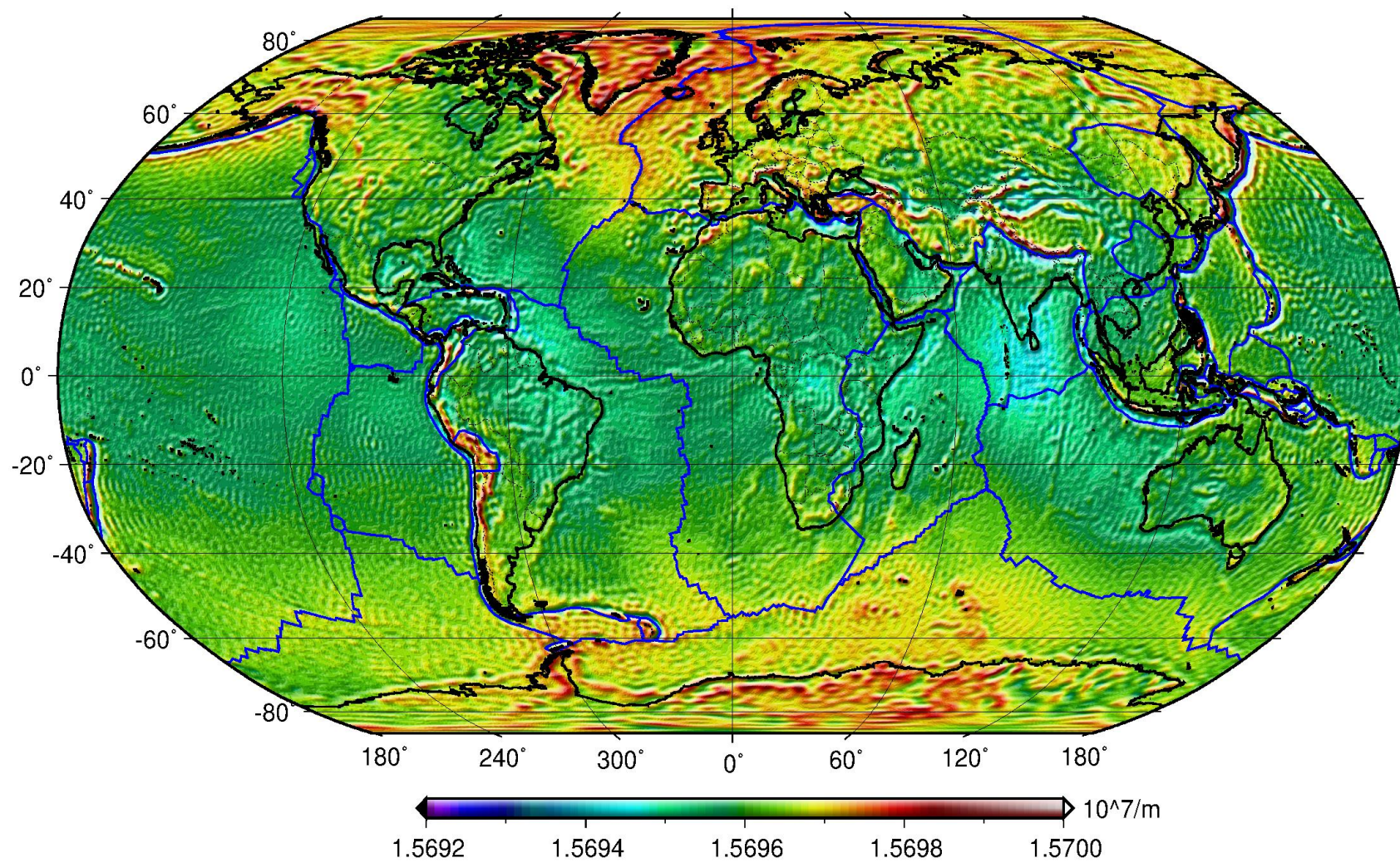


Рис. 3.8 Середня кривина (квазі)геоїда за даними моделі **GOCE-LP01s**

3.6 Побудова моделі GOCE-LP02s

Побудована модель **GOCE-LP01s** не достатньо точна у визначенні низьких порядків моделі. Було прийнято рішення зафіксувати 0-й, 1-ий та 2-ий порядки і прийняти їх рівними відповідно до моделі ITG-GRACE03s, які також постульовані для EGM2008. Після обчислень отримали модель **GOCE-LP02s** до 250 степеня/порядку відносно нормального поля GOCE-LP01s до 180 степеня/порядку.

За прийнятим вище алгоритмом, що базується на квадратурних формулах (3.9) – (3.11) та процедурі «вилучення-відновлення» ми привели робочу формулу до наступного вигляду:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{\delta C_{nm}} \\ \overline{\delta S_{nm}} \end{array} \right\} = \left(\frac{a}{r} \right)^{n+3} \frac{GM}{a^3} \frac{(n+1)(n+2)}{4} (1 + \delta_{m0}) \sum_{i=1}^N w_i \overline{P_{nm}}(\cos \theta_i) \left\{ \begin{array}{l} \delta A_m(\theta_i) \\ \delta B_m(\theta_i) \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Відповідно нижче на рис. 3.9 – 3.12 показано висоти (квазі)геоїда ζ , поле аномалій у вільному повітрі Δg , загальна складова \mathcal{G} відхилення прямовисної лінії та середня кривина (квазі)геоїда побудовані за даними отриманої моделі.

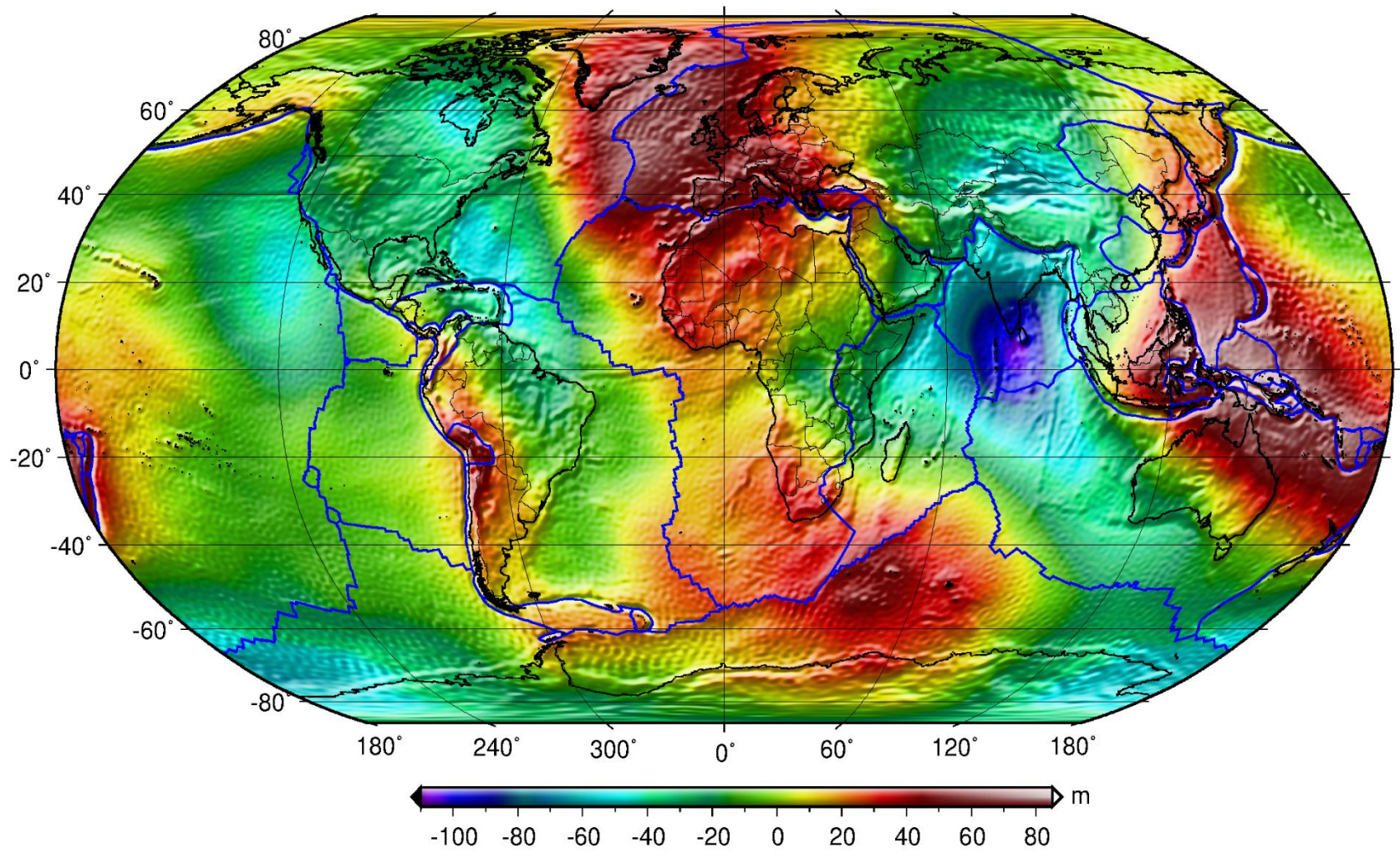


Рис.3.9 Висоти (квазі)геоїда за даними моделі **GOCE-LP02s**

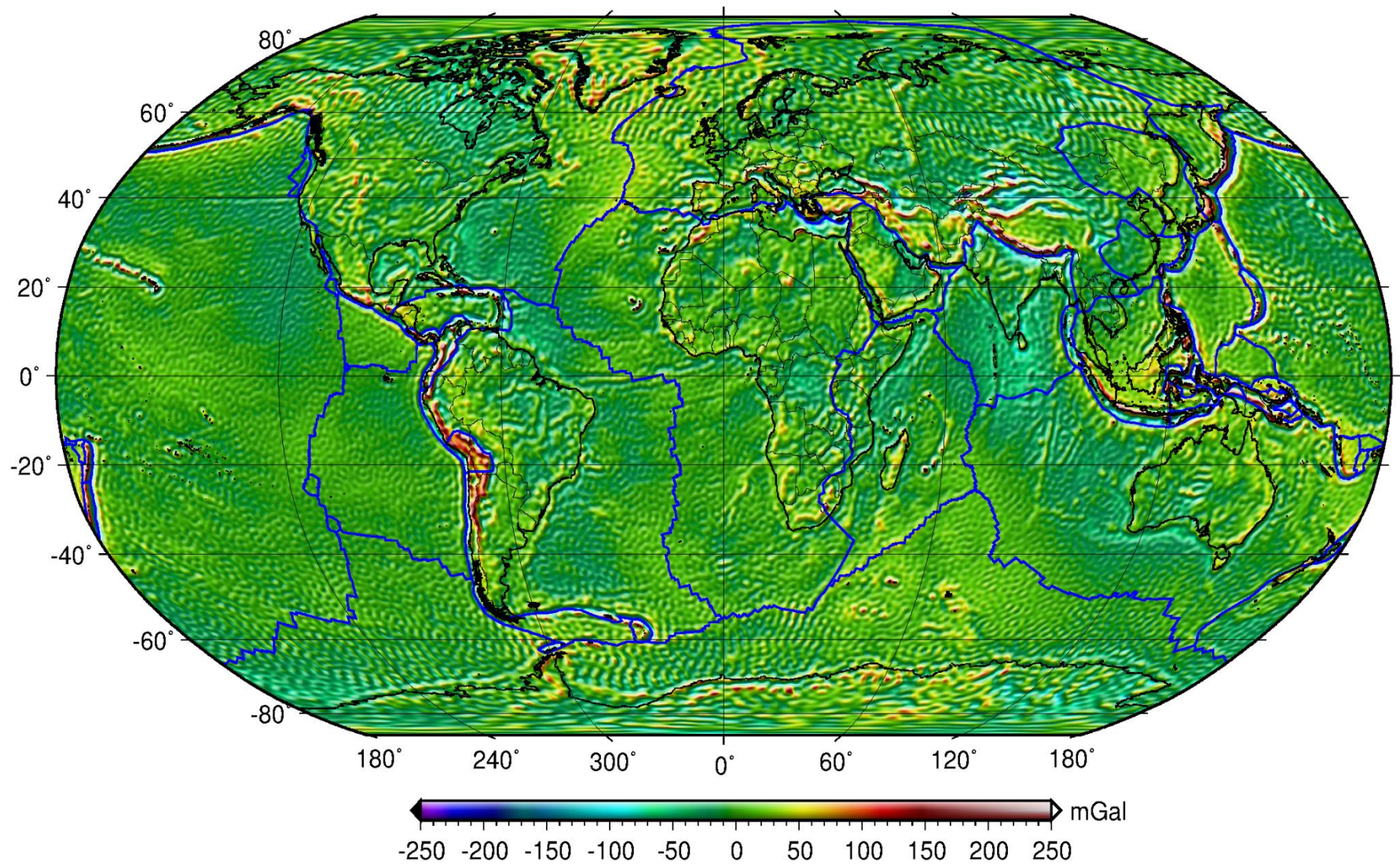


Рис.3.10 Поле аномалій у вільному повітрі за даними моделі **GOCE-LP02s**

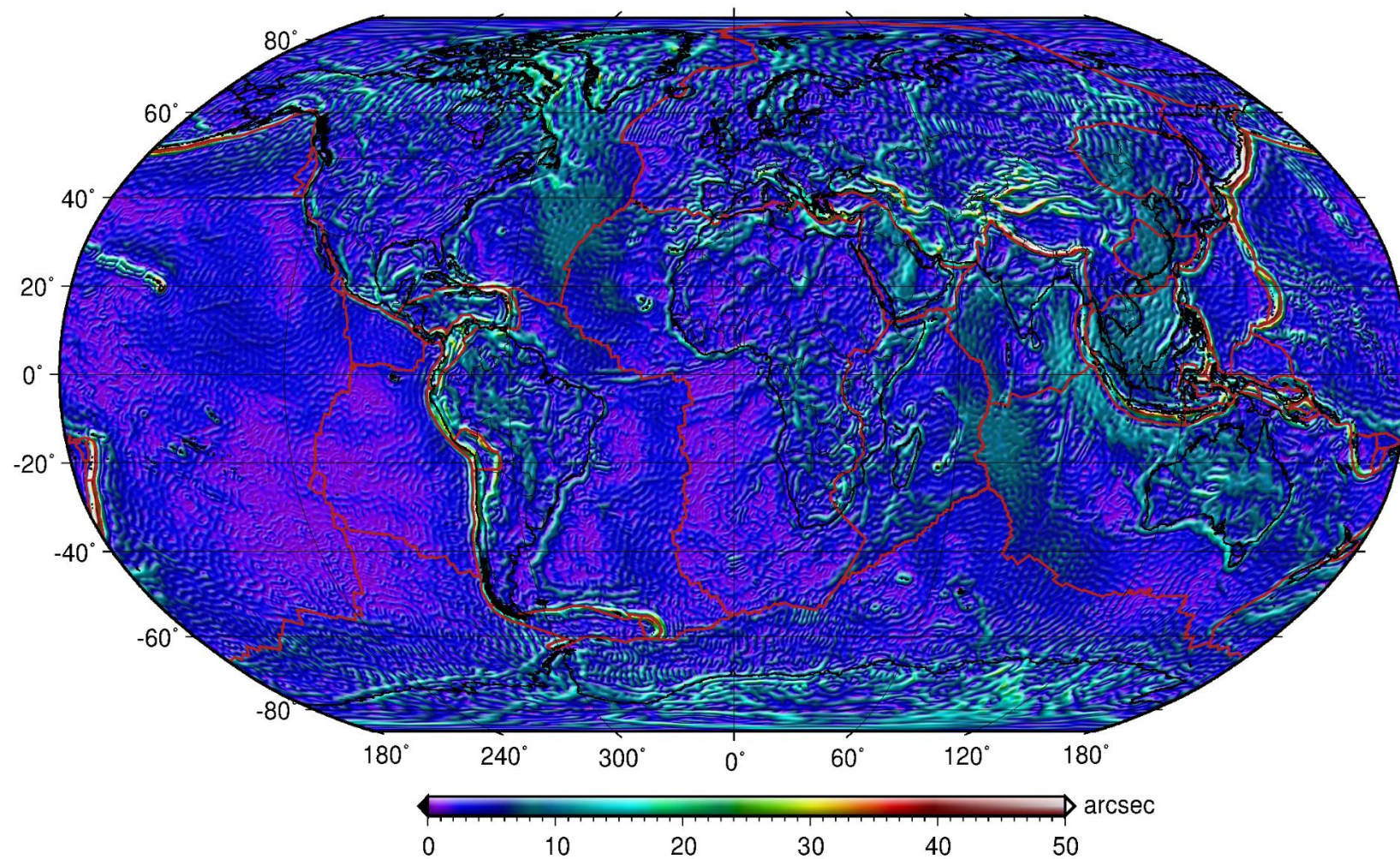


Рис. 3.11 Відхилення $\vartheta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ прямої лінії за даними моделі **GOCE-LP02s**

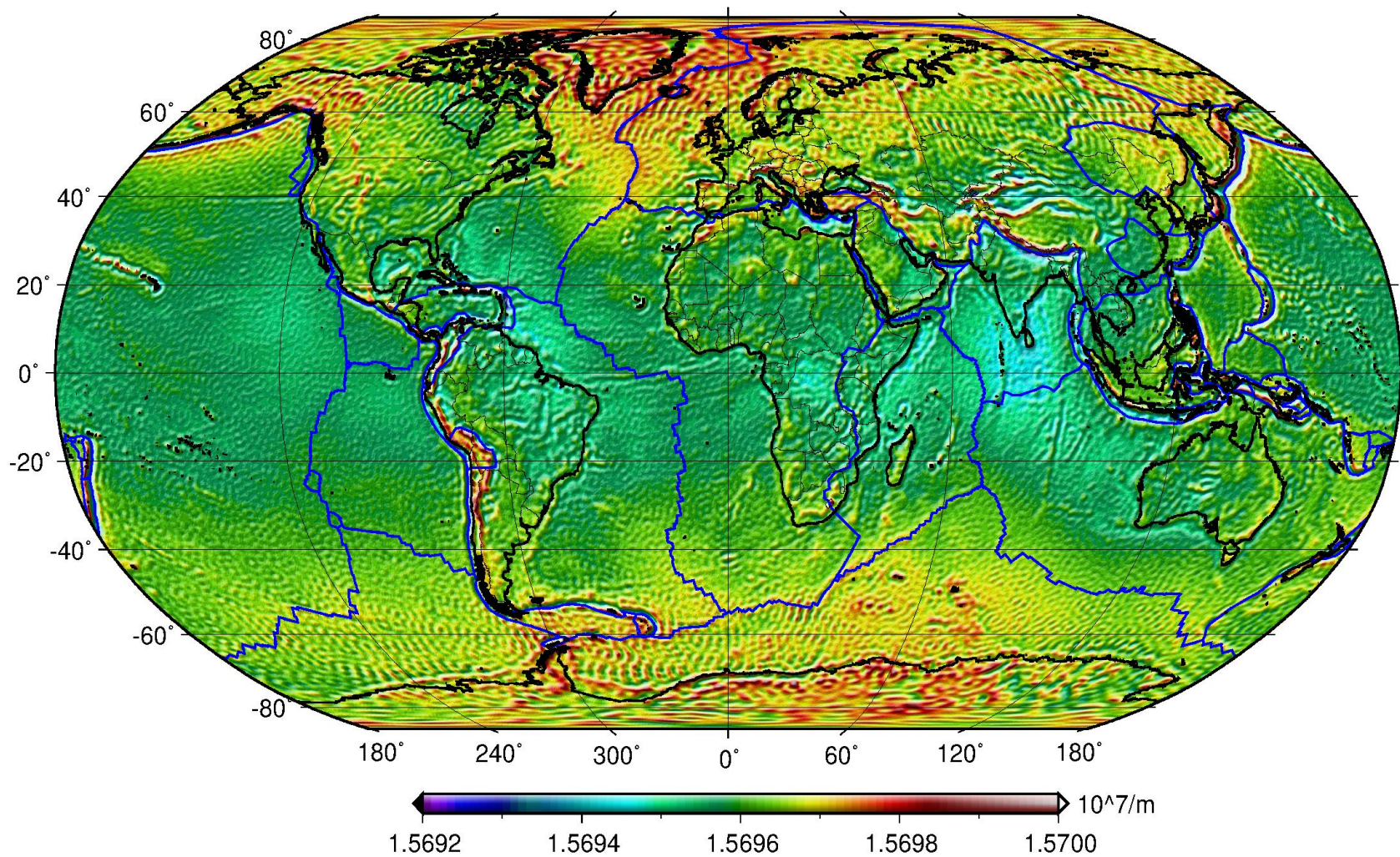


Рис.3.12 Середня кривина (квазі)геоїда за даними моделі **GOCE-LP02s**

Важливими оцінками моделей геопотенціалу є порівняння з відібраним новим комбінованим розв'язком відповідних спектральних характеристик гравітаційного потенціалу Землі.

В якості зазначених спектральних характеристик названих “степеневими амплітудами сигналу” та “різницями степеневих амплітуд сигналу” використовуються широко відомі степеневі дисперсії висот (квазі)геоїда

$$k_n^\zeta = R^2 \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2), \quad (3.15)$$

та степеневі дисперсії різниць висот (квазі)геоїда двох моделей

$$\Delta k_n^\zeta = R^2 \sum_{m=0}^n (\Delta \bar{C}_{nm}^2 + \Delta \bar{S}_{nm}^2). \quad (3.16)$$

В формулах (3.15), (3.16) \bar{C}_{nm} , \bar{S}_{nm} – повністю нормовані гармонічні коефіцієнти однієї з моделей геопотенціалу, що порівнюються; $\Delta \bar{C}_{nm}$, $\Delta \bar{S}_{nm}$ – різниці гармонічних коефіцієнтів двох моделей геопотенціалу; R – середній радіус Землі ($R=6371$ км). Крім того, використовується сумарна степенева дисперсія різниць висот (квазі)геоїда двох моделей геопотенціалу для біжучого порядку N^* :

$$\Sigma_{\Delta k_n^\zeta}^{N^*} = \sum_{n=2} \Delta k_n^\zeta. \quad (3.17)$$

В моделях EGM2008 та **GOCE-LP01s**, **GOCE-LP02s** згідно (рис 3.13-3.14) з 200 по 250 порядок є невеликі розходження в степеневих дисперсіях, які можуть бути зумовлені тим, що в побудованих моделях **GOCE-LP01s** **GOCE-LP02s** використовувалися лише супутникові дані, а в EGM2008 додатково до моделі ITG-GRACE03s включені наземні дані та дані морської гравіметрії.

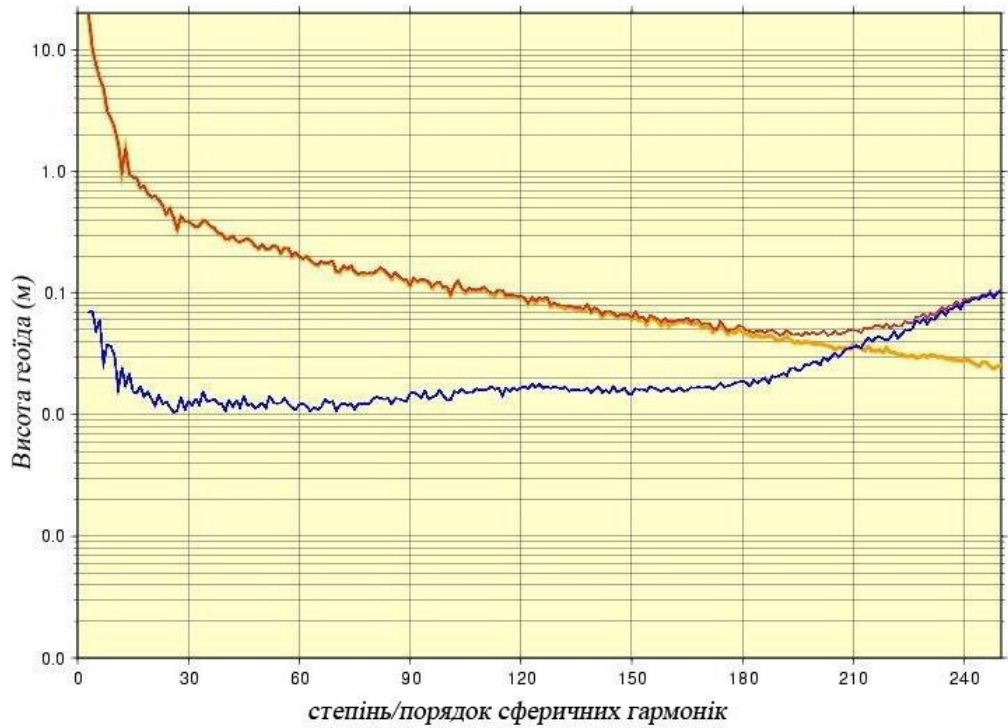


Рис.3.13 Спектральні характеристики моделей EGM2008 та **GOCE-LP01s** (— EGM2008, — **GOCE-LP01s**, — різниці функцій EGM2008 та **GOCE-LP01s**)

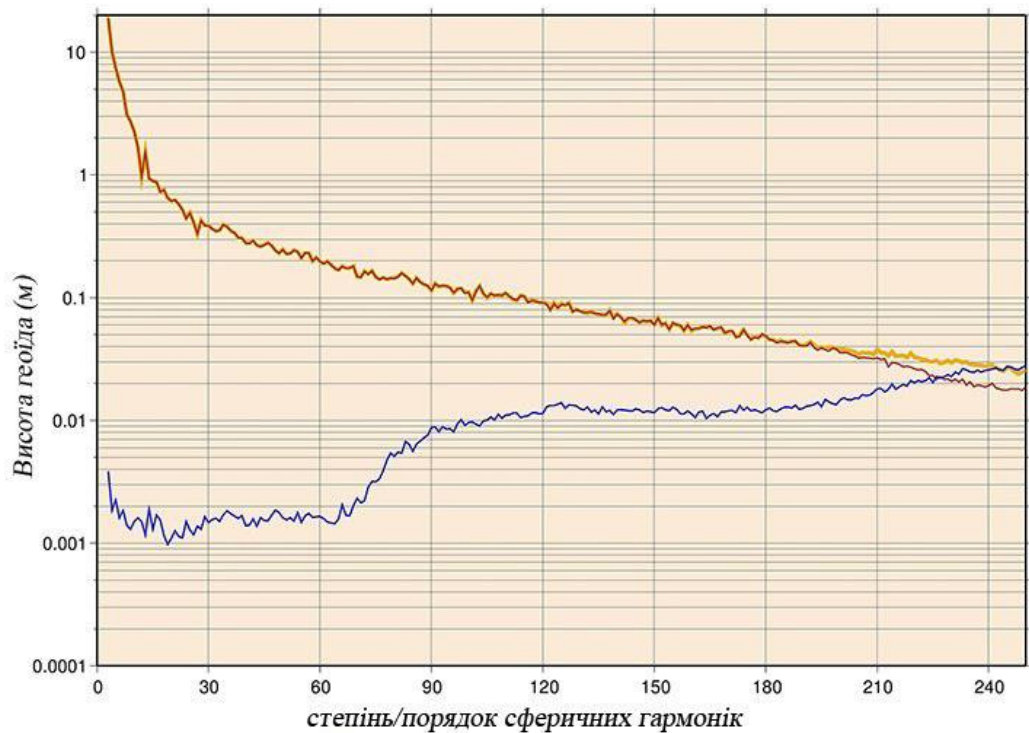


Рис. 3.14 Спектральні характеристики моделей EGM2008 та **GOCE-LP02s** (— EGM2008, — **GOCE-LP02s**, — різниці функцій EGM2008 та **GOCE-LP02s**)

3.7 Перевірка побудованих моделей на даних GPS-нівелювання

Побудовані моделі апробовано на даних GPS-нівелювання з стандартним

відхиленням ≤ 30 см, що відповідає іншим сучасним розв'язкам (табл. 3.2).

Визначення нормальних висот H^γ за допомогою GPS-спостережень вимагає віднімання висоти (квазі)геоїда від геодезичної висоти H (див. рис. 3.15). При обчисленнях використовувалась основна формула GPS-нівелювання (3.18)

$$H = H^\gamma + \zeta \quad (3.18)$$

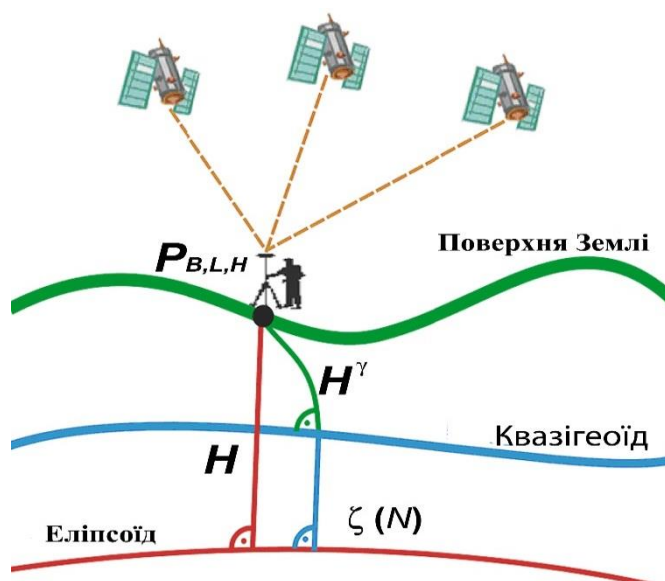


Рис. 3.15 Принцип GPS-нівелювання

Таблиця 3.2

Статистики різниць між вимірними висотами ξ GPS-нівелювання та ξ обчисленими за моделями гравітаційного поля на 4000 пунктах на території України.

Модель	Мінімальне відхилення, м	Максимальне відхилення, м	Середнє відхилення, м	Стандартне відхилення, м
GO_CONS_GCF_2_DIR_R2(240;240)	-0,417	2,257	0,524	0,317
GOCO03S(240;240)	-0,586	2,058	0,523	0,279
GO_CONS_GCF_2_SPW_R2(240;240)	-0,420	2,525	0,538	0,317
EGM08 (360;360)	-0,038	1,186	0,529	0,144
EGM08 (250;250)	-0,451	1,832	0,526	0,236
GO_CONS_GCF_2_TIM_R3(250;250)	-0,592	2,024	0,530	0,288
GOCE-LP01s(250;250)	-0,422	2,379	0,577	0,339
GOCE-LP02s(250;250)	-0,541	1,943	0,544	0,294

3.8 Результати застосування різних моделей геопотенціалу для побудови (квазі)геоїда в регіоні New Mexico

Використовуючи модель гравітаційного поля GOCE-LP02S було побудовано (квазі)геоїд та територію полігону NASA розташованому в пустелі

штату New Mexico. На цьому полігоні проводять випробування космічних шатлів, саме тут розташований пункт управління системою супутникової комунікації.

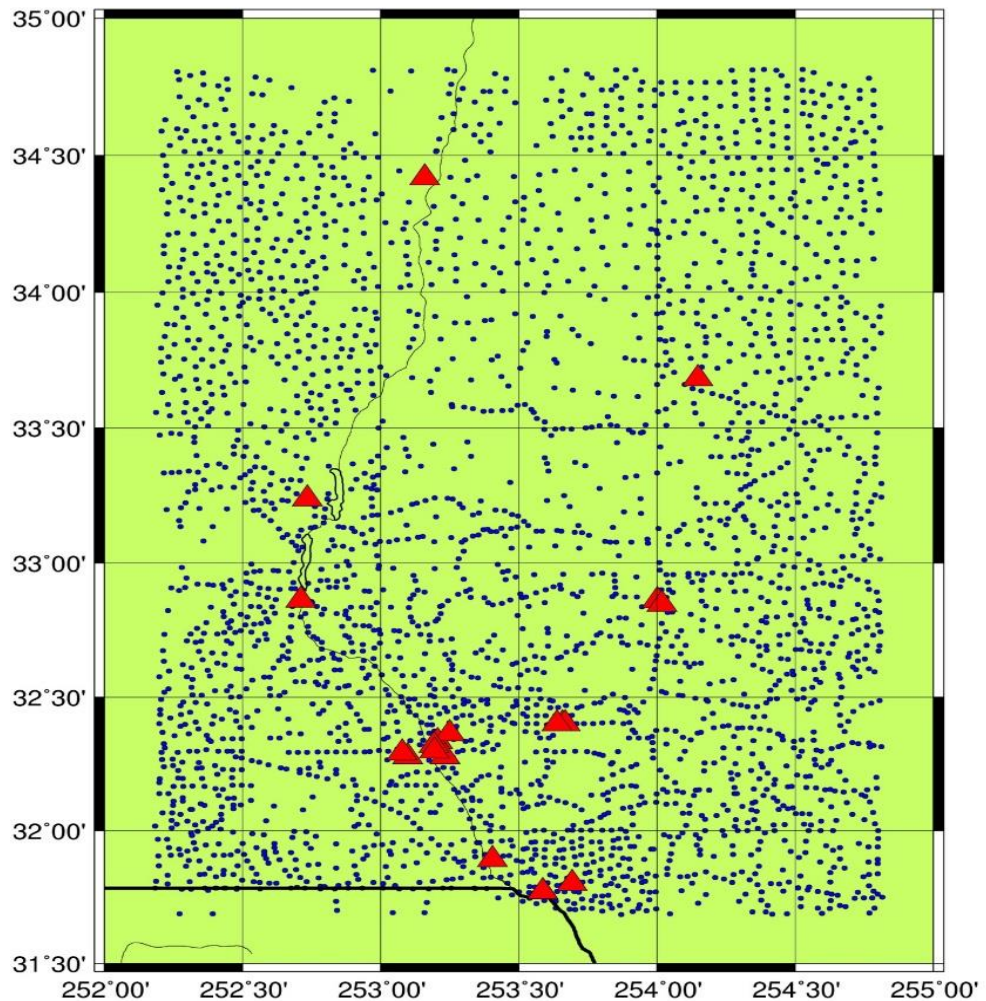


Рис. 3.16 Розподіл даних ● – аномалій аномалій у вільному (2920 пунктів) і ▲ – станцій GPS-нівелювання (20 пунктів) незалежного контролю

Для побудови регіонального (квазі)геоїда найбільш поширеним на сьогоднішній день є метод FFT. Сучасний підхід для обчислення (квазі)геоїда, як правило, базується на техніці “вилучення- відновлення”. Відновлення (квазі)геоїда в акваторії може бути виконано за формулою:

$$\xi = \xi_M + \delta\xi, \quad (3.19)$$

де ξ – висота (квазі)геоїда, ξ_M – внесок глобальної моделі геопотенціалу з високим ступенем роздільної здатності, $\delta\xi$ – залишкові висоти (квазі)геоїда.

Співвідношення (3.19) традиційно пов'язане з наступним рівнянням для аномалій сили тяжіння:

$$\Delta g = \Delta g_M + \delta\Delta g, \quad (3.20)$$

де Δg – аномалії сили ваги, Δg_M – внесок глобальної геопотенціальної моделі з високим ступенем роздільної здатності, $\delta\Delta g$ – залишкові аномалії сили ваги.

Зрозуміло, що складові ξ_M і Δg_M можуть бути обчисленні за допомогою однієї і тієї ж моделі геопотенціалу, тому можливим є виконати їх видалення

$$\delta\xi = \xi - \xi_M, \quad (3.21)$$

$$\delta\Delta g = \Delta g - \Delta g_M \quad (3.22)$$

Для подальшої обробки даних, в якості вихідної інформації використовується саме залишкове поле висот (квазі)геоїда (3.21) чи аномалій сили ваги (3.22).

Основна вимога до вихідної інформації

$$M\{\delta\xi\} = 0, \quad (3.23)$$

$$M\{\delta\Delta g\} = 0, \quad (3.24)$$

де $M\{\bullet\}$ – символ математичного сподівання. Співвідношення (3.23) і (3.24) відображають також необхідну умову методу FFT [31]. При застосуванні цього методу для обробки вихідних даних в регіональному масштабі співвідношення (3.23) і (3.24) на практиці порушуються, тому необхідним є формування центрованих вимірів за допомогою прямого видалення внеску глобальної гравітаційної моделі з високим ступенем роздільної здатності.

Зрозуміло, що можливим є також визначення центрованих величин простим осередненням вихідних даних одного виду.

В основі прогнозу лежить інтерполяція функції на попередньо вибраній множині функцій, що задається аналітичною коваріаційною функцією (АКФ), яка будується на основі попередньо обчисленої емпіричної коваріаційної функції (ЕКФ) [21].

Таким чином, традиційна процедура вилучення — відновлення полягає у отриманні залишкової інформації для подальшого її прогнозу у вузлах сітки із заданою роздільною здатністю:

$$\delta\xi = \xi - \xi_{GOCE_LP02S} \quad (3.25)$$

де ξ_{GOCE_LP01S} розглядається як довгохвильова частина ξ , що є прийнятою нижче відповідно до моделі гравітаційного поля GOCE_LP01S до 220 порядку.

Отже, після прогнозу залишкових висот ми можемо достатньо просто відновити як висоти (квазі)геоїда, так і аномалії сили ваги

$$\xi = \xi_{GOCE_LP02S} + \delta\xi, \quad (3.26)$$

$$\Delta g = \Delta g_{GOCE_LP02S} + \delta\Delta g, \quad (3.27)$$

В результаті видалення з вихідних даних Δg_{Faya} вкладу моделі GOCE_LP02S, що для модельного потенціалу приймає наступну форму:

$$V = \frac{GM}{r} \sum_{n=0}^{250} \left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\sin \varphi)$$

$$GM=398600.4415 \text{ км}^3/\text{с}^2, \quad a=6378.1363 \text{ км},$$

Були отримані залишкові значення Δg

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{r}$$

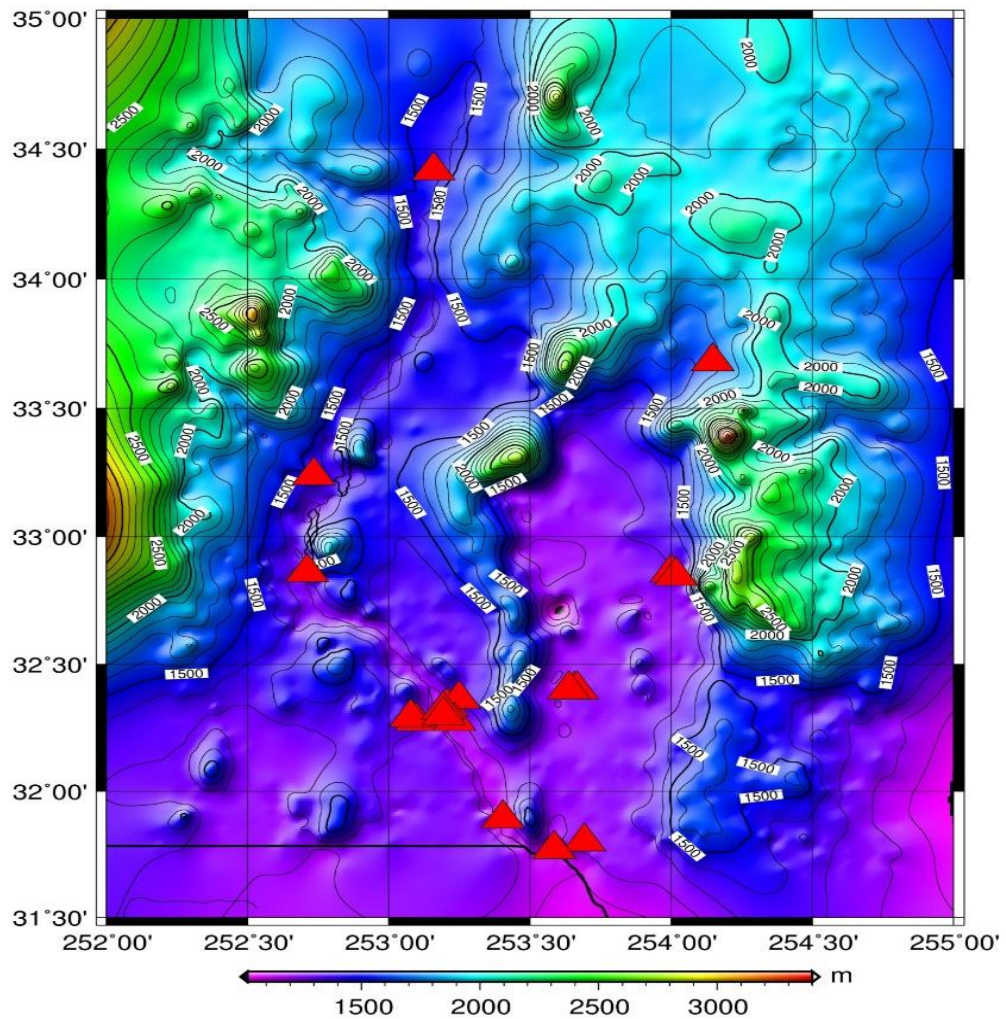


Рис. 3.17 Висоти топографічної поверхні регіону
(ізолінії проведено через 100 м)

Розглянемо метод Стокса побудови (квазі)геоїда з застосуванням швидкого перетворення Фур'є FFT на прикладі роботи, в якій використовується модель гравітаційного поля Землі GOCE_LP02s. Крім визначення (квазі)геоїда безпосереднім інтегруванням, в останні роки широко застосовується оцінювання інтегралів методом швидкого перетворення Фур'є FFT в межах процедури «вилучення-відновлення» [88], [90], [4]. З величин Δg_F видаляється внесок глобальної моделі гравітаційного поля Землі і обчислюються значення залишкових аномалій $\delta\Delta g$ сили тяжіння. Потім за відомими $\delta\Delta g$ методом FFT визначаються залишкові висоти (квазі)геоїда $\delta\xi$. Після обчислення $\delta\xi$ в цих точках відновлюються висоти (квазі)геоїда ξ за допомогою тієї ж моделі гравітаційного поля.

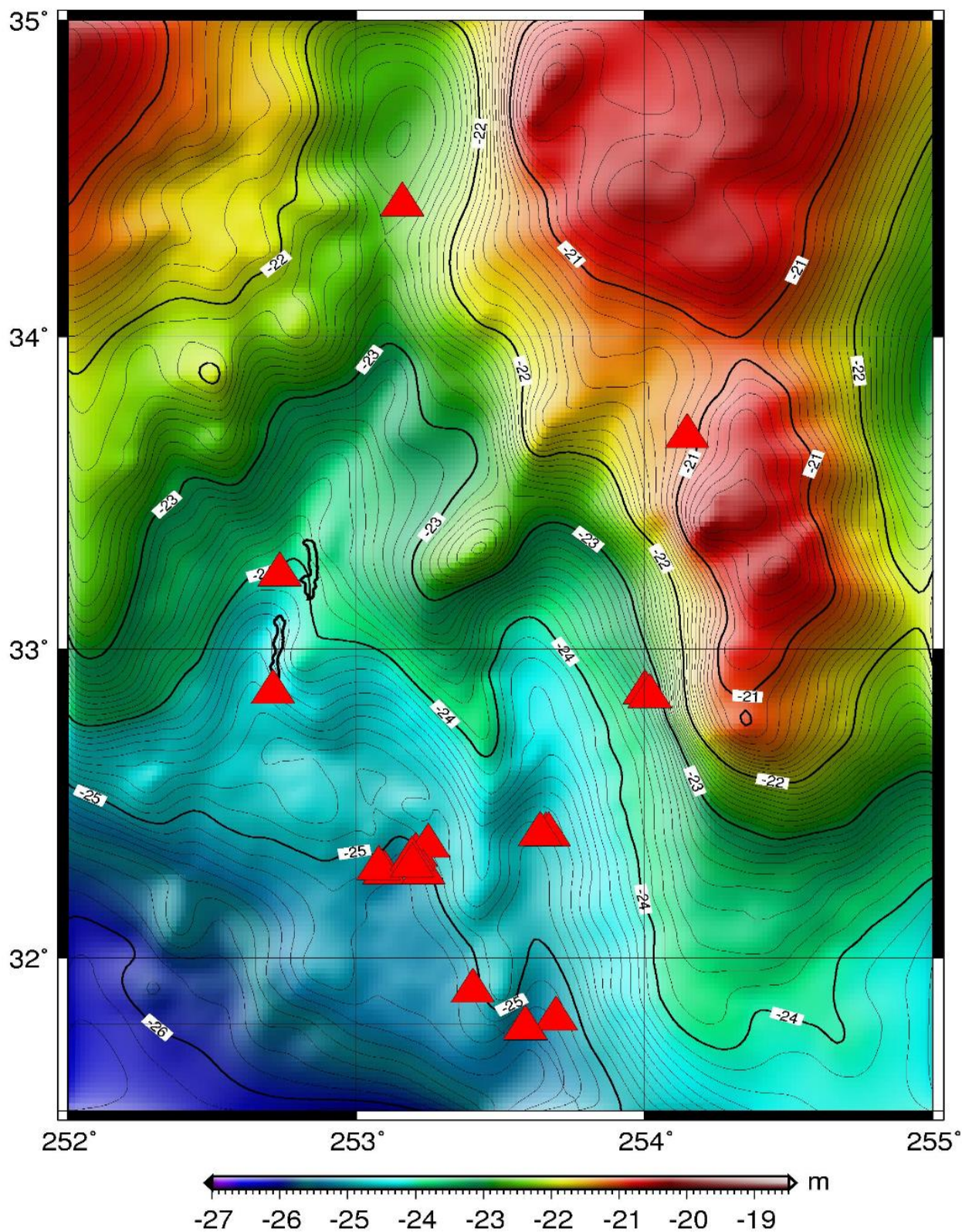


Рис. 3.18 Результуючий (квазі)геоїд $\zeta = \delta\zeta + \zeta_{GOCE_LP025}$

(ізолінії проведено через 0,5 м)

Також отримані дані порівняння різних моделей гравітаційного поля Землі з даними GPS-нівелювання на регіон New Mexico, які подані в табл. 3.3

Статистичні дані порівняння різних моделей гравітаційного поля Землі
з даними GPS-нівелювання на регіон New Mexico

Модель	Рік	Мінімальне значення, m	Максимальне значення, m	Середня значення, m	Стандартне відхилення, m
GO_CONS_GCF_2_SPW_R4 (280)	2014	0,3927	0,6359	0,5301	0,0725
ITSG-Grace2014s	2014	-0,0653	0,2427	0,1179	0,0948
JYY_GOCE04S (230)	2014	-0,1501	0,1084	-0,0006	0,0645
GOGRA02S (230)	2013	-0,1449	0,1152	0,0064	0,0648
ITG_Goce02 (240)	2013	-0,1021	0,1474	0,0513	0,0747
GOCE_LP01s	2013	-0,2905	0,0400	-0,0793	0,0887
GOCE_LP02s	2013	-0,1470	0,1152	0,0142	0,0773
GOCO03S (250)	2012	-0,1473	0,1157	0,0149	0,0767
EGM2008 (360)	2008	-0,1460	0,0856	-0,0079	0,0704
EGM2008 (250)	2008	-0,1274	0,0884	0,0037	0,0540
EIGEN-5C (360)	2008	-0,1557	0,0631	-0,0390	0,0630
EIGEN-CG01C (250)	2004	-0,2258	-0,0022	-0,0830	0,0647
GFZ97 (359)	1997	-0,6770	0,4099	-0,0894	0,3243
EGM96 (360)	1996	-1,0646	-0,8488	-0,9336	-0,0540
OSU86F (360)	1986	-0,2199	0,0269	-0,0427	0,0506

3.9 Висновки та рекомендації

1. Для побудови глобальної моделі гравітаційного поля Землі використовувались результати роботи градієнтометричної місії GOCE, загальною кількістю - 80 860 570 вимірів вертикальних градієнтів сили тяжіння. Після відбракування грубих помилок за критерієм 3δ їх кількість зменшилась до 80 849 326 вимірів, що становить менш як 0,02 % від загальної кількості даних.

2. Застосовано статистичний фільтр Кальмана для осереднення даних в просторі/часі і побудови регулярної сітки Gauss-Legendre для визначення гармонічних коефіцієнтів розкладу гравітаційного потенціалу з використанням чисельного інтегрування.

3. В результаті побудовано модель гравітаційного поля **GOCE-LP01s** за даними супутникової градієнтометрії до 220 степеня/порядку відносно

нормального поля WGS84 до 10 степеня, а також модель **GOCE-LP02s** 250 степеня/порядку відносно нормального поля GOCE-LP01s до 180 степеня.

4. Для кожної з вище перелічених моделей побудовано карти розподілу середньої кривини (квазі)геоїда, відхилення прямовисних ліній, аномалій сили тяжіння та висот (квазі)геоїда.

5. Також обчислено спектральні характеристики побудованих моделей та їх порівняно з моделлю EGM2008.

6. Побудовані моделі безпосередньо порівняно з даними GPS - нівелювання з стандартним відхиленням ≤ 30 см, що відповідає іншим сучасним розв'язкам, отриманими за даними GOCE.

7. Виконана апробація моделі **GOCE-LP02s** на регіоні міжнародного полігону в New Mexico з гравіметричним (квазі)геоїдом оціненим з точністю ≤ 10 см

8. Апробація запропонованого методу побудови моделей гравітаційного поля показала, що отримані за великою кількістю вимірів набори гармонічних коефіцієнтів є можливим і може бути орієнтованим спеціально для персонального комп'ютера.

4 ЗАСТОСУВАННЯ ПОБУДОВАНИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОВЕРХНІ (КВАЗІ)ГЕОЇДА ТА ПОЛЯ ΔG НА МОРІ

4.1 Дослідження океанічних течій. Основні положення.

Океанічні течії є важливим фактором клімату на всій планеті. Часто дуже важко виявити їх на морській поверхні, але це можливо при спостереженні з орбіти. Супутника GOCE забезпечує найбільш точними картами глобальних океанічних течій, аніж будь-коли раніше. Океан транспортує близько 30% тепла на планеті, а решта проходить через атмосферу [86]. Отже, океанічні течії є одним з основних регулюючих факторів планетарної кліматичної системи [46]. Поглинаючи нагрів від Сонця, океанічні течії транспортують його по всьому світу. Слід зазначити, що теплі води Gulf Stream пом'якшують Європейський клімат приблизно на 4° C, аніж в інших широтах по всьому світі [20]. Метою місії GOCE є визначення всесвітньої динамічної топографії циркуляції океанічних течій. В минулому довелося б застосувати тисячі буїв, щоб отримати настільки якісне покриття [48]. Третє покоління GOCE-геоїд було створено на основі ≥ 50 мільйонів вимірів незначних варіацій гравітаційного тяжіння, на висоті 255 км, що є набагато ближче аніж будь-який супутник до нього. Геоїд має точність визначення близько 4 см.

Комбінування супутникових даних для відстеження океанічних течій. Наступним кроком в області картографування океанічних течій це випадок коли, (квазі)геоїд побудований за даними GOCE комбінують з даними альтиметра, який розглядається як найбільш корисний інструмент в океанографії [23]. Використання результатів GOCE з даними альтиметра підсилює якість вимірів і в результаті отримана більш близька поверхня до (квазі)геоїда. Віднімаємо від нього фактичне значення висоти SSH поверхні води, вимірюної альтиметром і отримаємо стаціонарний стан динамічної топографії океану .

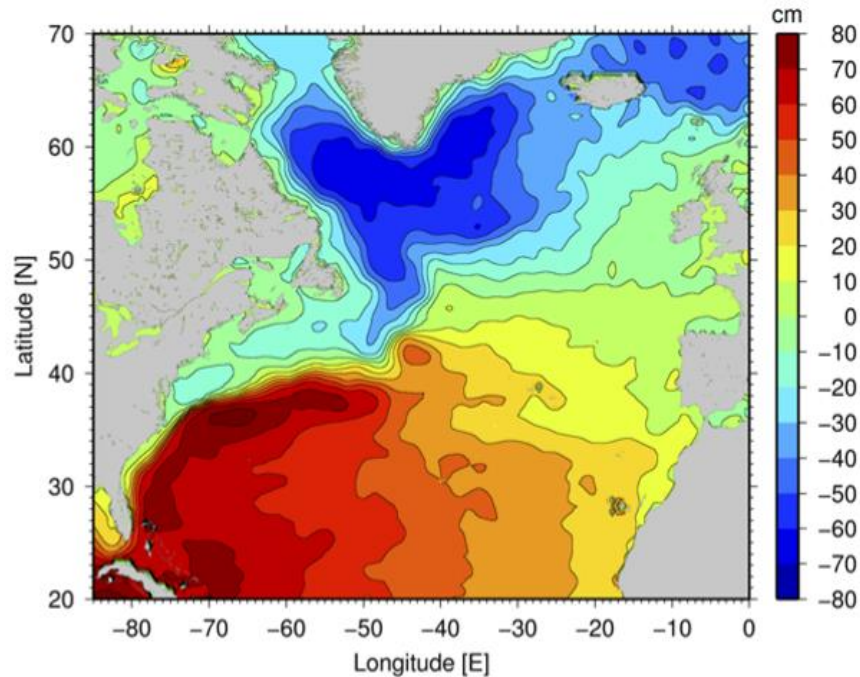


Рис. 4.1 Динамічна топографія визначена за даними GOCE

Як наслідок відкриваються регіони, де океан вище або нижче рівня (квазі)геоїда. Спостерігається підйом води з амплітудою 2 м замість стійкого стану [27]. Таким чином це дає змогу оцінити кількість води, яка транспортується в океані, порівнюючи його з даними супутникових вимірювань температури води, що збирається за допомогою приладу Envisat AATSR (Advanced Along-Track Scanning Radiometer) [38], ми отримуємо уявлення про кількість енергії, що переноситься через океан разом з цією водою [28]. Додатково існує можливість комбінування з вимірами солоності океану [91].

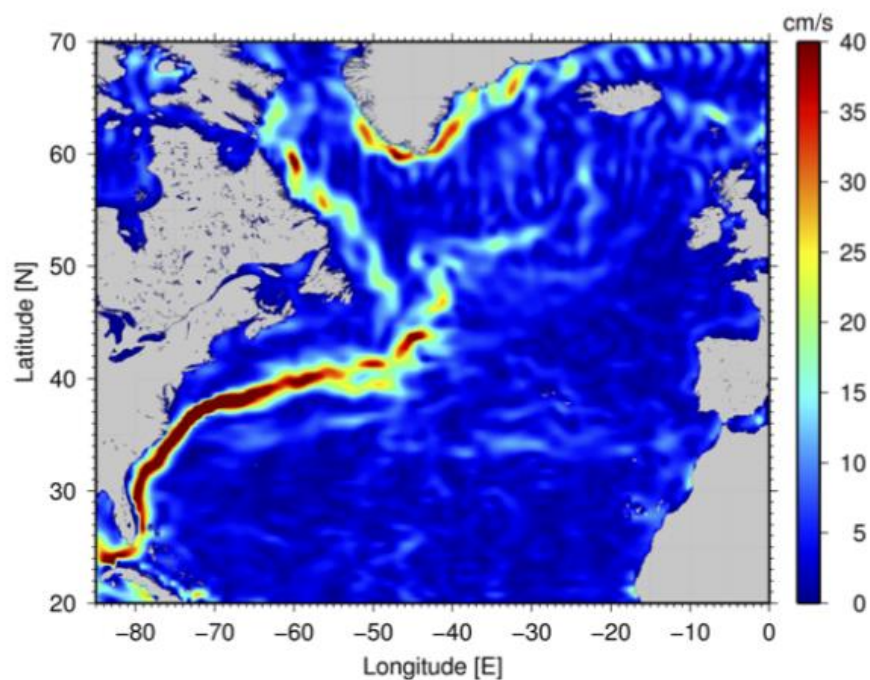


Рис. 4.2 Швидкість поверхні води

На даний момент група GOCE намагається уточнити свої карти циркуляції океану, щоб отримати кращу візуалізацію того, що відбувається не лише в основній системі океанічної циркуляції – до якої відносяться такі течії, як Gulf Stream (Атлантичний регіон), Kuroshio (Японія) чи Agulhas (Африка) - але багато локальних течій в порівняно мілководних морях, таких як Середземне море . Поверхневу швидкість течій можна відстежувати разом з середньою топографією. Повний набір даних отриманих з GOCE в значній мірі уточнив (квазі)геоїд та широко розширив поняття про циркуляцію океанів.

4.2 Основні припливні системи

З точки зору геодезії та океанографії вивчення поверхні Світового океану має наступні міждисциплінарні властивості: геодезія використовує дані супутникової альтиметрії для опрацювання даних CorSSH з метою побудови (квазі)геоїда та поля аномалій сили тяжіння на морі; океанографія використовує (квазі)геоїд в якості референцної поверхні для вивчення топографії океану SST (Sea Surface Topography) та різноманітних залежних і незалежних від часу ефектів. Крім того, SST може бути побудована і шляхом комбінації океанографічних даних (прямі виміри швидкості течій) з геодезичними (альтиметрія і (квазі)геоїд). Амплітуда висот такої комбінованої моделі топографії моря SST відносно (квазі)геоїда не перевищує значення $\pm 1-2$ м [13]. Для правильного опрацювання різнорідних даних при побудові моделей гравітаційного поля Землі шляхом переходу від таких даних альтиметрії як CorSSH до висот (квазі)геоїда, застосовують наступне базове рівняння

$$\text{CorSSH}(t) = \text{SST}(t) + N = \text{CorSSH} = \text{SST} + N, \quad (4.1)$$

Співвідношення (4.1) має місце лише в тому випадку, коли всі елементи (4.1) задані в єдиній припливній системі. На практиці, однак, ми отримуємо більш складну ситуацію [49]. Висоти (квазі)геоїда згідно рекомендацій IAG задаються або у системі TFS (Tide Free System) вільній від припливів, або у припливній системі ZFTS (Zero Frequency Tide System) [61], де присутній лише непрямий постійний припливний ефект. На відміну від останнього,

альтиметричний продукт CorSSH (ліва частина рівняння (4.1)) міжнародних океанографічних служб NASA і AVISO традиційно задано в середній припливній системі MTS (Mean Tide System), яка характерна прямим і непрямим припливними ефектами твердої Землі [83]. Зрозуміло, що для практичного використання (4.1) всі компоненти повинні бути приведені в єдину систему. Згідно IERS Conventions (2003) [59], для обчислення зонального коефіцієнта \bar{C}_{20}^{zft} в припливній системі нульової частоти ZFTS застосовується таке співвідношення:

$$\bar{C}_{20}^{zft} = \bar{C}_{20}^{tf} - 3.1108 \cdot 10^{-8} \cdot 0.3 / \sqrt{5}, \quad (4.2)$$

де прийнято номінальне $k_2 = 0.3$ число Лява.

Інший шлях – це введення редукції ΔN при визначенні висот поверхні (квазі)геоїда [80]. В результаті така поправка ΔN може враховуватись при застосуванні значення гармонічних коефіцієнтів у системі TFS вільній від припливів

$$\Delta N = -0.198k_2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2} \right), \quad (4.3)$$

Тепер висоти (квазі)геоїда просто трансформуються на основі (4.2) або (4.3) з системи TFS [70] в значення N у системі ZFTS (N_{ZFTS}). Для цього потрібно враховувати постійні зміни у висотах, спричинені притяганням Сонця і Місяця [35]. Грунтуючись на постійній припливній редукції, можемо визначити необхідну поправку, яка вноситься у (квазі)геоїд N_{ZFTS} у системі ZFTS, щоб отримати висоти (квазі)геоїда N_{MTS} у системі MTS:

$$N_{MTS} = N_{ZFTS} - 0.198 \left(\frac{3}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2} \right), \quad (4.4)$$

Згідно (4.4) припливні системи приймають найбільші значення саме в полярних регіонах Землі [50]. Якщо висоти (квазі)геоїда N_{TFS} задані у системі TFS, то середні висоти (квазі)геоїда N_{MTS} можна отримати шляхом комбінації двох поправок (4.19) та (4.20):

$$N_{MTS} = N_{TFS} - 0.198(1 + k_2) \left(\frac{3}{2} \sin^2 B - \frac{1}{2} \right) \quad (4.5)$$

Отже, висоти топографії океанічної поверхні SST визначені як різниця між середньою поверхнею океану і середніми висотами (квазі)геоїда [81] (4.4), (4.5):

$$SST = CorSSH - N_{MST}, \quad (4.6)$$

Іноді зручно представляти SST набором сферичних гармонічних коефіцієнтів. На особливу увагу тут заслуговує повністю нормалізований гармонічний коефіцієнт другого порядку (4.2) в топографії поверхні океану, як це описано вище [25]. Складова SST відповідає довгохвильовому осередненню океанічних течій або їх найбільш стабільним циркуляціям [82]. Типовим прикладом є відома течія Гольфстрім, осереднення якої за рік співпадає з різними даними, починаючи з 18 століття. Північно-південний (меридіональний) градієнт SST є пропорційним до східно-західної (зональної) компоненти геострофічної швидкості океанічної поверхневої течії [73]. Зональний градієнт SST є пропорційним швидкості в меридіані [39]. Зауважимо, що геострофічні течії відповідають такому поверхневому руху морської води, який обумовлений балансом дій гравітаційних сил і ефекту Коріоліса (без врахування впливу сили тертя). В такому випадку гравітаційний ефект контролює нахил поверхні океану [87], а густина води залежить від горизонтальних змін температури та солоності [12]. Геострофічні течії відносяться до класу великомасштабних горизонтальних циркуляцій, які залежать від градієнтів густини, що задаються поверхневим теплом та солоністю води [85].

4.3 Основні співвідношення для побудови поля Δg та (квазі)геоїда за даними SSH

Визначення еквіпотенціальної поверхні поля сили тяжіння W в земній системі координат формалізується традиційним рівнянням [29]:

$$W(x, y, z) = W_0 = \text{const}, \quad (4.7)$$

де сталу W_0 вибирають так, щоб поверхня (квазі)геоїда була близькою до поверхні рівня моря. Відзначимо необхідність розділення концепцій “геоїда” та “квазігеоїда” на континентах, однак, на морі ці поверхні збігаються,

оскільки ортометричні H^* та нормальні висоти H^γ дорівнюють одна одній [26]. (Квазі)геоїд – це поверхня, отримана шляхом вилучення нормальної висоти відносно поверхні Землі, вона не є рівневою поверхнею. Оскільки поверхня (квазі)геоїда не може бути знайдена коректно [29], зупинимось на визначенні аномалії висоти (або висоти (квазі)геоїда) шляхом розв'язку рівняння (4.7). Згідно теорії Молоденського, якщо порівняти потенціал сили тяжіння $W = W_0$ в точці P на поверхні Землі [6]

$$W(P) = U(P) + T(P) = W_0 = \text{const}, \quad (4.8)$$

з нормальним потенціалом $U = U_0$ референцного еліпсоїда в точці Q на поверхні телуроїда, яку ще називають гіпсометричною

$$U(Q) = U_0 = W(P) = W_0 = \text{const}, \quad (4.9)$$

і яка відповідає такому потенціалу $U(Q)$, що дорівнює потенціалу сили тяжіння $W(P)$ на поверхні Землі, то аномальний потенціал T , аномалія висоти ζ та аномалія сили тяжіння Δg (в сенсі Молоденського) визначаються як

$$T(P) = W(P) - U(Q), \quad (4.10)$$

$$\zeta = H - H^\gamma, \quad (4.11)$$

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q, \quad (4.12)$$

$$\Delta g = -\frac{\partial N}{\partial r} \gamma - \frac{2N}{r} \gamma, \quad (4.13)$$

з нормальною силою тяжіння в точці Q на поверхні телуроїда [29]:

$$\gamma_Q = \gamma_0 \left[1 - 2(1 + f + m - 2f \sin^2 B) \frac{H^\gamma}{a} + 3 \left(\frac{H^\gamma}{a} \right)^2 \right], \quad (4.14)$$

$$\gamma_0^{GRS80} = \gamma_a \frac{1 + k \sin^2 B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}, \quad k = \frac{b\gamma_b}{a\gamma_a} - 1, \quad (4.15)$$

Співвідношення з константами GRS80 трансформується до наступної форми:

$$\gamma_Q = \gamma_0^{GRS80} - k_1 H^\gamma + k_2 H^{\gamma^2}, \quad k_1 = 0.308769(1 - 0.000440 \sin^2 B), \quad (4.16)$$

$$k_2 = 0.07212 \cdot 10^{-6},$$

де для обчислення $\gamma = \gamma_0$ на еліпсоїді приймається нормальна формула GRS80.

4.4 Фільтрація вихідних даних

Використовуючи висоти SSH в регіоні, що досліджується, доцільно виконати побудову висот (квазі)геоїда N в цій області, які можуть відрізнятися від статичної моделі SSH_0 на рівні < 2 м. Фільтрація різниць $(SSH - N)$ призводить до регіональної моделі стаціонарної частини топографії океану SST_0 в регіоні Чорного моря. При цьому за основу було взято дані альтиметрії за період з 1992 по 2007 р.р. з використанням моделі гравітаційного поля для техніки вилучення-відновлення. Розходження у висотах (квазі)геоїда не повинні перевищувати 10 см. [89].

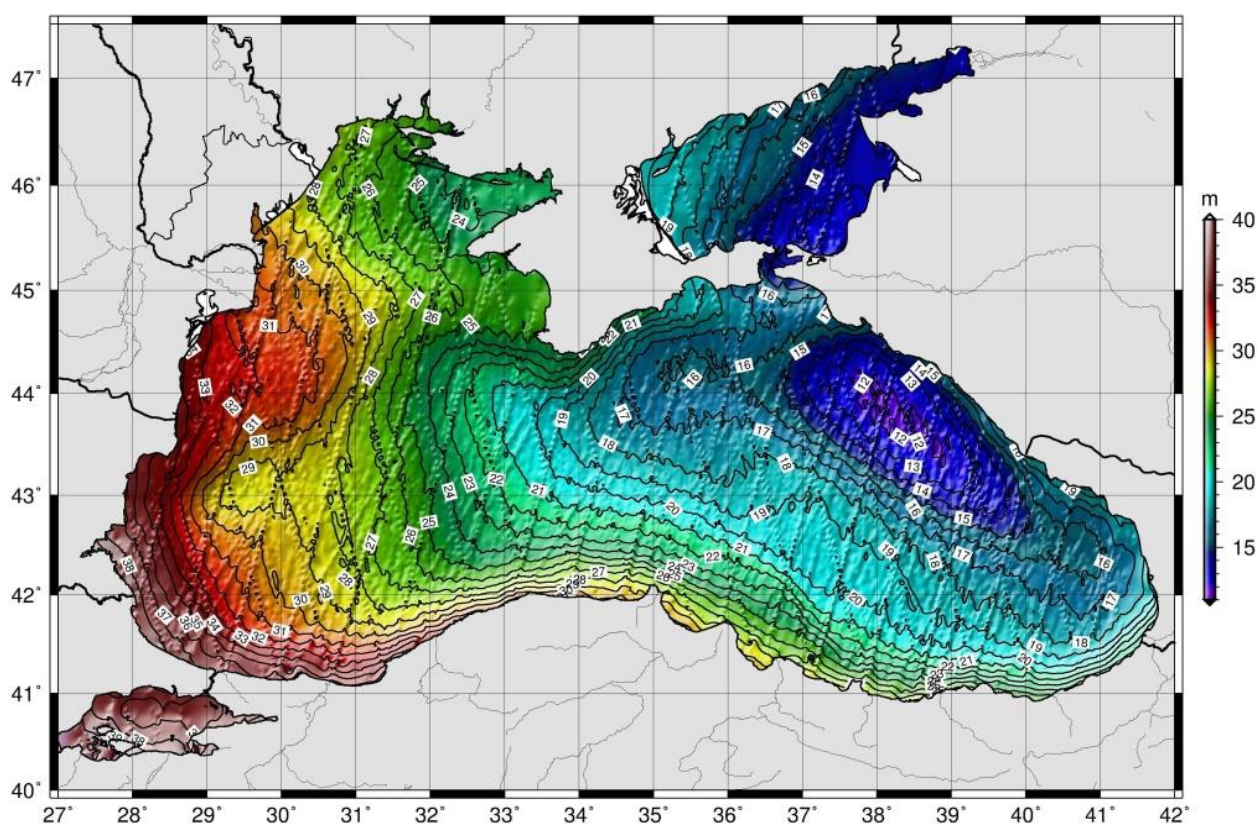


Рис.4.1. Осереднені в часі скореговані висоти [м] поверхні моря $CorSSH$ за даними GFO, ERS-1, ERS-2, TOPEX/POSEIDON, JASON-1 та ENVISAT в регіоні Чорного моря

Рис. 4.1 ілюструє не тільки межі вибраного регіону, але й осереднені в часі висоти поверхні моря $CorSSH$ супутникової альтиметричної місії ERS-1 (за період із червня 1992 до липня 1996), місії ERS-2 [15](за період з квітня 1995 до червня 2003) [74], TOPEX/POSEIDON (за період з вересня 1992 по

жовтень 2005) [11], місії GFO (за період з січня 2000 по лютий 2007), JASON–1 (за період з січня 2002 по лютий 2007) та місії ENVISAT (за період з листопада 2002 по березень 2006) [40].

Рис. 4.2. Високочастотне згладжування висот SSH [м] фільтрацією за Гауссом [8]

Рис. 4.2 демонструє відфільтровані дані SSH для обчислення висот рівня моря на рівномірній сітці із значеннями SSH_0 , що одержані за альтиметричними вимірами.

4.5 Інверсія висот поверхні моря SSH в аномалії сили тяжіння Δg

Інверсія висот поверхні моря або визначення залишкових $\delta\Delta g$ аномалій сили тяжіння за залишковими висотами (квазі)геоїда $\delta\zeta$ виконується також в рамках процедури вилучення-відновлення та базується на оберненій формулі Молоденського і фундаментальному співвідношенню фізичної геодезії, записаному через висоти (квазі)геоїда

Послідовності дій у процедурі вилучення-відновлення для визначення Δg відображена на рис. 4.3. Додатково до рис.4.3 додано процес фільтрації даних SSH з метою високочастотного згладжування остаточних змін в часі, що включають вихідні дані SSH.

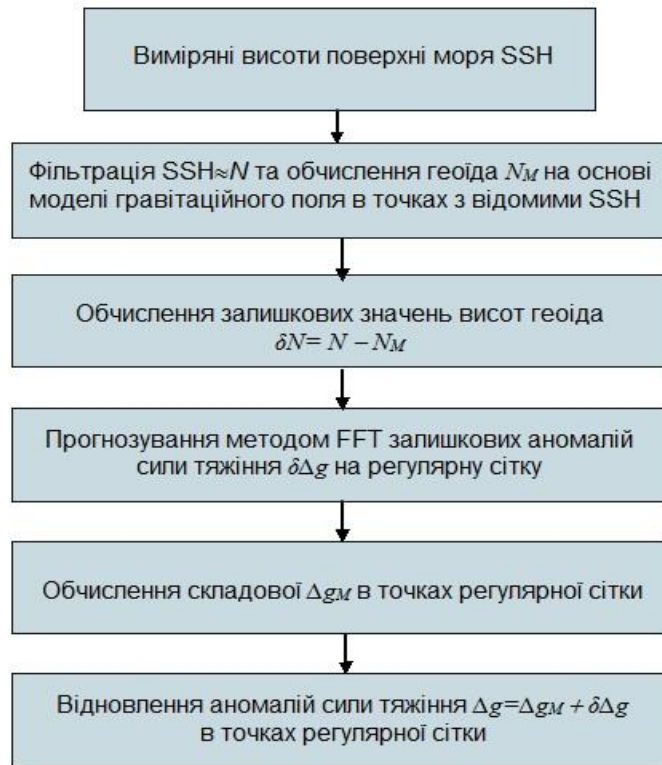


Рис. 4.3. Послідовність дій у процедурі вилучення-відновлення аномалій сили тяжіння

Інтеграл Стокса і обернена формула Стокса [32] можуть бути обчислені в спектральній області, як інтеграли типу згорки із застосуванням швидкого перетворення Фур'є (FFT) [88]. Згідно теореми згортки запишемо рівняння для інверсії функції Δg за даним аномальним потенціалом

$$\Delta g(\vartheta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} T(\vartheta', \lambda', R) \hat{Z}(\vartheta, r) d\sigma, \quad (4.17)$$

де ядро $\hat{Z}(\vartheta, r)$ умовно включає нульові члени нульового та першого степеня

$$\hat{Z}(\vartheta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} P_n(\cos\vartheta), \quad (4.18)$$

$$\hat{Z}(\vartheta, r) = -R \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) \cdot U(\vartheta, r), \quad (4.19)$$

Залишкові аномалії сили тяжіння по аналогії з (4.17) визначаються за допомогою швидкого перетворення Фур'є (FFT), що застосовується до залишкових висот геоїда

$$\delta\Delta g(\vartheta, \lambda, r) = \frac{\gamma}{4\pi R} \iint_{\sigma_0} \delta N(\vartheta', \lambda', R) \hat{Z}(\psi, r) d\sigma$$

$$\delta N = \delta T / \gamma, \quad (4.20)$$

Ядро $\hat{Z}(\psi, r)$ не має гармоніки нульового степеня і може бути записано у іншій формі:

$$\hat{Z}(\psi, r) = Z(\psi, r) - \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi) \quad Z(\psi, r) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \cdot n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} P_n(\cos\psi), \quad (4.21)$$

Оскільки в $Z(\psi, r)$ не існує нульової гармоніки першого степеня, то її інтеграл по сфері рівний нулю, а (4.17) можна записати в формі оберненої формули Стокса

$$\Delta g(\vartheta, \lambda, r) = -\frac{T(\vartheta, \lambda, r)}{r} + \frac{1}{4\pi R} \bullet$$

$$\iint_{\sigma} [T(\vartheta', \lambda', R) - T(\vartheta, \lambda, r)] Z(\psi, r) d\sigma, \quad (4.22)$$

Тобто, для залишкових висот (квазі)геоїда δN , заданих на рівномірній сітці з кроком ΔB по широт ($B_i = B_1, B_2, \dots, B_K$) і ΔL по довготі, ($L_k = L_1, L_2, \dots, L_M$), інтеграл (4.20) можна написати в числовій формі через більш зручну робочу формулу для 2D перетворення Фур'є

$$\Delta g(\Theta, \lambda, r) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\sigma} T(\Theta', \lambda', R) \hat{Z}(\psi, r) d\sigma, \quad (4.23)$$

де \bar{B} – середня широта області σ_0 інверсії аномалій сили тяжіння. Застосовуючи двовимірне швидке перетворення Фур'є 2D FFT, яке реалізовано у комплексі програм Generic Mapping Tools (GMT) [102], представимо рівняння в операторній формі [90]:

$$\delta\Delta g(B_i, L_k) = \frac{\gamma}{4\pi R} \mathbf{F}^{-1}$$

$$\left\{ \mathbf{F}[\delta N(B_i, L_k) \cos B_i] \mathbf{F}[\hat{Z}(B_i, L_k, \bar{B})] \right\}, \quad (4.24)$$

де \mathbf{F} – оператор прямого 2D перетворення Фур'є з просторової в частотну область; \mathbf{F}^{-1} – оператор оберненого 2D перетворення Фур'є. Рівняння (4.24) дає можливість обчислити поле аномалій сили тяжіння у сферичній апроксимації одночасно в усіх точках ґрідy, використовуючи для цього двовимірний 2D FFT метод швидкого перетворення Фур'є.

4.6 Побудова (квазі)геоїда на основі процедури вилучення – відновлення

Відзначимо, що побудова (квазі)геоїда базується на апроксимації аномального потенціалу в рамках процедури вилучення – відновлення і полягає у видаленні з вимірів добре відомої частини поля сили тяжіння перед апроксимацією залишкової частини у формі дискретно заданої функції, та його відновленні у висотах (квазі)геоїда після процесу наближення функцій. Таким чином, згідно відновлення аномалії висоти в досліджуваному регіоні може бути виконано за допомогою простого виразу

$$\zeta = \zeta_M + \zeta_T + \delta\zeta, \quad (4.25)$$

де ζ – аномалія висоти; ζ_M – внесок глобальної моделі гравітаційного потенціалу Землі з високим ступенем роздільної здатності; ζ_T – ефект топографічних мас у висоти (квазі)геоїда; $\delta\zeta$ – висоти залишкового (квазі)геоїда.

Співвідношення (4.25) традиційно пов'язане з наступним рівнянням

$$\Delta g = \Delta g_M + \Delta g_T + \delta\Delta g, \quad (4.26)$$

де Δg – аномалії сили тяжіння; Δg_M – внесок тієї ж самої моделі геопотенціалу з високим ступенем роздільної здатності; Δg_T – ефект топографічних мас в аномалії сили тяжіння; $\delta\Delta g$ – залишкові аномалії сили тяжіння.

Зрозуміло, якщо $(\zeta_M, \Delta g_M)$ і $(\zeta_T, \Delta g_T)$ обчислені за допомогою однієї і тієї ж моделі геопотенціалу та топографії, відповідно, є можливою процедура видалення:

$$\delta\zeta = \zeta - (\zeta_M + \zeta_T), \quad (4.27)$$

$$\delta\Delta g = \Delta g - (\Delta g_M + \Delta g_T), \quad (4.28)$$

Для подальшої обробки даних сучасними методами, як вихідна інформація, використовується саме залишкове поле аномалій (4.28). Отже, після обчислення (4.28) наступним кроком є пряме використання одного з методів апроксимації $\delta\zeta$ залишкових висот, застосовуючи в якості вимірів аномалії Δg . На основі обчислених значень ζ_M і ζ_T відновлюються висоти (квазі)геоїда на вибраній множині точок, що відображено на рис. 4.4 у формі послідовності дій у процедурі вилучення-відновлення.

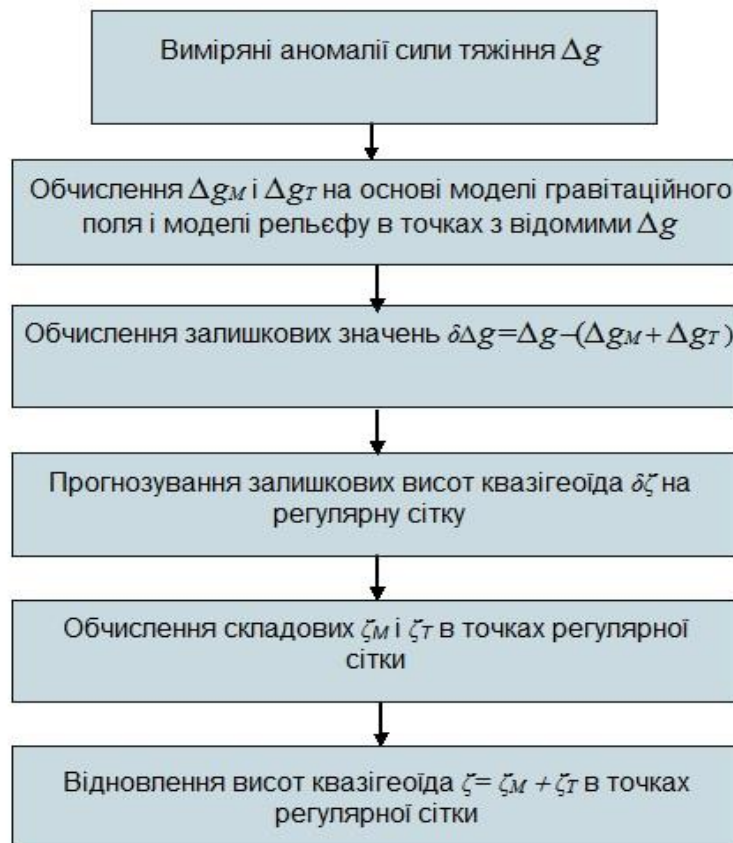


Рис. 4.4. Послідовність дій у процедурі вилучення-відновлення.

Якщо гравіметричний (квазі)геоїд будується для поверхні σ всієї Землі, наприклад, методом середньої квадратичної колокації [65] або варіаційним методом фізичної геодезії, то при певному виборі нормального поля може застосовуватись наступна умова:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \Delta g \, d\sigma = M\{\Delta g\} = 0, \quad (4.29)$$

де символ M – оператор осереднення по поверхні сферичної Землі.

Відзначимо, що виконання умови (4.29) відповідає нульовим сферичним гармонікам в розкладі аномального потенціалу T в ряд за сферичними функціями. В результаті умова

$$M\{T\} = 0, \quad (4.30)$$

повинна виконуватись для аномального потенціалу T . Умови (4.29) і (4.30), на жаль, не виконуються апріорі саме в регіональних та локальних випадках, що і є головною причиною застосування в цьому разі процедури вилучення – відновлення.

Класичний підхід застосування формули Стокса розглядається тепер як сучасний метод обчислення висот (квазі)геоїда в першому наближенні Молоденського за даними аномалій сили тяжіння в рамках процедури вилучення – відновлення:

$$\delta\zeta(P) = \frac{R}{4\pi\bar{\gamma}} \iint_{\sigma_0} (\delta\Delta g_F) S(\psi) d\sigma, \quad (4.31)$$

де σ_0 відповідає інтегруванню по області вибраного регіону робіт, $\delta\Delta g_F$ – залишкова аномалія сили тяжіння Фая, яка формується за допомогою суми аномалії у вільному повітрі Δg та поправки за рельєф; $\delta\Delta g_F$ – залишкова висота (квазі)геоїда; R – середній радіус Землі; $\bar{\gamma}$ – середнє значення сили тяжіння; $d\sigma$ – елемент сферичної поверхні; ψ – сферична відстань від біжучої точки P до $d\sigma$; $S(\psi)$ – функція Стокса:

$$S(\psi) = \operatorname{cosec}(\psi/2) + 1 - 5 \cos\psi - 6 \sin(\psi/2) - 3 \cos\psi \ln\left[\sin(\psi/2) + \sin^2(\psi/2)\right], \quad (4.32)$$

Згадаємо тепер, що формула (4.31) включає необхідність обчислення поправки за рельєф в аномалії у вільному повітрі для визначення аномалій Фая як вихідної інформації для побудови (квазі)геоїда в першому наближенні Молоденського. Однак така поправка не є необхідною при визначенні (квазі)геоїда на морських акваторіях. Тому на першому етапі обчислюємо у заданих вузлах інтегрування внесок в $\Delta g = \Delta g_F$ аномалій сили тяжіння моделі

геопотенціалу, за рахунок чого операція видалення (4.28) трансформується до виразу

$$\delta\Delta g = \Delta g_F - \Delta g_M, \quad (4.33)$$

На другому етапі застосовуємо залишки $\delta\Delta g$ у формулі (4.31) для знаходження компоненти $\delta\zeta$ шляхом застосування швидкого перетворення Фур'є (FFT) в межах процедури “вилучення-відновлення” - спочатку з величин Δg_F видаляється внесок глобальної моделі гравітаційного поля Землі і обчислюються значення залишкових аномалій $\delta\Delta g_F$ сили тяжіння. Потім за відомими $\delta\Delta g_F$ методом FFT визначаються залишкові висоти (квазі)геоїда $\delta\zeta$. Після обчислення $\delta\zeta$ в цих точках відновлюються висоти (квазі)геоїда ζ за допомогою тієї ж моделі гравітаційного поля. Усі співвідношення описні в [88], [90], [4], тому для функції Стокса формула Молоденського запишеться з $B_l = B_1, B_2, \dots, B_N$:

$$\sin^2(\psi/2) \approx \sin^2(B_p - B)/2 + \sin^2(L_p - L)/2(\cos^2 \bar{B} - \sin^2(B_p - B)/2) \quad (4.34)$$

Крім того, враховуючи можливість використання планової апроксимації функції Стокса або її запису з наближенням, замість обчислення залишкових висот (квазі)геоїда в просторовій області їх можна знайти шляхом переходу в частотну область використанням як одновимірного 1D, так і двовимірного 2D перетворення Фур'є FFT. Застосовуючи двовимірне швидке перетворення Фур'є 2D FFT, яке реалізовано у комплексі програм Generic Mapping Tools (GMT) [102] представимо в операторній формі [102]:

$$\delta\zeta(B_l, L_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} \mathbf{F}^{-1} \times \left\{ \mathbf{F}[\delta\Delta g(B_i, L_k) \cos B_i] \mathbf{F}[S(B_i, L_k, \bar{B})] \right\} \quad (4.35)$$

Таким чином, після обчислення залишкових висот квазігеоїда на основі (4.35) та операції “відновлення” $\zeta = \zeta_M + \delta\zeta$ отримуємо шукані висоти (квазі)геоїда.

4.7 Побудова статичної моделі SSH_M висот поверхні моря

Простий аналіз рис.4.1 показує, що простого осереднення недостатньо за рахунок присутності в даних CorSSH таких компонент, які є змінними у часі. Оскільки осереднення виконується у просторі/часі, то точність моделей різних редукцій з 1992 по 2007 рр. явно міняється і може не задовольняти сучасним вимогам. З подальших досліджень буде видно, що в такому випадку причиною розбіжностей є використання осереднених висот топографії океану, які наближено дорівнюють висотам (квазі)геоїда і можуть мати постійні відхилення. Тому в наступному розділі ми переходимо до високочастотної фільтрації даних SSH, побудови згладженої поверхні SSH, побудови поля аномалій сили тяжіння, побудови регіонального гравіметричного (квазі)геоїда та регіональної моделі стаціонарної частини топографії океану відносно поверхні цього гравіметричного (квазі)геоїда.

Як вже було зазначено вище, систематичний вплив різних течій на осереднені дані мареографів не дозволяє виконання простої перевірки одержаної моделі поверхні (квазі)геоїда на незалежних даних про середні висоти рівня океану. Найбільш доцільним підходом в такій ситуації є побудова моделі стаціонарної частини SST₀ топографії океану та вивчення залежних від часу SST₀ її компонент. Такий підхід призводить до необхідності розв'язування низки додаткових задач, а саме: побудова поля Δg (рис.4.5) за фільтрованими SSH₀ методом швидкого перетворення Фур'є (в рамках процедури "вилучення – відновлення"), що дає змогу суттєво зменшити вплив систематичних ефектів, які присутні в даних SSH₀ на рис.4.6.; побудова гравіметричного (квазі)геоїда (рис.4.6) в рамках процедури "вилучення – відновлення" (методом швидкого перетворення Фур'є).

Після приведення гравіметричного (квазі)геоїда до середньої припливної системи можна отримати висоти топографії моря (рис. 4.8) для досліджуваного регіону на основі

$$SST = CorSSH - N_{MTS}, \quad (4.36)$$

де $CorSSH$ є значеннями висот рівня моря, одержаних із альтиметричних вимірів у системі MTS; SST – (“сирі”) висоти поверхні моря відносно поверхні (квазі)геоїда, які обтяжені похибками, що залежать від часу за рахунок неточності моделювання різного роду ефектів, що залежать від часу [10].

Рис. 4.7 ілюструє наявність у сирих значеннях SST високочастотних залишків різних редукцій, які залежать від часу. Цей факт призводить до необхідності проведення фільтрації сирих даних SST, обчислених лише на основі виразу (4.36), одним із відомих методів. Фільтрація даних може бути виконана, наприклад, застосуванням фільтра Гаусса, який характеризується відмежуванням високо частотних шумів із сигналу, представленого на рис. 4.2, рис. 4.7 і є одним з найбільш популярних методів фільтрації. При цьому центральний елемент має найбільше значення і відповідає піку нормального розподілу Гаусса. В межах вибраного вікна фільтрації значення решти елементів зменшуються в міру віддалення від центрального елемента згідно добре відомого нормального закону. Відзначимо, що незалежно від вибору одного з методів фільтрації в результаті буде отримана модель стаціонарної частини SST_0 топографії океану, яка дає змогу провести як незалежну перевірку (квазі)геоїда, так і якість самої моделі SST_0 на вибраних футштоках.

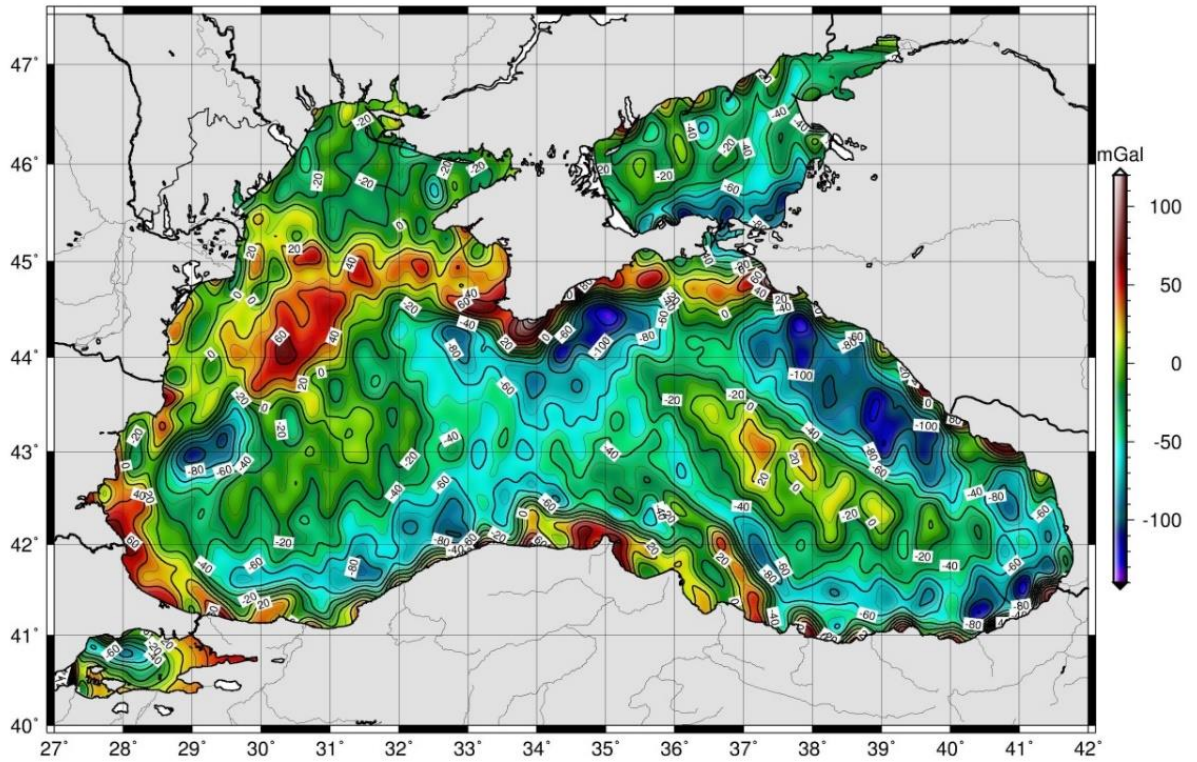


Рис.4.5. Визначення аномалії сили тяжіння [мГал] за альтиметричними даними на регіон Чорного моря

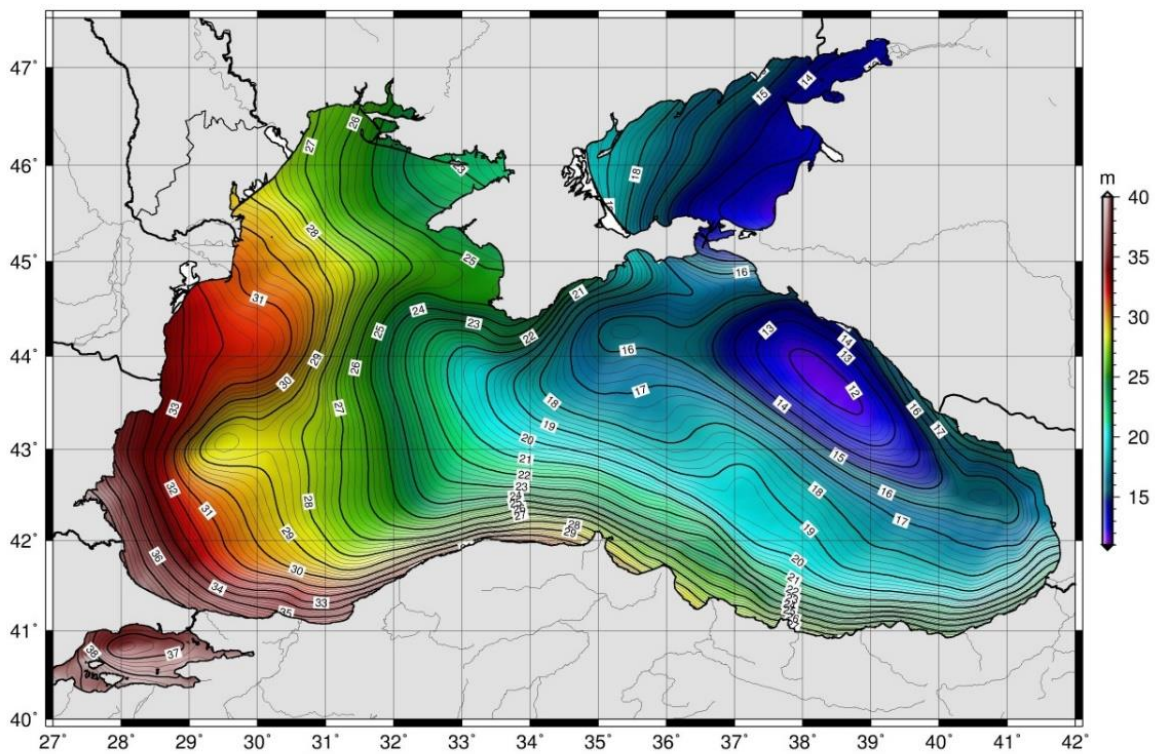


Рис. 4.6. Висоти (квазі)геоїда [м] на регіон Чорного моря побудовані за даними Δg

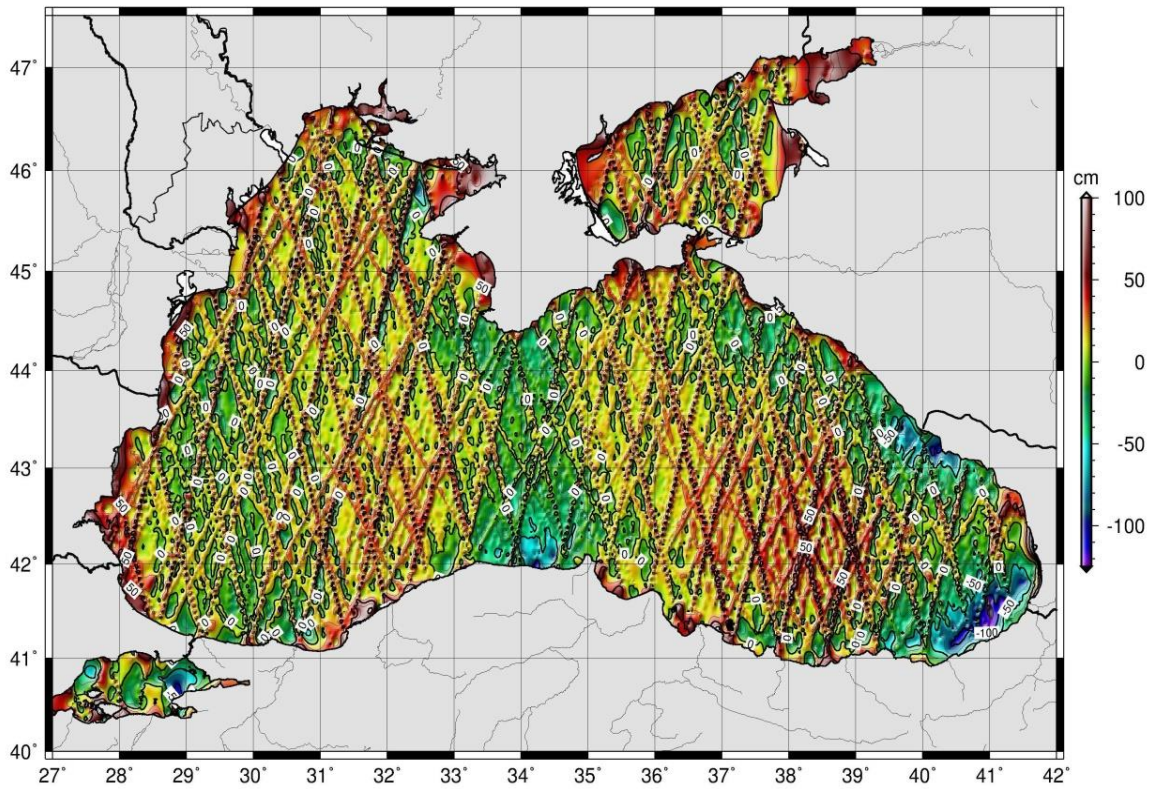


Рис.4.7. Висоти [см] топографії моря $SST=(CorSSH-N)$
на регіон Чорного моря

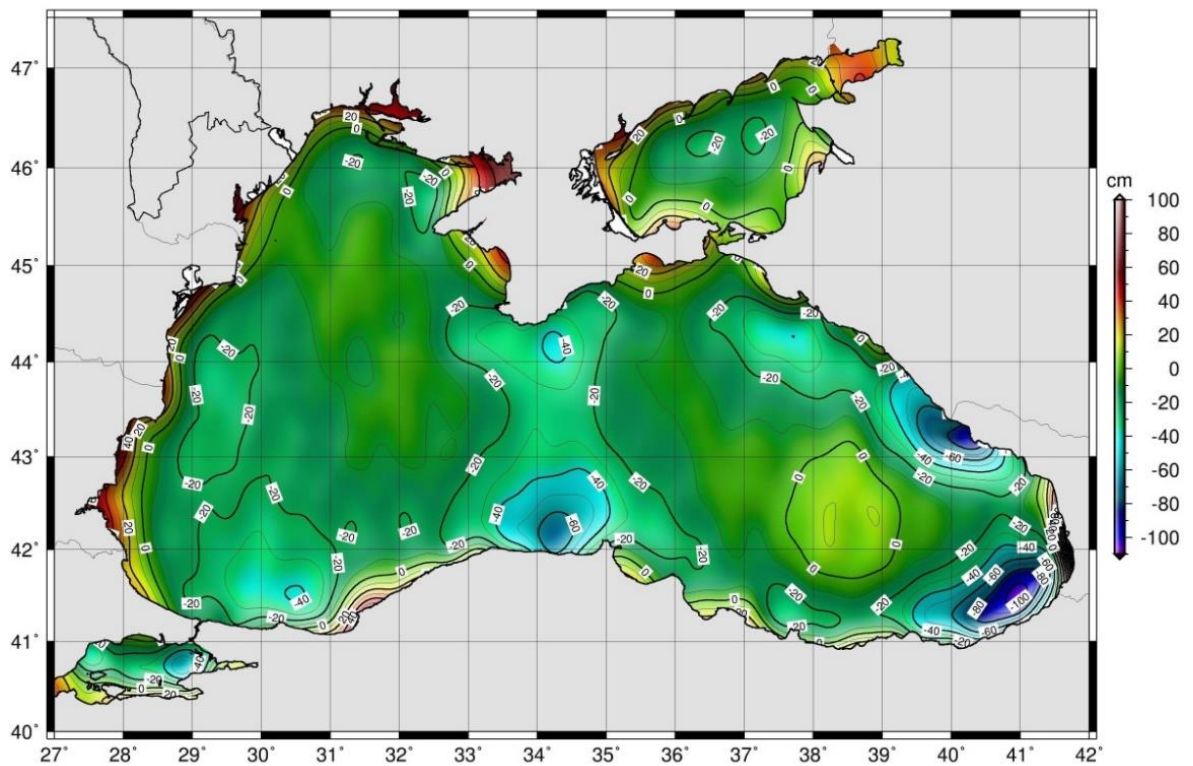


Рис. 4.8. Модель висот [см] топографії моря SST_0 на регіон Чорного моря

Оскільки нижче буде застосована фільтрація за Гауссом, то більш детально зупинимось саме на фільтрі Гаусса. При обробці сигналів основою даного фільтру є біжуче вікно, що базується на функції Гаусса (на значенні стандартного відхилення σ). Математично фільтр Гаусса змінює вхідний сигнал згорткою із функцією нормального розподілу. Така фільтрація приймається для видалення високочастотних шумів.

Оскільки рівномірна сітка висот CorSSH представляє собою функцію двох змінних, то в нашому випадку будемо застосовувати відповідний двовимірний ізотропний варіант (колова симетрія по азимуту) одновимірної фільтрації. В цьому випадку Гауссіан може бути представленим у такій формі:

$$G(x, y) = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.37)$$

Прикладом реалізації різних методів фільтрації функції двох змінних є відомий програмний комплекс GMT [102], розроблений для прикладних задач наук про Землю, в тому числі – для опрацювання даних альтиметрії.

Отже, на основі хаотично заданих альтиметричних вимірів на першому етапі застосовується фільтр Гаусса для фільтрації даних SSH та їх осереднення в часі, які попадають у кожен вибрану трапецію, а на останньому етапі використовується високочастотна фільтрація даних SST (рис. 4.7), і в результаті отримана модель стаціонарної топографії моря SST_0 над (квазі)геоїдом з розмахом ± 25 см, на основі моделі гравітаційного поля Землі за даними GOCE, що вивчається (рис. 4.8).

4.8 Висновки та рекомендації

1. Виконана фільтрація даних SSH для обчислення висот рівня моря на рівномірній сітці за значеннями, що одержані за альтиметричними вимірами;
2. Побудоване поля Δg за фільтрованими SSH методом швидкого перетворення Фур'є (в рамках процедури "вилучення – відновлення"), що дає змогу суттєво зменшити вплив систематичних ефектів, які присутні як правило в даних SSH.

3. Побудований гравіметричний (квазі)геоїд в рамках процедури "вилучення відновлення".

4. Виконана високочастотна фільтрація даних SST для обчислення моделі стаціонарної топографії моря SST_0 над (квазі)геоїдом на регіон Чорного моря.

5. Процедура «вилучення-відновлення» базувалася на основі моделі **GOCE-LP02s** до 180 степеня/порядку побудованої за даними GOCE.

6. Створена регіональна модель стаціонарної частини топографії океану SST в регіоні Чорного моря на основі даних альтиметрії за період з 1992 по 2010 р.р..

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В дисертації вирішено наукове завдання вдосконалення існуючих методів побудови моделей гравітаційного поля Землі за супутниковими даними. В результаті виконаних досліджень можна зробити такі висновки:

1. Використано результати роботи градієнтометричної місії GOCE, загальною кількістю точкових даних 80 860 570 вимірів для побудови глобальної моделі гравітаційного поля Землі.

2. Побудовано регулярну сітку Гаусса-Лежандра на 259 200 вузлів для визначення гармонічних коефіцієнтів розкладу гравітаційного потенціалу із застосуванням фільтру Кальмана.

3. Побудовано модель гравітаційного поля GOCE-LP01s за даними супутникової градієнтометрії до 220 степеня/порядку відносно нормального поля WGS84 до 10 степеня, а також модель GOCE-LP02s 250 степеня/порядку відносно поля GOCE-LP01s до 180 степеня/порядку.

4. Виконано порівняння побудованих моделей з висотами квазігеоїда отриманого за допомогою GPS – нівелюванням на територію України, з стандартним відхиленням 40 см, що відповідає іншим сучасним розв'язкам, отриманими за даними GOCE.

5. Побудовано гравіметричний квазігеоїд на регіон полігону New Mexico з використанням моделі GOCE_LP02S використовуючи метод FFT та техніку «вилучення-відновлення».

6. Апробовано моделі GOCE-LP01s та GOCE-LP02s в межах визначення стаціонарної топографії на акваторіях Чорного моря шляхом використання даних супутникової альтиметрії за період з 1992 по 2010 р.р.

7. Побудовано поле аномалій сили тяжіння Δg за фільтрованими SSH методом FFT та гравіметричний квазігеоїд в рамках процедури "вилучення - відновлення".

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. 4-е изд., стереотип. - М.: Наука, Физматгиз, 1969 - 576 с
2. Кочин Н.Е. (1951) Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. Наука: Москва, 427 с.
3. Крылов А.Н., 1933, Лекции о приближенных вычислениях, Изд-во АН СССР, 551 ст
4. Марченко О. М., Янчук О. Є. (2008) Побудова гравіметричного квазігеоїда на регіон Молдови методом швидкого перетворення Фур'є// Вісник геодезії та картографії. – Київ, 2008, №6. - С.7-14.
5. Марченко О.М., Ярема Н.П. (2006) Визначення середніх рівнів Балтійського і Чорного морів та їх змін у часі // Вісник геодезії та картографії. – Київ, 2006, №6. - С.2-9.
6. Молоденский М.С., Еремеев В.Ф., Юркина М.И. (1960) Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр. ЦНИИГАиК.– Вып. 131.– М. 1960. – 251 с.
7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. (1974) Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974, 222 с.
8. Хемминг Р.В. (1987) Цифровые фильтры: Пер. с англ. Ред. пер. О.А. Потапов. — М.: Недра, 1987. – Пер. изд.: США, 1983. – 221 с.
9. Albertella A., Migliaccio F., Sanso F. (2002) GOCE: The Earth Gravity Field by Space Gradiometry. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. Vol. 83, 1-15
10. Andersen O.B., Knudsen P. (2008) The DNSC08MDT Mean Dynamic Topography, (DTU-SPACE), Danish National Space Center
11. Benada J.R. PO.DAAC (1997) Merged GDR (TOPEX/POSEIDON) Generation B. Users Handbook. Version 2.0, July 30, 1997. – 15 p.
12. Brovelli M.A., Sanso F. (1993) Is the determination of the geoid a reasonable problem? IGeS Bulletin. No 2, 1993, 53–65
13. Cartwright D.E., Edden A.C. (1973) Corrected Tables of Tidal

Harmonics. Geophys J.R. Astr. Soc.33: 253–264

14. Casotto S, Fantino E (2009) Gravitational gradients by tensor analysis with application to spherical coordinates. *Journal of Geodesy*. Vol. 83, 621-634

15. Denker, H., Torge W. The European Gravimetric Quasigeoid EGG97 – An IAG supported continental enterprise // In: IAG Symposium “Geodesy on the Move – Gravity Geoid, Geodynamics, and Antarctica”. Proceedings, Vol. 119, Springer Verlag. 1997, pp. 249-254.

16. DMA (1987) Supplement to department of defence world geodetic system 1984 technical report / DMA technical report DMA TR 8350.2-B, 1987. 171 p.

17. Driscoll, J.R. and D.M. Healy (1994) Computing Fourier transforms and convolutions on the 2-sphere. *Adv. Appl. Math.*, 15(2):202_250.

18. Eicker, A., T. Mayer-Gürr and K.H. Ilk (2006) An integrated global/regional gravity field determination approach based on GOCE observations. Rummel, R., Ch. Reigber, M. Rothacher, G. Boedecker, U. Schreiber and J. Flury (Eds.), *Observation of the Earth System from Space*, Springer, Berlin - Heidelberg, 225_237.

19. Eötvös L. (1896) Studies in the field of gravity and magnetism. In: “Three fundamental papers of Loránd Eötvös”, Transl. from Hungarian, ELGI Budapest, 1998, p. 83-125

20. Farrell, W. E. (1972) Deformation of the Earth by surface loads, *Rev. Geophys. and Spac. Phys.*, Vol. 10 (3), 751–797

21. Forsberg R., Tscherning C.C. (1981) The use of height data in gravity field approximation by collocation. *J. Geophys. Res.*, Vol. 86, No B9, 7843-7854

22. Gauss K.F. (1877). *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs und Abstossungskräfte*. Resultate 1840. "Werke", Bd. V, 195-242, Ostwald Klassiker, No 2, Leipzig, 1889

23. Ghitau D., Wolf H. L. (1983) Relativ-Modelle für die geodatische Bestimmung von Krustenbewegungen im Erdbeben gebiet Vermessungsw, 1983, №

4, 146-160.

24. Groten E. (2004) Fundamental parameters and current best estimates of the parameters of common relevance to astronomy, geodesy and geodynamics. *Journal of Geodesy*, 77, 724-731

25. Guohua G., Prescott W. H. (1986) Discussion on displacement analysis: detection of crustal deformation, *J. Geophys. Res.*, 1986, № 7, 1439-1446.

26. Haan Auke de Forlani Gianfranco, (1989) The system of programs LEVEL for kinematic levelling adjustments, *Boll. geod. esci. Affini*, 1989, № 4, 329-342.

27. Haines A. J., Holt W. E. (1993) A procedure for obtaining the complete horizontal motions within zones of distributed deformation from the inversion of strain rate data, *J. Geophys. Res.*, Vol. 98, 12057–12082

28. Heer R., Leonhard T. (1982) A method for detecting vertical soil movements from scattered levelling nets applications on the first precise leveling nets of Hamburg, *Veroff. Dtsch. geod. Kommis. Bayer. Akad. Wiss*, 1982, № 258/5, P. 126-147

29. Heiskanen W.A., Moritz H. (1967) *Physical Geodesy*. W.H. Freeman, San Francisco. – 364 p.

30. Hofmann–Wellenhof B., H. Moritz, (2005) *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 2005, 403 p.

31. Hong-Sic Yun (1999) Precision geoid determination by spherical FFT in and around the Korean peninsula, *Earth Planets Space*. – 1999. – 51. – P. 13-18.

32. Hotin M. (1967) *Mathematical Geodesy*, W.H. Freeman, San Francisco, 1967

33. International Association of Geodesy (IAG) (1984) IAG Resolutions adopted at the XVIII General Assembly of the IUGG in Hamburg, August 1983. *Bulletin Geodesique*, 58(3), "The Geodesist's Handbook", p. 321.

34. Jäger R. and S. Kälber *Precise Vertical Reference Surface Representation and Precise Transformation of Classical Networks to ETRS89/ITRF - General Concepts and Realization of Databases for GIS, GNSS and Navigation*

Applications in and outside Europe // Proceedings of 2nd Common Baltic Symposium, Riga, June 12 - 13, 2003, 28 p.

35. Janes H.W., Langley R.B., Newby S.P. (1989) A comparison of several models for the prediction of tropospheric propagation delay. Proceedings of the Fifth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning. – Las Cruces, USA, – Vol. 2, 777–788

36. Janes H.W., Langley R.B., Newby S.P. (1989) A comparison of several models for the prediction of tropospheric propagation delay. Proceedings of the Fifth International Geodetic Symposium on Satellite Positioning. – Las Cruces, USA, – Vol. 2, 777–788

37. Jekeli, C., 1988, The gravity gradiometer survey system (GGSS): *Eos*, 69, 105 and 116-117.

38. Johnstone G. (2002) SCAR Geodetic Control Database, Antarctic Geodesy Symposium 2002 Wellington, New Zealand, 25-27

39. Julliette L., Altamimi Z., Olivier J. (2006) Interpolation of the European velocity field using least squares collocation method. Paper presented at the EUREF Symposium 2006. Riga, Latvia, 14 – 17 June, 2006

40. Kakkuri J. (1997) Postglacial deformation of the Fennoscandian crust, *Geophysica*, Vol. 31, 99-109

41. Kalman R.E. (1960) A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82 (1): 35–45

42. Krarup, T. (1969) A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. Danish Geod. Inst. Public., No 44, Copenhagen

43. Kreemer C., Haines J., Holt W. E., Blewitt G., and Lavallee D. (2000) On the determination of a global strain rate model. *Earth Planets Space*, Vol. 52, 765–770

44. Kreemer C., Holt W. E., Haines J. (2003) An integrated global model of present-day plate motions and plate boundary deformations. *Geophys. J. Int.*, Vol. 154, 8–34

45. Krumm F., Grafarend E., Friedrich D. (2000) Datum free Deformation

Analysis of ITRF networks Paper presented at the IAG International Symposium on Gravity, Geoid and Geodynamics 2000, July 31 - August 4, 2000, Banff, Alberta, Canada

46. Le Pichon X. (1968) Sea-Floor Spreading and Continental Drift. *J. Geophys. Res.*, Vol. 73, No. 12, 3661–3697

47. Lee, J.B., 2001, Falcon gravity gradiometer technology: Exploration Geophysics, 32, 247-250.

48. Lelgemann D., Marchenko A.N. (2001) The Earth's Mass and the Radial Density Profile Derived from Seismic Data : An Application of Generalised Darwin's Functions.. Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Munchen, Theoretische Geodasie, Reihe A, Heft Nr. 117, 31-51

49. Lemoine, F.G., Kenyon, S.C., Factor, J.K., Trimmer, R.G., Pavlis, N.K., Chinn, D.S., Cox, C.M., Klosko, S.M., Luthcke, S.B., Torrence, M.H., Wang, Y.M., Williamson, R.G., Pavlis, E.C., Rapp, R.H., Olson, T.R. The development of the joint NASA GSFC and the National Imaginery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96 - NASA Report TP-1998-206861, Goddard Space Flight Center, 1998.

50. Leonhard T. (1984) Geodatische Modelle zur Erfassung von Vertikalbewegungen *Wiss. Arb. Nachricht. Vermessungsw. Univ. Hannover.* 1984, № 133, 113-133.

51. Lundberg J.B., Schutz B.E. (1988) Recursion formulas for Legendre functions for use with nonsingular geopotential models. *J. Guidance Control Dyn.* 11(1), 31–38

52. Marchenko A.N. (1998) Parameterization of the Earth's Gravity Field: Point and Line Singularities. Published by Lviv Astronomical and Geodetic Society. Lviv, Ukraine, 1998, 210 p.

53. Marchenko A.N. (2009) Current estimation of the Earth's mechanical and geometrical parameters. In: M.G. Sideris (ed.), *Observing our Changing Earth*, International Association of Geodesy Symposia 133. – Springer-Verlag Berlin

Heidelberg, 2009, 473-481

54. Marchenko A.N. and O.A. Abrikosov (2001) Evolution of the Earth's principal axes and moments of inertia: The canonical form of solution. *Journal of Geodesy* Vol. 74, p. 655-669

55. Marchenko A.N., Barthelmes F., Meyer U., Schwintzer P. (2001) Regional Geoid Determination: An Application to Airborne Gravity Data in the Skagerrak. Scientific Technical Report STR01/07, Potsdam, 2001, 50 p.

56. Marchenko A.N., Kravtsov O.N., Abrikosov O.A. (2001) Closed expressions for the parameters of Helmert transformation. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, Anno LX, N.1, 2001, pp. 17-29

57. Marchenko A.N., Lelgemann D. (2001) Reproducing Kernels in Collocation and Mass Singularities. *Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Munchen, Theoretische Geodasie, Reihe A, Helft Nr. 117*, 7-29

58. Marchenko D., Mayer U., Bastos L. (2004) Airborne gravity disturbances in sequential multipole analysis for geoid determination and its test over the Azores. *Bolletino di Geodesia e Scienze Affini*, Istituto Geografico Militare Firenze, 2004, 102-114

59. McCarthy D., Petit G. (2004) IERS Conventions (2003), IERS Technical Note No.32, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodasie, Frankfurt am Main, 2004

60. Meier U., Curtis A., Trampert J. (2007) Fully nonlinear inversion of fundamental mode surface waves for a global crustal model. *Geophysical Research Letter*, Vol. 34, L16304, doi:10.1029/2007GL030989, 2007

61. Melchior P. (1978) *The tides of the planet Earth*. Pergamon

62. Mohlenkamp, M. (1997) *A Fast Transform for Spherical Harmonics*. Dissertation Presented to the Faculty of the Graduate School, Yale University.

63. Moritz H. (1977) Introduction to Interpolation and Approximation // *Proceedings of the 2nd International School "Approximation Methods in Geodesy"*. Ramsau, Austria, August 23 – September 2, 1977. – Wichmann: Karlsruhe, 1978. –

p. 1- 45

64. Moritz H. (1979) Report of Special Study Group 539, Fundamental Geodetic Constants, Paper presented at the XVII General Assembly of the IUGG, Int. Assoc. of Geodesy, Canberra, 1979

65. Moritz H. (1989) Advanced Physical Geodesy. 2nd edition, H. Wichmann, Karlsruhe.

66. Moritz H. and B. Hofmann-Wellenhof (1993) Geometry, Relativity, Geodesy. Wichmann, Karlsruhe

67. Moritz H., Muller I.I. (1987) Earth's Rotation. Theory and estimations, New York, Ungar

68. Moritz, H. (1990) The Figure of the Earth. Theoretical Geodesy and Earth's Interior. Wichmann, Karlsruhe.

69. Nabighian, M. N. (1972) The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-sections: Its properties and use for automated anomaly interpretation: Geophysics, Vol. 37, 507–517

70. Nataf H-C., Ricard Y. (1996) 3SMAC : an a priori tomographic model of the upper mantle based on geophysical modeling, Phys. Earth Planet. Inter., 95, 101-122, 1996

71. Neumann, F. (1838) Über eine Eigenschaft der Laplaceschen Y_n und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind. Schumachers Astron. Nachrichten, 15:313_325.

72. NIMA WGS84 Update Committee (1997) Department of Defense World Geodetic System 1984 Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems // National Imagery and Mapping Agency (NIMA). – Technical report 8350.2. – 3rd Edition. – 1997. – 171 p.

73. Overhauser A.W. (1968) Analytic definition of curves and surfaces by parabolic blending // Tech. Report, No. SL68-40, Scientific research staff publication. – Ford Motor Company, Detroit, 1968.

74. Parke M.E., Born G.H., Scott J.F. (1980) Seasat Altimeter Geophysical

Algorithm Specifications. Jet Propulsion Laboratory, Document 622–226.

75. Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. (2008) An Earth Gravitational Model to Degree 2160:EGM2008. Geophysical Research Abstracts, Vol. 10, EGU2008–A–01891, 2008, EGU General Assembly 2008

76. Peltier W.R. (1974) The Impulse Response of a Maxwell Earth, Rev. Geophys. Space Phys., 12, 649-669

77. Peltier W.R. (2004) Global glacial isostasy and the surface of the ice age earth: the ICE-5G (VM2) Model and GRACE. Annual Review of Earth and Planetary Science, Vol. 32: 111–149

78. Pelzer H. (1987) Deformationsuntersuchungen auf der Basis kinematischer Bewegungsmodelle, Allg. Vermess.-Nach., 1987, № 2, 49-62.

79. Pines S (1973) Uniform representation of the gravitational potential and its derivatives. AIAA J. 11, 1508–1511

80. Rapp R. (1979). Global anomaly and undulation recovery using GEOS-3 altimeter data, Dep. of Geod. Sci., Ohio State Univ., Rep. No 285, Columbus.

81. Rapp R. (1989) The treatment of permanent tidal effects in the analysis of satellite altimeter data for sea surface topography. Manuscripta geodaetica, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1989. No 14, 368–372.

82. Rio M.-H., P. Schaeffer, et al. (2005). The estimation of the ocean Mean Dynamic Topography through the combination of altimetric data, in-situ measurements and GRACE geoid: From global to regional studies. Proceedings of the GOCINA international workshop, Luxembourg

83. Rio, M-H, P. Schaeffer, G. Moreaux, J-M Lemoine, E. Bronner (2009) A new Mean Dynamic Topography computed over the global ocean from GRACE data, altimetry and in-situ measurements . Paper presented at OceanObs09 symposium, 21-25 September 2009, Venice

84. Rowlands D. (1981) The adjustment of Seasat altimeter data on a global basis for geoid and sea surface heights determination. Depart. of Geod. Science, Rep. No 325, – Ohio State Univ., Columbus, 1981, 85p.

85. Rummel, R. (1993) Principle of satellite altimetry and elimination of

radial orbit errors; In: Rummel, R.; Sansò, F. (eds.) *Satellite Altimetry in Geodesy and Oceanography, Lecture Notes in Earth Sciences, Vol. 50*, pp 190-241, Springer

86. Saastamoinen I.I. (1973) Contribution to the theory of atmospheric refraction. *Bulletin Geodesique*. 1973, Vol. 107, 13–34

87. Sanso F. (1994) The international geoid service: first two years of experience. *IGeS – Bulletin No 3*, Milano, 1994, 131–134

88. Schwarz K.P., Sideris M.G., Forsberg R. (1990) The Use of FFT techniques in physical geodesy // *Geophysical Journal International*. – Vol. 100. – 1990. – P. 485-514

89. Seeber G. (2003) *Satellite Geodesy 2nd completely revised and extended edition*. Walter de Gruyter, Berlin New York, 2003 – 589 p.

90. Sideris M. G. (2005) Geoid determination by FFT techniques // *International School for the Determination and Use of the Geoid*. – Budapest University of Technology and Economics, 2005. – 64 p.

91. Skalicka D. (1983) Studie poznani polohovych zmen bodu v presne lokalni siti, *Geod. a kartogr. obz.*, 1983., № 7., 187-190.

92. Sneeuw N. (1994) Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective // *Physical Geodesy*. Springer, Wien New York, 1994, 713 p.

93. Sneeuw N. (2006) *Physical Geodesy. Lecture Notes*. Institute of Geodesy. Stuttgart University, 2006, – 137 p.

94. Thomson W., Tait P.G. (1879) *Treatise on Natural Philosophy, Vol.2*, Cambridge University Press

95. Trupin A. S., Meier M. F., Wahr, J. M. (1992) Effects of polar ice on the Earth's rotation and gravitational potential. *Geophys. J. Int.* Vol. 113, 273–283

96. Tscherning C. C. (1972) Representation of covariance function related to the anomalous potential of the Earth's using reproducing kernels. *Danish Geod. Institute Internal Report, No 3*, Copenhagen.

97. Tscherning C.C. (1991) A strategy for gross-error detection in satellite altimeter data applied in the Baltic Sea area enhanced geoid and gravity

determination. Proceedings of the IAG Symp. No 106. Springer–Verlag, Berlin, 1991, 95–107

98. Vaníček P., Grafarend E.W., Berber M. (2008) SHORT NOTE: Strain invariants. *Journal of Geodesy*, Vol. 82, 263–268

99. Wahr J. M. (1988) The earth's rotation, *Annual review of earth and planetary sciences*. Vol. 16. Annual Reviews, Inc., 1988, 231-249.

100. Wahr J., Molenaar M., Bryan F. (1998) Time variability of the Earth's gravity field: hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE. *J. Geophys. Res.* Vol. 103, 30 205–30 230

101. Ward S. N. (1998) On the consistency of earthquake moment rates, geological fault data, and space geodetic strain: the United States. *Geophysical Journal International*, Vol. 134, 172-186

102. Wessel P., Smith W.H.F. (2004) *The Generic Mapping Tools (GMT, Version 4). Technical Reference and Cookbook*, Honolulu, HI and Silver Spring, MD, January 2004, 123 p

103. Yoder C.F., Williams J.G., Dickey J.O., Schutz B.E., Eanes R.J., Tapley B.D. (1983) Secular variation of Earth's gravitational harmonic J2 coefficient from Lageos and nontidal acceleration of Earth rotation. *Nature*, 303: 757-762