

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

На правах рукопису

Кунта Ольга Євгенівна

**ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТІЙКОСТІ БАГАТОПРОГОНОВИХ
ДОВГОМІРНИХ КОНСТРУКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ ДІЇ
СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

05.02.09 – Динаміка та міцність машин

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник –
доктор технічних наук,
професор **Кузьо І. В.**

Львів – 2017

З М І С Т

Вступ	4
1. Сучасний стан проблеми забезпечення стійкості довгомірних конструкцій	11
1.1. Застосування довгомірних несівних конструкцій в інженерній практиці. Статичні і динамічні навантаження конструкцій	11
1.2. Аналіз методів розрахунку довгомірних конструкцій на статичну стійкість	15
1.3. Аналіз методів розрахунку довгомірних конструкцій на динамічну стійкість	21
1.4. Постановка задач дослідження	27
2. Стійкість багатопрогонових висотних конструкцій під дією статичних навантажень	30
2.1. Стійкість щоглової конструкції зі ступінчастою зміною згинної жорсткості і поздовжньої сили	30
2.2. Вплив деформацій зсуву і локальних ослаблень на стійкість висотної конструкції	40
2.3. Стійкість і коливання конструкції пілонного типу	51
2.4. Висновки	66
3. Стійкість багатопрогонових конструкцій магістральних трубопроводів під дією температурних навантажень	68
3.1. Визначення температурних зусиль у поперечних перерізах надземної ділянки трубопроводу з урахуванням податливості підземних ділянок	68
3.2. Діагностика водневого макророзшарування в стінці труби в системі магістральних газопроводів	82
3.3. Оцінка локального ослаблення трубопроводу внаслідок макророзшарування матеріалу труби	93

3.4. Математична модель втрати стійкості надземної ділянки магістрального трубопроводу	97
3.5. Дослідження стійкості надземної ділянки магістрального трубопроводу	104
Висновки	114
4. Стійкість багатопрогонних висотних конструкцій під дією динамічних навантажень	117
4.1. Стійкість і вільні коливання висотної конструкції.....	117
4.2. Математична модель поперечних коливань висотної конструкції під дією осьового навантаження	129
4.3. Висновки	136
Основні результати та висновки	138
Література	141
Додаток А. Акти впровадження результатів роботи	158
Додаток Б. Програма розрахунку на стійкість багатопрогонних висотних конструкцій	161
Додаток В. Програма розрахунку на стійкість багатопрогонних конструкцій магістральних трубопроводів	167

ВСТУП

Актуальність теми. Багатопрогонові довгомірні конструкції знайшли широке застосування у сучасних машинах та інженерних спорудах. До таких конструкцій належать щогли, стріли та інші опорні елементи підйомально-транспортних машин, вежі бурових установок, мости, опори ліній електропередач та установок вітрової енергетики, надземні дільниці магістральних трубопроводів тощо. Згадані технічні об'єкти відіграють важливу роль у забезпеченні держави паливно-енергетичними і сировинними ресурсами, а також у розвитку енергетики, машинобудування, будівництва, транспорту та інших галузей народного господарства.

Основним критерієм працездатності довгомірних конструкцій є їхня стійкість під дією статичних або динамічних навантажень. Саме тому проблемі стійкості механічних систем у науковій літературі приділяється значна увага. Класичні задачі стійкості довгомірних конструкцій зводяться до знаходження і аналізу фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь зігнутої осі стрижня. Для дослідження стійкості застосовують також енергетичні та динамічні критерії. У зв'язку з однотипністю задач про вільні коливання та про стійкість пружних систем, ці задачі нерідко розв'язують у спільній постановці, розробляють спільні алгоритми розрахунку власних частот, критичних навантажень, а також власних форм коливань та форм деформування на межі стійкості. Незважаючи на широкий розвиток аналітичних і чисельних методів розрахунку інженерних конструкцій на стійкість і коливання, треба констатувати, що переважна більшість досліджень, проведених у даній галузі, стосується однопрогонових механічних систем. Разом з тим, побудова математичних моделей, розроблення раціональних методів і узагальнених алгоритмів розрахунку багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість і коливання є важливим і актуальним науково-практичним завданням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження виконувалися відповідно до наукового напрямку кафедри

механіки та автоматизації машинобудування Національного університету «Львівська політехніка» – «Динаміка, міцність та надійність механічних систем, автоматизація виробництв і технічна діагностика обладнання», а також у межах науково-дослідних робіт «Розроблення методів статичного і динамічного розрахунку елементів конструкцій з концентраторами напружень» (№ державної реєстрації 0109U001158), 2009–2011 рр.; «Створення імпульсного полічастотного вібраційного технологічного обладнання» (№ державної реєстрації 0115U000433), 2015–2016 рр.; «Проведення дослідницьких робіт для опрацювання прототипу інноваційного підйимального крана вантажністю 100 тонн» (договір № 367 на створення науково-технічної продукції між Національним університетом «Львівська політехніка» і фірмою HYDROMET, Sp. z o. o., Польща), 2015–2016 рр.

Мета і задачі дослідження. *Мета дослідження* – удосконалення методології розрахунку багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість за рахунок розроблення узагальнених математичних моделей аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням східчастої або неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, податливості опор і з'єднувальних вузлів, а також дії статичних і динамічних навантажень.

Досягнення поставленої мети включало розв'язання таких задач:

- розроблення математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану багатопрогонової висотної конструкції в процесі втрати статичної стійкості з урахуванням східчастої зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів та опрацювання раціонального алгоритму числової реалізації математичної моделі;

- побудова і числова реалізація математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану і розрахунку багатопрогонової висотної конструкції на стійкість та вільні коливання з урахуванням неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів;

- розроблення математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану, статичної стійкості і вільних коливань складеної багатопрогової висотної конструкції пілонного типу, та проведення досліджень особливостей втрати стійкості А-подібної бурової вежі;

- побудова математичної моделі напружено-деформованого стану трипрогової конструкції магістрального трубопроводу, що включає надземну і прилеглі до неї підземні ділянки і перебуває під дією температурних навантажень та визначення поздовжніх зусиль, переміщень і деформації труби на надземній та на підземних ділянках;

- проведення експериментальних досліджень особливостей локального ослаблення надземної ділянки магістрального трубопроводу у зв'язку з макро-розшаруванням матеріалу труби в процесі тривалої експлуатації та дослідження впливу локального ослаблення на стійкість трубопроводу;

- побудова математичної моделі і алгоритму розрахунку на стійкість багатопрогової ділянки магістрального трубопроводу з урахуванням дії температурних навантажень і взаємодії труби з пружною основою та проведення досліджень стійкості надземної ділянки магістрального трубопроводу;

- розроблення методу дослідження поздовжньо-поперечного згину багатопрогової висотної конструкції в умовах дії періодичного осьового навантаження, згідно з яким розрахунок споруди на динамічну стійкість зводиться до аналізу розв'язків диференціального рівняння Мат'є.

Об'єкт дослідження – поздовжньо-поперечний згин багатопрогових довгомірних конструкцій.

Предмет дослідження – забезпечення стійкості багатопрогових довгомірних конструкцій з урахуванням східчастої або неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, а також дії статичних і динамічних навантажень.

Методи дослідження стійкості і коливань багатопрогових довгомірних конструкцій ґрунтуються на застосуванні теоретичних засад механіки контину-

ально-дискретних механічних систем. Під час побудови математичних моделей напружено-деформованого стану висотних конструкцій і магістральних трубопроводів застосовано технічну теорію згину та теорію балок С. Тимошенка. Для розв'язання систем диференціальних рівнянь, що описують поведінку довгомірних конструкцій зі східчастою або неперервною зміною згинної жорсткості і поздовжньої сили, застосовано широко апробовані аналітичні та чисельні методи у поєднанні з матричним методом початкових параметрів. Розв'язання задач на власні числа здійснювали за допомогою апробованого програмного забезпечення. Розміри локально ослабленої зони труби в системі магістральних трубопроводів визначали за допомогою ультразвукового товщиноміра, а механічні характеристики матеріалу експлуатованої труби – із застосуванням переносного твердоміра та шляхом лабораторних випробувань зразків на розтяг.

Наукова новизна одержаних результатів. *Дістала подальшого розвитку* методологія розрахунку багатопрогонних висотних конструкцій на стійкість за рахунок розроблення узагальнених математичних моделей аналізу напружено-деформованого стану із застосуванням як технічної теорії згину, так і неklasичної теорії балок С. Тимошенка та з урахуванням зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, а також податливості пружних зв'язків секцій та конструкції з основою.

Удосконалено метод розрахунку на стійкість багатопрогонних довгомірних конструкцій, що перебувають під дією температурних навантажень і включають прогони, встановлені на пружній основі. На прикладі надземної ділянки магістрального трубопроводу *вперше* оцінено сумісний вплив температурних напружень, взаємодії підземних прогонів трубопроводу з пружною основою, а також локальних ослаблень труби на стійкість довгомірної конструкції.

Вперше запропоновано методологію розрахунку на динамічну стійкість багатопрогонних довгомірних конструкцій, що перебувають під дією періодичних осьових навантажень, на основі застосування континуально-

дискретних розрахункових моделей та зведення задачі про поперечні коливання конструкції до аналізу розв'язків системи диференціальних рівнянь Мат'є.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені математичні моделі і алгоритми розрахунку на стійкість багатопрогонових висотних конструкцій з урахуванням східчастої або неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості пружних зв'язків секцій та конструкції з основою забезпечують суттєве підвищення точності визначення критичних осьових навантажень щогл та стріл підіймально-транспортних машин, веж бурових установок, опор ліній електропередач та установок вітрової енергетики тощо. Виконано приклади розрахунків на стійкість щогли будівельного підіймального пристрою та проведено дослідження впливу висоти споруди, числа і характеристик проміжних опор, а також локальних ослаблень на критичні навантаження. Досліджено особливості втрати стійкості А-подібної бурової вежі.

Одержані у дисертації результати математичного моделювання напружено-деформованого стану і аналізу стійкості багатопрогової конструкції магістрального трубопроводу з урахуванням дії температурних навантажень і особливостей взаємодії труби з пружною основою можуть бути використані під час проектування та реконструкції магістральних трубопроводів, що дасть можливість раціонально добирати число температурних компенсаторів та проміжних опор надземних ділянок. Методику експериментальних досліджень локальних ослаблень магістральних трубопроводів у зв'язку з макророзшаруванням матеріалу труби в процесі тривалої експлуатації та результати досліджень стійкості трубопроводів доцільно застосовувати під час проведення їх технічної діагностики.

Результати наукових досліджень у вигляді математичних моделей і алгоритмів розрахунку багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість, а також практичних рекомендацій щодо забезпечення стійкості зазначених конструкцій пройшли промислові випробування під час оцінки стійкості надземного переходу «Острогоз'як – Шебелинка», II н. Ду 1220, Ру 5,5 МПа, км

165 Круп'янського ЛВУ МГ Філії УМГ «Харківтрансгаз». Розроблене математичне і програмне забезпечення для проведення аналізу стійкості багатопрогонових довгомірних конструкцій, що перебувають під дією статичних і динамічних навантажень використовуються в процесі викладання дисциплін «Математичні основи механіки підйимально-транспортних систем» при підготовці бакалаврів, а також дисципліни «Гнучкі автоматизовані системи дискретних виробництв» при підготовці магістрів за спеціальністю 131 «Прикладна механіка» у Національному університеті «Львівська політехніка».

Особистий внесок здобувача. Основні результати, отримані під час розв'язання поставлених у дисертаційній роботі задач, отримані автором особисто. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, автору належать: математична модель і алгоритм аналізу напружено-деформованого стану багатопрогової висотної конструкції змінної згинної жорсткості під час втрати стійкості і вільних поздовжньо-поперечних коливань [2]; математична модель напружено-деформованого стану, алгоритм і приклади розрахунків на стійкість щогли будівельного підйимального пристрою [3]; результати випробувань ослабленої зони трубопроводу, ультразвукового контролю товщини стінки труби, вибіркового металографічного аналізу та лабораторних досліджень механічних характеристик матеріалу [5, 6]; математична модель напружено-деформованого стану, алгоритм і результати розрахунку на стійкість висотної конструкції пілонного типу [7]; математична модель та результати дослідження поздовжньо-поперечного згину багатопрогової висотної конструкції в умовах дії динамічного навантаження [9].

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідалися і обговорювалися: на семінарах кафедри «Механіка та автоматизація машинобудування» (2012, 2014, 2015, 2016 рр.); на другій міжнародній науково-практичній конференції «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій» (Львів-Дубляни, 2012 р.); на міжнародній науково-технічній конференції «Energia w pause i technice» (Bialystok-Kleasin, 2012 р.); на міжнародній науково-практичній конференції

імені доктора технічних наук Е. М. Сокола (Львів, 2015 р.); на відкритій науково-технічній конференції молодих науковців і спеціалістів Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України (Львів, 2015 р.); на 5-й Міжнародній науково-технічній конференції «Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій» (Львів, 2016 р.).

Публікації. За темою дисертаційної роботи опубліковано 11 наукових праць, з них 5 статей у наукових фахових виданнях України, 1 стаття у журналі, що належить до переліку наукових фахових видань України, а його переклад – до науко-метричної бази Web of Science, 1 розділ монографії, опублікованої за кордоном, 1 стаття в українському журналі, який включено до міжнародних наукометричних баз даних, 3 праці у матеріалах конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Робота викладена на 172 сторінках, містить 122 сторінки основного тексту, список використаних джерел, який налічує 162 найменування, 31 рисунок, 13 таблиць і 3 додатки.

1. СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ СТІЙКОСТІ ДОВГОМІРНИХ КОНСТРУКЦІЙ

1.1. Застосування довгомірних несівних конструкцій в інженерній практиці. Статичні і динамічні навантаження конструкцій.

Дослідженням коливань та стійкості механічних систем приділяється велика увага, оскільки наукові розробки в даній галузі складають теоретичну базу оптимального проектування.

Багатопрогонові довгомірні конструкції становлять особливий клас механічних систем, до яких можна віднести стріли та щогли підіймально-транспортних машин, бурові вишки, опори ліній електропередач та об'єктів вітрової енергетики, трубопроводи, мостові конструкції тощо. Згадані технічні об'єкти відіграють важливу роль у забезпеченні держави паливно-енергетичними і сировинними ресурсами, а також у розвитку енергетики, машинобудування, будівництва, транспорту та інших галузей народного господарства.

Довгомірні інженерні конструкції можуть бути виготовлені як у вигляді звичайних стрижнів, що працюють на згин, так і у вигляді стрижневих систем. До стрижневих систем належать ферми, багатопрогонові або складені балки, рами, арки та комбіновані системи, які утворюються поєднанням балок, рам або арок з фермами. Нерідко такі конструкції включають пластини, оболонки або масивні тверді тіла.

Висотними прийнято називати споруди, висота яких набагато перевищує їхні розміри у поперечному перерізі. Висотні споруди здебільшого працюють на сприйняття вертикальних і горизонтальних навантажень. Вертикальні навантаження у більшості випадків є основними. Серед горизонтальних навантажень слід виділити вітрові, що діють на споруду й закріплене на ній устаткування. До висотних споруд відносять опори пристроїв зв'язку (антени радіо і телебачення), ферми атракціонів, опори повітряних ліній електропередач, башти, щогли та інші машинобудівні конструкції, витяжні (вентиляційні й димові) вежі (труби), освітлювальні й метеорологічні вишки, смолоскипи і свічі спалювання газів, блискавковідводи, маяки тощо. Усі висотні споруди

розділяють на два види – вежі і щогли. У більшості випадків вежі проектують у вигляді просторових три- або чотиригранних ферм, рідше – ферм багатогранного обрису. Вежі являють собою ґратчасті конструкції, виготовлені із трубчастих, прокатних чи зварених профілів. Стійкість веж забезпечується надійним з'єднанням поясів з фундаментами. Для зменшення розмірів фундаментів і зниження маси опор їхню базу роблять великою, тому каркаси веж у верхній частині звичайно проектують у вигляді призми, а в нижній – у вигляді зрізаної піраміди. Стики поясів і ґратки вежі можуть включати зварні чи болтові з'єднання. Розміри перерізів веж набагато перевищують залізничні габарити, тому конструкції виготовляють і відправляють із заводу в незібраному вигляді.

Щоглою прийнято називати висотну споруду, стійкість якої забезпечується системою відтяжок. Сучасні щогли бувають двох типів: ґратчасті конструкції три- або чотиригранного перерізу або листові конструкції у вигляді суцільної труби. Стовбури ґратчастих щогл складаються з просторових секцій довжиною до 13 м, продукуваних на заводах і з'єднуваних в процесі монтажу фланцями на болтах. Щогли листової конструкції складаються із просторових секцій діаметром 1,2 ... 2,5 м і довжиною до 9 м і з'єднуються між собою під час монтажу зварюванням встик чи за допомогою накладок і болтів. В інженерній практиці застосовують також комбіновані системи.

Усі інженерні конструкції і споруди – будівлі, мости, башти, висотні резервуари, корпуси машин, літаків, суден, ракет тощо – повинні задовольняти умови міцності, жорсткості і стійкості. Умови міцності полягають у тому, що внутрішні зусилля і напруження в елементах конструкцій не повинні перевищувати величин, за яких ці елементи можуть зруйнуватися.

У процесі експлуатації на конструкції і споруди діють зовнішні навантаження і впливи, внаслідок чого їхні елементи деформуються і набувають деяких переміщень у просторі. Ці переміщення можуть спотворити зовнішній вигляд споруди або взагалі зробити її непридатною до експлуатації. Перевірка умов жорсткості – це порівняння деформацій споруди з тими, що допускаються.

За певних умов під дією експлуатаційних навантажень стрижнева чи оболонкова конструкція може втратити початкову форму рівноваги і набути іншої форми, більш чутливої до дії навантажень і небезпечної з огляду на руйнування. Таке явище називають втратою стійкості механічною системою. Розрахунок на стійкість полягає у визначенні критичних навантажень, за яких конструкція втрачає стійкість, та у встановленні умов, за яких реальні навантаження системи не перевищують критичних [6, 40, 43].

До цих умов слід додати умови економічності: споруда мусить відповідати умовам міцності, жорсткості і стійкості за мінімальної власної ваги, а отже, мінімальної вартості. Виконання зазначених умов потрібно передбачати в процесі проектування конструкцій або споруд, тобто, під час розрахунку їх на навантаження і зовнішні впливи.

Основним критерієм працездатності довгомірних конструкцій є їхня стійкість під дією статичних або динамічних навантажень. Саме тому проблемі стійкості механічних систем у науковій літературі приділяється значна увага. Зазначимо, що для формулювання задачі на стійкість або коливання необхідно мати характеристики механічної моделі конструкції, а також механічні характеристики матеріалу та експлуатаційні навантаження.

Довгомірні елементи будівельних споруд (колони, стрижні несних рамних конструкцій), надземні ділянки магістральних трубопроводів тощо здебільшого піддаються дії статичних навантажень. Стріли підіймально-транспортних машин, бурові вежі та інші машинобудівні конструкції в процесі експлуатації сприймають як статичні, так і динамічні навантаження. Змінні в часі навантаження переважно збуджують силові агрегати машини в процесі виконання технологічних операцій. Часто висотна металоконструкція виконує утримувальну функцію і сприймає осьові навантаження з боку канатів талевої системи в процесах піднімання або опускання вантажів. Це може призводити до втрати динамічної стійкості висотною конструкцією. Слід зауважити, що динамічні навантаження висотних машинобудівних конструкцій можуть мати як стаціонарний, так і нестаціонарний характер. Їх визначення пов'язане з

детальним аналізом роботи машинних агрегатів, які включають привідні двигуни, механічні передачі, системи керування та виконавчі органи.

Важливою особливістю аналізу перехідних процесів у машинних агрегатах є необхідність врахування взаємодії механічних систем з привідними двигунами. Ця проблема безпосередньо пов'язана з теорією коливних систем, що перебувають під дією джерела енергії обмеженої потужності [15]. У подальших дослідженнях розглянуто взаємодію механічної системи з кількома джерелами енергії [9], вивчено проходження системи з обмеженим збуренням через резонанс [11], виявлено особливості ефекту Зоммерфельда у системі, власна частота якої змінюється за випадковим законом [83], проаналізовано коливні процеси в машині зі змінними параметрами [10], вивчено вплив характеристики двигуна на стійкість руху механічної системи [6], та розв'язано ряд інших важливих задач [10, 14, 27]. Вплив обмеженого збурення на характер коливальних процесів у силових установках та динамічні навантаження їхніх елементів досліджено у працях [26, 65].

Істотне значення в дослідженнях неусталених режимів машинних агрегатів має визначення динамічних характеристик приводу. В інженерних методах розрахунку рушійні сили іноді задають як функції часу або швидкості. Для розв'язання ряду задач використовують залежності рушійних сил у вигляді лінійних диференціальних рівнянь. Обґрунтування лінеаризованих механічних характеристик електродвигуна постійного струму, асинхронного та синхронного двигунів змінного струму, гідроприводу як з об'ємним, так і з дросельним регулюванням, а також двигунів внутрішнього згорання наведено у працях [27, 65]. Такі характеристики дають можливість з достатньою точністю знаходити поточні значення обертового моменту у певному (робочому) діапазоні кутової швидкості ротора і з успіхом застосовуються як в розрахунках квазістаціонарних режимів, так і в дослідженнях ефективності та стійкості активних систем керування, зокрема, систем з тахометричним зв'язком. Однак, для більшості типів двигунів лінеаризовані механічні характеристики не можуть бути використані на всьому інтервалі можливих значень швидкостей.

Велика кількість сучасних машин, зокрема, підіймально-транспортних, землерийних, бурових установок тощо оснащується електроприводом. Строгий аналіз динамічних процесів в електромеханічних привідних системах зводиться до сумісного розв'язання рівнянь руху і рівнянь електромагнітного стану. Диференціальні рівняння, які описують електромагнітні явища в двигунах, – суттєво нелінійні, що значно ускладнює проведення досліджень. Однак, лише такий підхід до математичного моделювання дає можливість забезпечити достатню точність розрахунку багатьох експлуатаційних і аварійних режимів роботи енергетичних, технологічних, транспортних та інших машин. Розв'язання вказаних задач у даний час виконується з використанням дискретних розрахункових моделей механічних систем. Подальший розвиток теорії динамічних процесів у електромеханічних системах машинних агрегатів необхідно здійснювати з урахуванням взаємовпливу коливальних електромагнітних і хвильових явищ.

Іноді висотна конструкція сприймає повільно згасаюче змінне навантаження з боку підіймального механізму, за допомогою якого утримується вантаж великої маси. Така ситуація може виникнути внаслідок різкого гальмування бурильної колони, що опускається у свердловину. У цьому випадку закон зміни навантаження у часі можна розглядати як гармонічний, що дасть можливість істотно спростити задачу дослідження динамічної стійкості висотної споруди.

1.2. Аналіз методів розрахунку довгомірних конструкцій на статичну стійкість

За дії статично прикладених сил на пружну систему або на систему, що складається з абсолютно жорстких ланок, пружно зв'язаних між собою система може знаходитися як в стійкій, так і в нестійкій рівновазі. У першому випадку незначні порушення рівноваги (відхилення від початкового положення, обумовлені випадковими причинами, непередбачене збільшення навантаження і т. п.) викликає малі зміни у напружено-деформованому стані системи. У випадку нестійкої рівноваги найменші відхилення системи від положення рівноваги приводять до непропорційно великих переміщень і зусиль. В теорії

статичної стійкості споруд застосовують засади і методи визначення статичних навантажень, які відповідають нестійкій рівновазі, а також тих кінцевих переміщень, які спостерігаються після втрати системою стійкості.

Втрата стійкості визначається таким положенням системи, за якого можливе існування двох або декількох відповідних форм рівноваги, одна з яких, здебільшого, якісно відмінна від інших і є єдиною можливою за початкової стійкої рівноваги [22].

Слід відзначити, що така втрата стійкості є характерною для ідеалізованих систем: зі строго прямолінійними елементами, ідеальними шарнірами, силами, прикладеними на нескінченно малих ділянках, вузловою передачею стискного навантаження і т. п. Така ідеалізація, яка зберігає основні особливості роботи конструкції чи споруди дозволяє одержати достатньо прості, і, в той же час, достатньо точні розв'язки практичних задач [8, 20, 23].

Для систем, відмінних від ідеалізованих, з початку навантаження розвиваються переміщення, якісна картина яких зберігається на певному етапі процесу деформування. За деяких значень навантажень можливий перехід до нових форм рівноваги. Тому лише повний аналіз поведінки системи в процесі навантаження дає можливість правильно судити про дійсну роботу конструкції й одержати правильну уяву про її несну здатність. Досягається це побудовою, так званих, кривих рівноважних станів (діаграм «навантаження–прогин»), які встановлюють зв'язок між прикладеними силами і переміщеннями [6, 21, 24].

Досліджуючи явище втрати стійкості стрижневої системи, залишаючись при цьому в області пружних деформацій і наділяючи розглядувану систему властивостями ідеальної пружності, не слід упускати з поля зору те, що зазначений ідеалізований підхід не може охопити всього різноманіття задач, з якими доводиться зустрічатися на практиці. Тому під час розгляду нелінійно-пружних або пружно-пластичних систем не можна обмежуватися традиційними підходами до розв'язання задач аналізу напружено-деформованого стану, коливань та стійкості інженерних конструкцій.

Необхідно також відмітити, що уточнення розрахункових схем, яке приводить до дослідження стійкості систем з позиції ейлерової теорії за рахунок

урахування початкових деформацій, неоднорідності матеріалу і т. п. істотно впливає на якісну поведінку системи, наприклад, приводить до зникнення точок біфуркації, тобто, таких точок на кривій рівноважних станів, у яких має місце роздвоєння кривої [21, 24]. Разом з тим, певна ідеалізація властивостей системи у багатьох випадках дає можливість з достатньою точністю визначати критичні навантаження. Дослідження стійкості інженерних конструкцій як ідеально пружних систем накладає обмеження на область застосування одержуваних результатів.

Найпростіший підхід до аналізу стійкості довгомірних конструкцій полягає у застосуванні розрахункових моделей зі скінченним числом ступенів вільності, у яких конструкція розглядається як система жорстких елементів, що зв'язані між собою за допомогою пружних шарнірів [48, 69, 71]. Класичні задачі стійкості пружних однопрогонових і багатопрогонових систем зводяться до знаходження і аналізу фундаментальних розв'язків диференціальних рівнянь зігнутої осі стрижня розглядаються [40, 42, 54, 62]. Для дослідження стійкості висотних довгомірних конструкцій застосовують також енергетичні та динамічний критерії [6, 148, 149]. Вивчається вплив особливостей прикладання навантажень, зокрема, дії слідкуючих сил на стійкість однопрогонових конструкцій [53, 149]. Досліджуються особливості розрахунку складених довгомірних конструкцій [43, 54, 55], а також конструкцій змінного поперечного перерізу [26, 46, 63]. Розглядається вплив власної ваги на стійкість висотних конструкцій [6, 148, 149], а також вплив дії пружного середовища на критичне осьове навантаження стрижнів [52]. У зв'язку з однотипністю задач про вільні коливання та про стійкість пружних систем, ці задачі нерідко розв'язують у спільній постановці [71, 73, 127, 142] та розробляють спільні алгоритми розрахунку власних частот, критичних навантажень, а також власних форм коливань та форм деформування на межі стійкості. Особлива увага приділяється розробленню комп'ютерних методів і алгоритмів розрахунку довгомірних конструкцій на стійкість [19, 42, 96, 119]. Проводяться дослідження статичної і динамічної стійкості стрілових конструкцій машин [56, 122, 145]. Широко вивчається стійкість довгомірних конструкцій, що

перебувають під дією динамічних навантажень [13, 18, 54, 101, 104]. Зауважимо, що у дослідженнях стійкості і коливань висотних або довгомірних конструкцій застосовують як технічну теорію згину [14,], так і неklasичну теорію балок С. Тимошенка [8, 14, 15, 98]. Для проведення розрахунків багатопрогонових конструкцій набув застосування матричний метод початкових параметрів [71, 86]. Разом з тим, існує потреба розроблення математичної моделі і узагальненого алгоритму комп'ютерного розрахунку на стійкість багатопрогонових висотних конструкцій з урахуванням особливостей їх закріплення, а також дії технологічного навантаження і сил власної ваги.

Системи, руйнування яких настає внаслідок втрати стійкості, а не внаслідок перевантаження матеріалу, називаються гнучкими системами. Такі системи можуть розглядатися як дискретні або континуальні. У науковій літературі представлено багато критеріїв втрати стійкості гнучких систем. Виділимо три основні методи аналізу втрати стійкості гнучких систем:

- енергетичний метод, який полягає у визначенні навантаження при якому повна потенціальна енергія перестає бути додатною;
- метод коливань (кінетичний критерій), який полягає у знаходженні такого навантаження, за якого вільний рух перестає бути обмеженим;
- метод «неточності», згідно з яким вважають, що кожна механічна система, а особливо гнучка, має певні «неточності» (наприклад, ексцентриситет навантаження, початкова деформація або початкове викривлення, що може бути віднесено як до дискретних, так і континуальних систем). Під час деформування таких систем розглядається задача поздовжнього згину, в якій умовою руйнування виступає забезпечення міцності, а не обмеження навантаження його критичним значенням.

Беручи до уваги значення і властивості навантажень, розрізняють такі їх випадки.

1. Узагальнене – таке навантаження за якого поперечна сила і згинальний момент на незакріпленому кінці колони лінійно залежать від переміщення і кута прогину вказаного кінця.

2. Ейлера – навантаження осьовою силою в нерухомій точці прикладання з незмінним напрямом дії в процесі втрати стійкості.

3. Силою, направленою до додатного полюса – навантаження силою, прикладеною до незакріпленого кінця колони, напрям дії якої проходить через нерухому точку, що знаходиться на недеформованій осі колони і розташована нижче від вільного кінця.

4. Силою, направленою до від'ємного полюса – навантаження силою, прикладеною до незакріпленого кінця колони, напрям дії якої проходить через нерухому точку, що знаходиться на недеформованій осі колони і розташована вище від вільного кінця.

5. Узагальнене навантаження Бекка – навантаження зосередженою силою, напрям дії якої визначений по відношенню до кута вигину кінця колони за допомогою коефіцієнта відслідковування.

6. Узагальнене навантаження Ройта – навантаження зосередженою силою, прикладеною в точці, положення якої визначається за допомогою коефіцієнта відслідковування, а постійний напрям дії сили збігається з недеформованою віссю системи.

7. Узагальнене з силою, направленою до додатного полюса – навантаження зосередженою силою, спрямованою до нерухомої, розміщеної на недеформованій осі колони нижче від навантаженого кінця, точки, причому, дія сили обумовлює виникнення лінійно залежного від неї згинального моменту.

8. Узагальнене з силою, направленою до від'ємного полюса – навантаження зосередженою силою, спрямованою до нерухомої, розміщеної на недеформованій осі колони вище від навантаженого кінця, точки, причому, дія сили обумовлює виникнення лінійно залежного від неї згинального моменту.

9. Слідкувальною силою, скерованою до додатного полюса – навантаження зосередженою силою, напрям дії якої збігається з дотичною до деформованої осі на кінці колони і проходить через нерухому точку (полюс), який знаходиться на недеформованій осі конструкції нижче від кінця колони.

10. Слідкувальною силою, скерованою до від'ємного полюса – навантаження зосередженою силою, напрям дії якої збігається з дотичною до деформованої осі на кінці колони і проходить через нерухому точку (полюс), який знаходиться на недеформованій осі конструкції вище від кінця колони.

ваної осі на кінці колони і проходить через нерухому точку (поліус), який знаходиться на недеформованій осі конструкції вище від кінця колони.

11. Через розтягнений елемент скінченної жорсткості на згин – навантаження силою, що передається на стиснуті стрижні колони через додатковий розтягнутий елемент, що жорстко з'єднаний з кінцем колони.

Необхідно відмітити, що на стійкість механічних систем істотно впливають локальні ослаблення інженерних конструкцій, обумовлені податливістю з'єднань, а також дефектами матеріалу у вигляді тріщин, розшарування тощо, які з'являються в процесі виготовлення або тривалої експлуатації елементів деталей та вузлів.

Розшарування в сталях може бути як металургійного, так і експлуатаційного походження. У першому випадку вже металургійному продукту властиві такі пошкодження, тоді як у другому випадку вони формуються під час експлуатації під дією робочих напружень. Розшарування утворюється по слабших площинах паралельно площині вальцювання в сталі через різні аспекти, що спричиняють анізотропію мікроструктури (відмінності текстури, розташування включень по площині вальцювання, міжзеренне руйнування вздовж первинних меж аустеніту, виділення фосфору та сірки тощо) [106]. Типовим проявом цього явища є декогезія вздовж ланцюжків неметалевих включень, витягнутих у напрямі вальцювання листового прокату. Атомарний водень акумулюється в утворених порожнинах, знижує міцність когезивного зв'язку між атомами металу та рекомбінується до молекулярного стану, створюючи в них тиски, що полегшує воднем ініційоване руйнування [91, 120]. Розшарування може відбуватися і без зовнішнього навантаження, тобто в результаті тільки наводнювання металу, якщо спричинені воднем напруження сумірні з робочими. Це явище відоме як воднем ініційоване руйнування (hydrogen induced cracking).

Водневе розшарування типове для нафтогазопроводів, оскільки технологія виготовлення труб передбачає вальцювання металу і, відповідно, видовження неметалевих включень з ослабленням когезивного зв'язку з матрицею. З іншого боку, наводнювання стінки труби, яке можливе від її внутрішньої поверхні [60],

призводить до акумулювання молекулярного водню в сформованих міжфазних дефектах «включення-матриця» та створення там високих тисків. Це сприяє розвитку розсіяної в об'ємі металу мікропошкодженості, погіршенню механічних властивостей, особливо пластичності та опору крихкому руйнуванню [36, 59, 126]. Характерним проявом особливо інтенсивної деградації трубних сталей уздовж волокон вальцювання є переорієнтація площини руйнування на 90° , паралельно волокнам, за випроб поздовжніх зразків на ударну в'язкість [61].

Особливим проявом такого типу розшарування є порушення цілісності на великих площах, часто сумірних з характерними розмірами елемента конструкції [134]. У трубопроводах такі макродефекти виявляють, за правило, під час ультразвукового контролю [124] як її стоншення.

1.3. Аналіз методів розрахунку довгомірних конструкцій на динамічну стійкість

Лише у 30-х роках минулого століття набули завершеної форми методи розрахунку статично невизначуваних стержневих систем, виділені методи сил, переміщень і змішаний метод, а також різні їхні модифікації. У процес їхнього формування значний внесок зробили В. Л. Кирпичов, М. С. Стрелецький, О. О. Гвоздєв, П. Л. Пастернак, І. М. Рабінович, М. І. Безухов, В. В. Болотін та ін.

Поряд із удосконаленням методів розрахунку конструкцій на міцність виникла необхідність їх перевірки на стійкість. Незважаючи на те, що постановка проблеми і перший розв'язок задачі стійкості стисненого стрижня належить Л. Ейлеру (1757 р.), розрахунки на стійкість почали широко застосовуватись тільки на початку ХХ ст. Суттєвий внесок у розв'язання проблеми внесли Ф. Енгессер, Ф. С. Ясинський, С. П. Тимошенко та інші. Були отримані розв'язки задач стійкості арок, стиснених пластин, оболонок. В 1904 р. С. П. Тимошенко розв'язав задачу стійкості плоскої форми згину двотаврових балок. Узагальнення цієї задачі на тонкостінні стрижні зроблено В. З. Власовим. М. В. Корноуховим у 1937 р. запропонований метод розрахунку рам, який є узагальненням методу переміщень, на стійкість. На початку ХХ століття

задачі стійкості були поширені на конструкції, які працюють за межею пружності (С. Ф. Енгессер, Т. Карман, Ф. Р. Шенлі), а також на системи, де необхідно враховувати повзучість (О. Р. Ржаніцин).

Наявність у період до середини ХХ ст. малопотужних обчислювальних засобів зумовила розвиток лише простих і наближених методів розрахунку, використання розрахункових схем з невеликим числом ступенів свободи, переважне використання статичних постановок задач, що стримувало прогрес у будівництві, машино-, ракето-, авіабудуванні, космічній техніці.

Бурхливий розвиток обчислювальної техніки впродовж останніх десятиріч, перехід до повної автоматизації розрахунків, привели до докорінних змін у постановках задач і методах дослідження стійкості, створення комп'ютерних технологій аналізу роботи конструкцій. Виникла можливість значно більшого наближення розрахункових схем до реальних, урахування властивостей матеріалу споруд. Головним в оцінюванні методів стала їхня універсальність і надійність, можливість застосування до аналізу широкого класу систем, комп'ютерна технологічність. Сформувались нові її розділи - такі, як ймовірнісні методи розрахунку і теорія надійності, динамічна стійкість, нелінійна теорія оболонок, оптимальне проектування тощо.

Розвитку комп'ютерних методів аналізу сприяли праці Дж. Аргіріса, О. Зенкевича, А. Ф. Смирнова, А. В. Александрова, Б. Я. Лащеннікова, М. М. Шапошникова, В. І. Феодосьєва, А. С. Вольміра, Л. А. Розіна, А. П. Філіна, Р. А. Резнікова, Д. В. Вайнберга, П. М. Сосіса, Н. П. Абовського, А. М. Масленікова, А. А. Чіраса та багатьох інших вчених.

У сучасній будівельній механіці широко застосовуються методи механіки деформівного твердого тіла, на основі розвитку варіаційних принципів і методів дискретизації значного розвитку набув метод скінченних елементів (МСЕ), на базі якого створені і вельми поширені у світовій практиці універсальні програмні комплекси з розрахунку широкого класу конструкцій. У розвитку і використанні МСЕ суттєву роль відіграли праці Дж. Аргіріса, О. Зенкевича, Бате і Вілсона, Олена, Р. Клафа, Л. А. Розіна, А. П. Філіна, А. А. Александрова,

М. М. Шапошнікова, В. А. Постнова, І. Ф. Образцова, П. М. Варвака, О. С. Сахарова та ін.

Завдяки комп'ютеризації і застосуванню чисельних методів широкого розвитку набули динамічні задачі будівельної механіки, чому сприяли праці Р. Клафа, В. І. Феодосьєва, А. С. Вольміра, Б. Г. Коренева, О. В. Лужина, А. П. Філіппова, В. А. Лазаряна, Г. С. Писаренка.

З кожним роком зростає роль експериментальних методів, які надають суттєву інформацію про поведінку під дією навантаження реальних конструкцій та їх моделей.

Значний внесок у розвиток будівельної механіки зробили вчені, які працювали на Україні – В. Л. Кирпичов, С. П. Тимошенко, Є. О. Патон, К. К. Сімінський, О. М. Дінник, М. М. Крилов, М. М. Боголюбов, М. В. Корноухов, Б. М. Горбунов, Ф. П. Белянкін, О. А. Уманський, М. Д. Жудін, Д. В. Вайнберг, М. О. Кільчевський, А. Д. Коваленко, В. Г. Чудновський, О. І. Стельбицька, І. Я. Штаерман, О. Д. Виноградов, П. М. Варвак, Я. Д. Лівшиць, Є. Прокопович, В. А. Лазарян, М. Г. Бондар, А. П. Філшпов та ін.

Під дією статичного навантаження певного виду можлива втрата статичної стійкості (першого роду), під дією вібраційного навантаження того ж виду можуть бути втрачені ступені динамічної стійкості.

Подібні навантаження характеризується тим, що вони входить як параметр в ліві частини рівнянь динамічної рівноваги (руху). Таке явище називається параметричним навантаженням, що вказує на зв'язок з явищем параметричного резонансу.

Ввівши поняття параметричного навантаження, можна визначити предмет теорії динамічної стійкості пружних систем: вона вивчає коливання, що виникають під дією вібраційно-параметричного навантаження. Доцільніше було б говорити не про параметричні навантаження взагалі, а про навантаження, параметричні по відношенню до деякого виду деформацій. Так, поздовжня сила, що стискає спочатку прямолінійний стержень, являє собою параметричне навантаження по відношенню до поперечних прогину, але не є такою по відношенню до поздовжніх деформацій.

Докладний аналіз літератури з теорії динамічної стійкості, наведений до 1951 р, можна знайти в статті Е. А. Бейліна і Г. Ю. Джанелідзе [1]. Зупинемося на деяких основних етапах розвитку теорії.

Першою роботою з динамічної стійкості слід вважати статтю Н. М. Беляєва [2], що з'явилася у 1924 р. У роботі розглядається задача про динамічну стійкість прямолінійного стрижня, шарнірно опертого на обох кінцях, і визначаються межі головної області нестійкості. У 1935 р. Н. М. Крилов і Н. Н. Боголюбов [3] знову повертаються до цієї задачі, розглянувши загальний випадок опорних закріплень. Застосовуючи варіаційний метод Гальоркіна, автори зводять загальну задачу до рівняння, яке вже розглядав Н. М. Беляєва, з тією різницею, що коефіцієнтами рівняння є наближені параметри (в сенсі методу Гальоркіна). Роком раніше Н. Е. Кочин [4] розглянув споріднену в математичному відношенні задачу про коливання колінчастих валів; інша схожа задача досліджувалася в зв'язку з коливаннями привідної системи електровоза [5].

Варто зазначити, що перші закордонні роботи з динамічної стійкості стрижнів були розглянуті наприкінці тридцятих і напочатку сорокових років минулого століття [6].

Динамічна стійкість пластинок, стиснутих періодичними поздовжніми силами, розглядалася В. А. Воднером [7], З. І. Халіловим [8] і Р. Зйнауді [9]. Завдання про динамічну стійкість кругового кільця під дією радіальної вібраційного навантаження розв'язана Г. Ю. Джанелідзе і М. А. Радцигом [10]. Низка часткових випадків розглянута в брошурі В. Н. Челомея [11]. Задача про динамічну стійкість симетричної форми стиснуто-зігнутої арки досліджувалася В. В. Болотіним [12]. А. Н. Марковим [15] і О. Д. Оніашвілі [16] розглянуті деякі часткові завдання динамічної стійкості оболонок.

Питання про вплив розсіювання енергії коливань на межі областей нестійкості обговорювали Є. Меттлер [17] і К. А. Наумов [18]. Відомо, що аналогічну задачу в більш загальному формулюванні було розв'язано ще в 1927 р. А. А. Андроновим і М. А. Леонтовичем [19]. Випадок зміни навантаження за ступінчастим законом розглядався І. С. Аржаних [20], А. Ф. Смірновим [21] і В.

М. Маковішиним [22]. Згадані вище роботи характерні тим, що завдання динамічної стійкості зводяться в них (точно або наближено) до одного диференціального рівняння другого порядку з періодичними коефіцієнтами (рівняння Мат'є-Хілла). Тим часом, вже В. Н. Челомей показав [23], що завдання динамічної стійкості в загальному випадку зводиться до систем диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Б. З. Брачковській [24] (на основі варіаційного методу Гальоркіна) і В. В. Болотін [25] (на основі інтегральних рівнянь) встановили клас задач, які можуть бути точно зведені до одного рівняння другого порядку. Узагальнення результатів на випадок дисипативних систем дано Г. Ю. Джанелідзе [26]. І хоча властивості рівнянь, які одержуються за методом Гальоркіна, добре вивчені, число публікацій заснованих на цьому наближенні продовжує зростати [27]. Згадаємо, що стаття Клоттера [28], в якій стверджується можливість поділу невідомих для загального випадку закріплення кінців стрижня, містить помилки.

У деяких роботах [29] задачі стійкості плоскої форми згину, що вимагають за своїм змістом розгляду систем диференціальних рівнянь, зведені до одного рівняння Мат'є-Хілла.

І. І. Гольденблат [30] розглянув задачу про динамічну стійкість стиснутого тонкостінного стержня, яка в разі перетину з однією віссю симетрії призводить до системи двох диференціальних рівнянь. Використовуючи результати Н. А. Артем'єва [31], І. І. Гольденблат вказав спосіб побудови областей нестійкості шляхом розкладання за ступенями малого параметра. Подібний прийом без обґрунтування, застосував Меттлер [32] до задачі про динамічну стійкість плоскої форми згину балки. Вейденхаммер [33] аналогічним методом розглянув задачу про стійкість стрижня, защемленого на кінцях. Варіант методу викладається Кухарським [34] в застосуванні до часткової задачі динамічної стійкості пластинок і Реклінгом [35] в застосуванні до часткової задачі динамічної стійкості плоскої форми вигину.

Інший метод, запропонований в статті В. В. Болотіна [36], де описана структура загальних рівнянь динамічної стійкості. Автором розглянуто, як

спільна задача динамічної стійкості плоскої форми згину [37], так і задача динамічної стійкості пластинок [38].

У перелічених вище роботах задачі динамічної стійкості розглядалися в сенсі знаходження областей, в межах яких задана форма руху стає динамічно нестійкою. Думка про недостатність лінійного трактування для визначення амплітуд в резонансних областях була вперше чітко сформульована І. І. Гольденблатом [39], який вказав на зв'язок даної задачі з задачею про виникнення параметричних електричних коливань [40]. Виклад нелінійної теорії в застосуванні до задачі про динамічну стійкість стиснутого стержня описано В. В. Болотіним [41]. Аналогічна задача майже одночасно розглядалася Вейденхаммером [42], який намагався врахувати один з нелінійних чинників, проте ця робота містить помилки. У роботі В. В. Болотіна [43] нелінійна теорія поширюється на випадок побічних областей нестійкості, а також на випадок стержня, що має початкову кривизну. Рішення спорідненої задачі про коливання вала під час обертання, що має неоднакові головні згинні жорсткості дано в іншій статті [44]. Деякі нелінійні задачі динамічної стійкості пластинок розглянуті [45] з урахуванням розтягу внутрішньої поверхні. В. В. Болотіним [46] дано розв'язання низки нових нелінійних задач, зокрема, для арок, балок і статично невизначених стрижневих систем.

Досліди з параметричного збудження поперечних коливань стиснутих стрижнів описані у праці [47]. Визначалися амплітуди усталелених коливань, досліджувалися затягування, режим биття і процес усталення. Параметрично вимушені коливання стиснуто-вигнутих арок описані у праці [48]. Дослідження динамічної стійкості плоскої форми вигину балок проводилися І. А. Бурнашевим [49] і В. А. Соболевим [50].

Параметрично порушувані коливання, які є супутником вимушених коливань, схожі з ними за зовнішніми проявами, які можуть кваліфікуватися інженерами-практиками як звичайні резонансні коливання. Тим часом, у багатьох випадках загальноприйняті методи демпфування і віброізоляції можуть виявитися безсилими перед параметричними коливаннями або навіть призвести до протилежних результатів. Навіть там, де вібрації безпосередньо не

загрожують цілісності конструкції або її нормальній експлуатації, за тривалого впливу вони можуть призвести до втомного руйнування. Тому вивчення умов виникнення параметричних коливань і методів боротьби з ними є необхідним для інженерів-дослідників у різних областях машинобудування, транспорту та промислового будівництва.

1.4. Постановка задач дослідження

Виходячи із сучасного стану проблеми, в дисертаційній роботі ставиться за мету удосконалення методології розрахунку багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість за рахунок розроблення узагальнених математичних моделей аналізу напружено-деформованого стану з урахуванням східчастої або неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, податливості опор і з'єднувальних вузлів, а також дії статичних і динамічних навантажень.

Досягнення поставленої мети включало розв'язання таких задач:

- розроблення математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану багатопрогонової висотної конструкції в процесі втрати статичної стійкості з урахуванням східчастої зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів та опрацювання раціонального алгоритму числової реалізації математичної моделі;
- побудова і числова реалізація математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану і розрахунку багатопрогонової висотної конструкції на стійкість та вільні коливання з урахуванням неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів;
- розроблення математичної моделі аналізу напружено-деформованого стану, статичної стійкості і вільних коливань складеної багатопрогонової висотної конструкції пілонного типу, та проведення досліджень особливостей втрати стійкості А-подібної бурової вежі;
- побудова математичної моделі напружено-деформованого стану трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу, що включає надземну

і прилегли до неї підземні дільниці і перебуває під дією температурних навантажень та визначення поздовжніх зусиль, переміщень і деформації труби на надземній та на підземних дільницях;

- побудова математичної моделі і алгоритму розрахунку на стійкість багатопрогової дільниці магістрального трубопроводу з урахуванням дії температурних навантажень і взаємодії труби з пружною основою та проведення досліджень стійкості надземної дільниці магістрального трубопроводу;

- проведення експериментальних досліджень особливостей локального ослаблення надземної дільниці магістрального трубопроводу у зв'язку з макророзшаруванням матеріалу труби в процесі тривалої експлуатації та дослідження впливу локального ослаблення на стійкість трубопроводу;

- розроблення методу дослідження поздовжньо-поперечного згину багатопрогової висотної конструкції в умовах дії періодичного осьового навантаження, згідно з яким розрахунок споруди на динамічну стійкість зводиться до аналізу розв'язків системи диференціальних рівнянь Мат'є.

Задачі дисертаційної роботи спрямовані на розроблення ефективних і, водночас, зручних у числовій реалізації методів розрахунку багатопрогових довгомірних конструкцій на стійкість з урахуванням статичних та динамічних навантажень, а також температурних впливів.

Дістала подальшого розвитку методологія розрахунку багатопрогових висотних конструкцій на стійкість за рахунок розроблення узагальнених математичних моделей аналізу напружено-деформованого стану із застосуванням як технічної теорії згину, так і неklasичної теорії балок С. Тимошенка та з урахуванням зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, а також податливості пружних зв'язків секцій та конструкції з основою.

Розроблені математичні моделі і алгоритми розрахунку на стійкість багатопрогових висотних конструкцій з урахуванням східчастої або неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості пружних зв'язків секцій та конструкції з основою забезпечують

суттєве підвищення точності визначення критичних осьових навантажень щогл та стріл підйимально-транспортних машин, веж бурових установок, опор ліній електропередач та установок вітрової енергетики тощо. Виконано приклади розрахунків на стійкість щогли будівельного підйимального пристрою та проведено дослідження впливу висоти споруди, числа і характеристик проміжних опор, а також локальних ослаблень на критичні навантаження. Досліджено особливості втрати стійкості А-подібної бурової вежі.

Одержані у дисертації результати математичного моделювання напружено-деформованого стану і аналізу стійкості багатопрогової конструкції магістрального трубопроводу з урахуванням дії температурних навантажень і особливостей взаємодії труби з пружною основою можуть бути використані під час проектування та реконструкції магістральних трубопроводів, що дасть можливість раціонально добирати число температурних компенсаторів та проміжних опор надземних діляниць. Методику експериментальних досліджень локальних ослаблень магістральних трубопроводів у зв'язку з макророзшаруванням матеріалу труби в процесі тривалої експлуатації та результати досліджень стійкості трубопроводів доцільно застосовувати під час проведення технічної діагностики трубопроводів.

Результати наукових досліджень у вигляді математичних моделей і алгоритмів розрахунку багатопрогових довгомірних конструкцій на стійкість, а також практичних рекомендацій щодо забезпечення стійкості зазначених конструкцій пройшли промислові випробування під час оцінки стійкості надземного переходу «Острогоськ – Шебелинка», П н. Ду 1220, Ру 5,5 МПа, км 165 Круп'янського ЛВУ МГ Філії УМГ «Харківтрансгаз». Результати роботи використовуються у навчальному процесі у Національному університеті «Львівська політехніка».

Р О З Д І Л 2

СТІЙКІСТІ БАГАТОПРОГОНОВИХ ВИСОТНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІЄЮ СТАТИЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

2.1. Стійкість висотної конструкції зі ступінчастою змінною згинної жорсткості і поздовжньої сили

Механічну систему багатопрогонувої висотної конструкції подаємо на розрахунковій схемі (рис. 2.1) у вигляді вертикально складеного стрижня, що включає n ділянок довжинами $l_1, l_2, \dots, l_n$, погонними масами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, площами і осьовими моментами інерцій поперечних перерізів $A_1, A_2, \dots, A_n$ і $I_1, I_2, \dots, I_n$. Умовну густину матеріалу для кожної з ділянок визначаємо як $\rho_i = \mu_i/A_i$. Модуль Юнга матеріалу споруди позначаємо як E . На межах ділянок передбачаємо наявність кріпильних вузлів масами $m_1, m_2, \dots, m_n$ і податливих зв'язків з основою, коефіцієнти жорсткості яких у поперечному напрямі становлять $c_1, c_2, \dots, c_n$, а в обертальному напрямі — $c_{\phi 1}, c_{\phi 2}, \dots, c_{\phi n}$. Прогини багатопрогонувої висотної конструкції позначаємо як $w_1, w_2, \dots, w_n$; поздовжні осі ділянок з початками у їхніх нижніх крайніх перерізах — як $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Диференціальні рівняння зігнутої осі багатопрогонувої конструкції записуємо у вигляді

$$\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + b_i^2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1)$$

де

$$b_i^2 = \frac{P_i}{EI_i}.$$

Тут P_i — усереднена поздовжня сила у поперечному перерізі відповідної ділянки,

$$P_i = \left(\frac{\mu_i l_i}{2} + \sum_{j=i+1}^n \mu_j l_j + \sum_{j=i}^n m_j \right) g + P \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$P_n = \left(\frac{\mu_n l_n}{2} + m_n \right) g + P. \quad (2.2)$$

Кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і внутрішню силу у горизонтальному перерізі конструкції визначаємо за формулами

$$\varphi_i = \frac{dw_i}{dx_i}; \quad M_i = -EI_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2}; \quad V_i = -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} - P_i \frac{dw_i}{dx_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

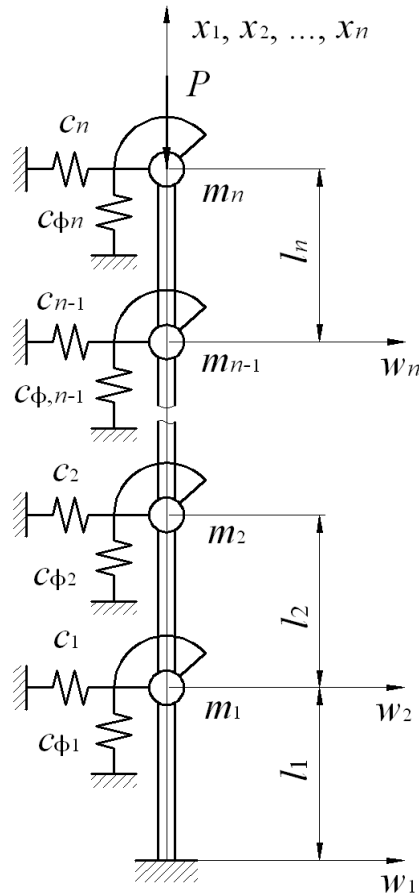


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема багатопрогової висотної конструкції

Поперечну силу, на відміну від внутрішньої сили у горизонтальному перерізі, знаходимо як

$$Q_i = -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3}. \quad (2.4)$$

Крайові умови, яким повинні відповідати розв'язки диференціального рівняння (2.1) на нижньому кінці споруди, запишемо у вигляді

$$w_1(0) = 0; \quad \varphi_1(0) = 0. \quad (2.5)$$

Крайові умови для стиків стиків сусідніх ділянок багатопрогової конструкції мають вигляд

$$w_{i+1}(0) = w_i(l_i); \quad \varphi_{i+1}(0) = \varphi_i(l_i);$$

$$M_{i+1}(0) = -c_{\varphi i} \varphi_i(l_i) + M_i(l_i); \quad V_{i+1}(0) = c_i w_i(l_i) + V_i(l_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (2.6)$$

Крайовими умовами для верхнього крайнього перерізу висотної споруди будуть залежності:

$$-c_{\varphi n} \varphi_n(l_n) + M_n(l_n) = 0; \quad c_n w_n(l_n) + V_n(l_n) = 0. \quad (2.7)$$

Розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (2.1) подаємо у матричному вигляді

$$Y_i(x_i) = S_i(x_i) \cdot Y_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.8)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), w'_i(x_i), w''_i(x_i), w'''_i(x_i)]; \quad (2.9)$$

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) & \frac{1}{b_i^3}(b_i x_i - \sin b_i x_i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) \\ 0 & 0 & \cos b_i x_i & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i \\ 0 & 0 & -b_i \sin b_i x_i & \cos b_i x_i \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

З урахуванням диференціальних залежностей (2.3), утворимо матричні співвідношення взаємозв'язків між функцією $w_i(x_i)$, з одного боку, та фізичними величинами, що характеризують напружено-деформований стан конструкції у даному перерізі, з іншого боку:

$$F_i(x_i) = A_i Y_i(x_i); \quad Y_i(x_i) = B_i F_i(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.11)$$

де

$$F_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), \varphi_i(x_i), M_i(x_i), V_i(x_i)]; \quad (2.12)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_i & 0 \\ 0 & -P_i & 0 & -EI_i \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI_i} & 0 \\ 0 & -\frac{P_i}{EI_i} & 0 & -\frac{1}{EI_i} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Крайові умови (2.6), (2.7) подамо у матричному вигляді

$$F_{i+1}(0) = H_i F_i(l_i) \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \quad F_{n+1} = H_n F_n(l_n), \quad (2.14)$$

де

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\varphi i} & 1 & 0 \\ c_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\varphi n} & 1 & 0 \\ c_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2.15)$$

$$F_{n+1} = \text{col}(w_n(l_n), \varphi_n(l_n), 0, 0). \quad (2.16)$$

З урахуванням матричних співвідношень (2.8), (2.11), (2.14) одержуємо матричний зв'язок геометричних і силових параметрів на кінцях споруди

$$F_{n+1} = \left(\prod_{i=n}^1 H_i A_i S_i(l_i) B_i \right) \cdot F_1(0), \quad (2.17)$$

де

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, M_1(0), V_1(0)). \quad (2.18)$$

Задаючи почергово матрицю-колонку (2.18) у вигляді

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, 1, 0) \text{ або } F_1(0) = \text{col}(0, 0, 0, 1), \quad (2.19)$$

за допомогою матричної залежності (2.17) реакції третього і четвертого елементів матриці-колонки F_{n+1} на одиничні значення третього і четвертого елементів матриці-колонки $F_1(0)$. Реакції поступального переміщення $w_n(l_n)$ на одиничні значення згинального моменту $M_1(0)$ і внутрішньої сили $V_1(0)$

позначаємо як r_{33} і r_{34} ; реакції обертового переміщення $\varphi_n(l_n)$ на одиничні значення відповідних елементів матриці-колонки $F_1(0)$ – як r_{43} і r_{44} . Тоді з урахуванням крайових умов (2.7), одержуємо систему алгебричних рівнянь

$$r_{33}M_1(0) + r_{34}V_1(0) = 0; \quad r_{43}M_1(0) + r_{44}V_1(0) = 0. \quad (2.20)$$

Для існування ненульових розв'язків системи (2.20) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто,

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.21)$$

Оскільки коефіцієнти алгебраїчних рівнянь (2.20) є функціями осьового навантаження споруди P , співвідношення (2.21) можна розглядати як характеристичне рівняння для знаходження критичних значень навантаження $P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, \dots$.

Для кожного з критичних значень осьового навантаження визчаємо початкові параметри напружено-деформованого стану ділянок багатопрогової висотної конструкції за допомогою залежності

$$F_i(0) = \left(\prod_{j=i}^1 H_j A_j S_j(l_j) B_j \right) F_1(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.22)$$

яка безпосередньо впливає із співвідношень (2.8), (2.11), (2.14), і обчислюємо форми прогонів, кутів повороту поперечних перерізів і згинальних моментів за формулами

$$F_i(x_i) = A_i S_i(x_i) B_i F_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.23)$$

які є наслідком співвідношень (2.8), (2.11).

Зауважимо, що сила у горизонтальному перерізі $V_i(x_i)$ кожної з ділянок споруди дорівнює нулю. Графіки форм поперечних сил $Q_i(x_i)$, $(i=1, 2, \dots, n)$ можна побудувати, застосовуючи співвідношення (2.4).

Розглянемо результати розрахунків на стійкість щогли будівельного підйимального пристрою ZREMB-Gnieszno-1000, призначеного для підймання

кабіни масою 1200 кг з вантажем масою до 1000 кг на висоту до 150 м. Підіймання вантажу здійснюється за допомогою електромеханічного приводу, розташованого у кабіні, та зубчастої передачі шестірня-рейка. Для зменшення енергії, що повинна витратитися на піднімання вантажу, а також зусиль, що виникають в елементах привідної системи, підіймальний пристрій оснащений противагою масою 1000 кг, яка з'єднана з кабінною за допомогою каната, перекинутого через блоки, встановлені на верху щогли. Отже, номінальне осьове навантаження висотної конструкції становить 3200 кг. Геометричні і жорсткісні характеристики щогли наведені у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Параметри багатопрогової висотної конструкції

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
l_1	м	12,00
$l_2 \dots l_{n-1}$	м	9,00
l_n	м	3,00
$E_1 \dots E_n$	Н/м ²	$2,10 \cdot 10^{11}$
$A_1 \dots A_n$	м ²	$3,34 \cdot 10^{-3}$
$I_1 \dots I_n$	м ⁴	$3,26 \cdot 10^{-4}$
$\rho_1 \dots \rho_n$	кг/м ³	$1,25 \cdot 10^4$
$\mu_1 \dots \mu_n$	кг/м	41,68
$m_1 \dots m_{n-1}$	кг	10,00
m_n	кг	35,00
$c_1 \dots c_n$	Н/м	$3,50 \cdot 10^6$
$c_{\phi 1} \dots c_{\phi n}$	Н·м/рад	$2,50 \cdot 10^3$

Результати визначення характеристик стійкості щогли висотою від 15 до 60 м наведені у табл. 2.2. На рис. 2.2 і 2.3 наведені приклади форм геометричних і силових факторів поперечних перерізів споруди.

Як видно з табл. 2.2, із збільшенням висоти споруди істотно зростає її гнучкість і спадають розрахункові значення критичної сили і критичного напруження. Застосування бокових кріплень значно підвищує жорсткість конструкції, переводячи її з області великих в область середніх або малих гнучкостей. За відсутності таких кріплень для споруди значної висоти критичне напруження може виявитися меншим, ніж напруження викликане номінальним навантаженням і силами власної ваги споруди. В процесі розв'язання задачі обчислено значення коефіцієнтів зведеної довжини багатопрогової висотної конструкції з урахуванням числа, розташування та значень коефіцієнтів жорсткості проміжних опор.

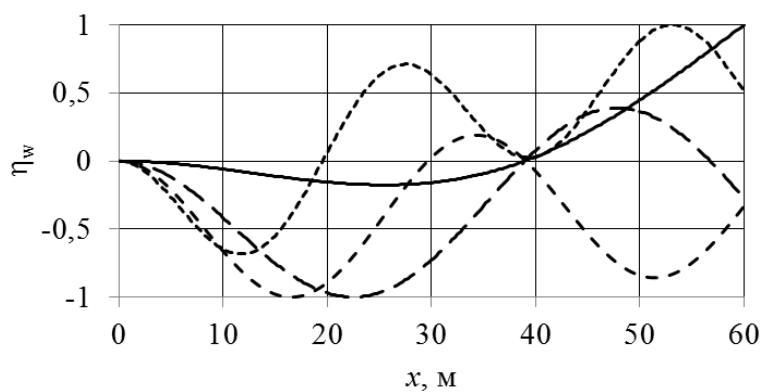
Форми прогинів (рис. 2.2, *а*) ілюструють зменшення поступального переміщення перерізу, розташованого навпроти опори. У цьому ж перерізі згинальний момент набуває максимального значення (рис. 2.2, *в*).

За наявності усіх бокових кріплень щогли, що передбачені її проектом, прогини і кути повороту поперечних перерізів нижньої і середньої частини щогли, згідно з основними формами деформування конструкції, є значно меншими від відповідних параметрів для верхньої частини щогли (рис. 2.3, *а* і 2.3, *б*). Це свідчить про можливість збільшення критичного навантаження за рахунок додаткового закріплення верхньої частини споруди.

Розроблені вище математична модель і узагальнений алгоритм розрахунку багатопрогових довгомірних конструкцій на стійкість із застосуванням матричного методу початкових параметрів дають можливість підвищити ефективність проведення проектних розрахунків щогл будівельних підймальних пристроїв та інших висотних споруд. Як показали дослідження, щоголова конструкція підймального пристрою ZREMB-Gniezno-1000 має велику гнучкість. Ефективним способом підвищення стійкості споруди слід вважати її додаткове кріплення до стіни будівлі. За допомогою запропонованих математичної моделі і алгоритму можна добирати раціональне число опорних вузлів багатопрогової несівної конструкції в залежності від її висоти.

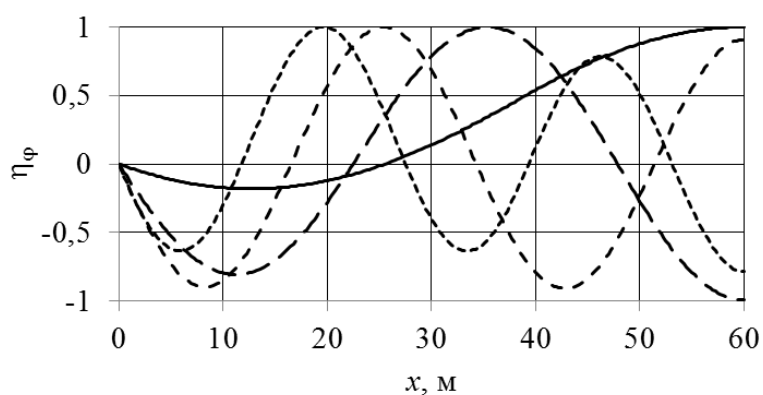
Таблиця 2.2 – Розрахункові значення характеристик стійкості висотної конструкції

Висота щогли l , м	Число ділянок n	Номери наявних опор	Гнучкість λ	Коефіцієнт зведеної висоти, μ	Значення критичної сили, кН				Критичне напруження σ_k , МПа
					1	2	3	4	
15,00	2	—	96,025	2,0000	747,85	6753,6	18765	36783	225,14
24,00	3	—	153,64	2,0000	289,58	2633,8	7326,6	14364	86,702
33,00	4	—	211,25	2,0000	150,42	1388,7	3870,4	7593,7	45,037
42,00	5	—	268,87	2,0000	89,991	852,81	2384,7	4683,0	26,943
51,00	6	—	326,48	2,0000	58,064	573,75	1612,5	3171,1	17,385
60,00	7	—	384,10	2,0000	38,906	409,80	1160,1	2286,1	11,649
60,00	7	5	200,23	1,0426	167,74	1141,9	2278,1	3550,3	57,112
60,00	7	5, 7	77,464	0,4033	1141,8	2023,8	3179,4	5490,0	348,74
60,00	7	3, 5, 7	63,823	0,3323	1694,6	3179,3	5443,5	7894,5	514,26
60,00	7	2, 3, ..., 7	42,770	0,2227	3782,4	4377,0	8835,3	9218,2	1139,4



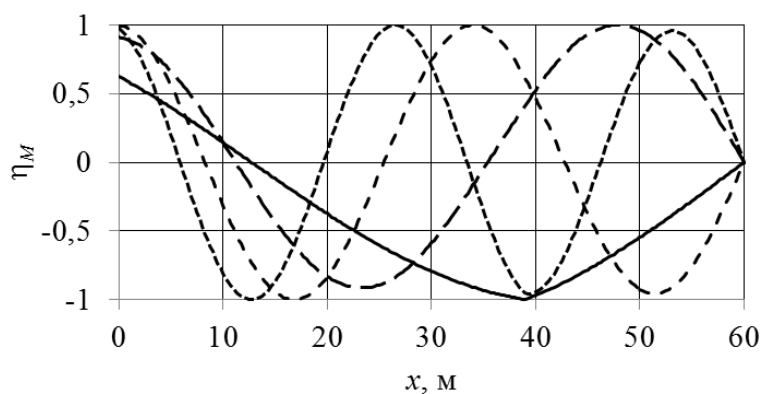
— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

a



— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

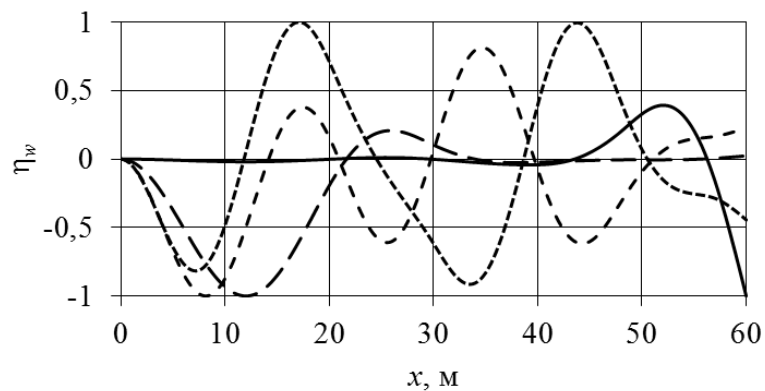
б



— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

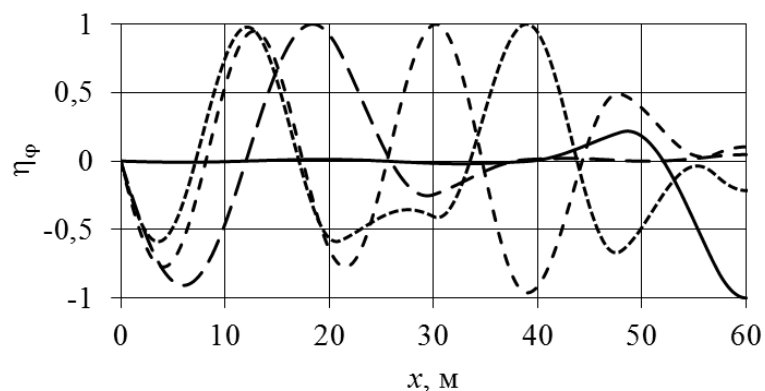
в

Рисунок 2.2 – Форми прогинів (*a*), кутів повороту поперечних перерізів (*б*) і згинальних моментів (*в*) защемленої в основі семипрогонової висотної конструкції висотою 60 м з п'ятьою пружною опорою (позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)



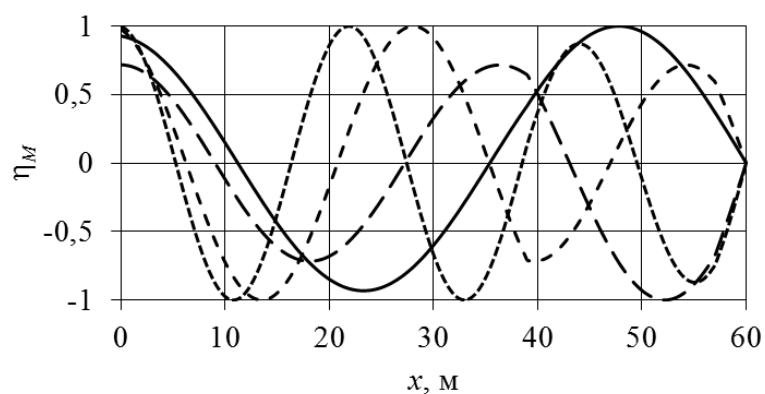
— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

a



— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

б



— - 1; - - - 2; - . - 3; . . . 4

в

Рисунок 2.3 – Форми прогинів (*a*), кутів повороту поперечних перерізів (*б*) і згинальних моментів (*в*) защемленої в основі семипрогонової висотної конструкції висотою 60 м з третьою, п'ятою та сьомою пружними опорами (позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)

2.2. Вплив деформацій зсуву і локальних ослаблень на стійкість висотної конструкції

Розглянемо механічну систему багатопрогової висотної конструкції з локальними ослабленнями на розрахунковій схемі (рис. 2.4) у вигляді вертикально складеного стрижня, що включає n секцій довжинами $l_1, l_2, \dots, l_n$ і погонними масами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. На межах секцій передбачаємо наявність кріпильних вузлів масами $m_1, m_2, \dots, m_n$ і пружних шарнірних зв'язків секцій між собою та секцій з основою. Коефіцієнти жорсткості проміжних опор споруди у поперечному напрямі становлять $c_1, c_2, \dots, c_n$; коефіцієнти жорсткості проміжних опор в обертальному напрямі — $c_{\phi 11}, c_{\phi 12}, \dots, c_{\phi 1n}, c_{\phi 21}, c_{\phi 22}, \dots, c_{\phi 2,n-1}$; коефіцієнти жорсткості пружних шарнірних зв'язків секцій — $c_{\phi 1}, c_{\phi 2}, \dots, c_{\phi n}$. Прогини багатопрогової висотної конструкції позначаємо як $w_1, w_2, \dots, w_n$; поздовжні осі ділянок з початками у їхніх нижніх крайніх перерізах — як $x_1, x_2, \dots, x_n$. Споруда навантажена осьовою силою P .

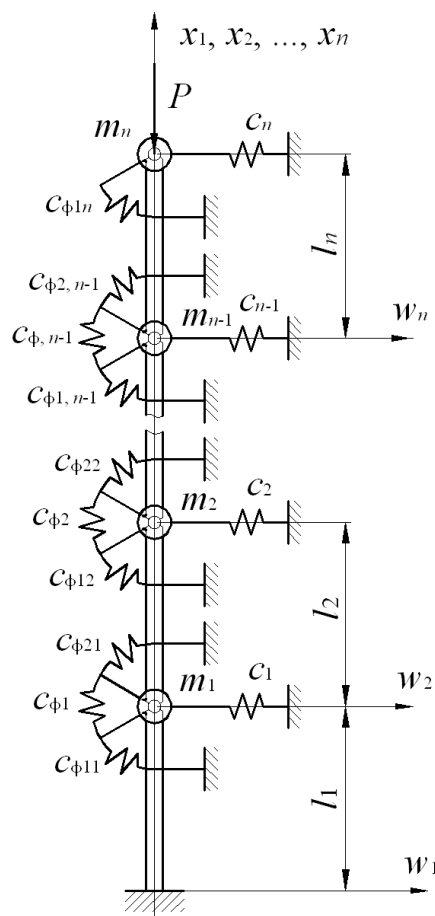


Рисунок 2.4 – Розрахункова схема висотної конструкції

Застосовуючи теорію балок С. Тимошенка, диференціальні рівняння деформованої осі висотної конструкції запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \kappa_i G_i A_i \left(\frac{d^2 w_i}{dx_i^2} - \frac{d\varphi_i}{dx_i} \right) &= -p_i; \\ E_i I_i \frac{d^2 \varphi_i}{dx_i^2} + \kappa_i G_i A_i \left(\frac{dw_i}{dx_i} - \varphi_i \right) + P_i \frac{dw_i}{dx_i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

де E_i, G_i – модулі пружності матеріалу першого та другого роду; κ_i – коефіцієнт, що характеризує вплив деформації зсуву; A_i, I_i – площа і осьовий момент інерції поперечного перерізу секції; P_i – усереднена поздовжня сила; φ_i – кут нахилу дотичної до зігнутої осі конструкції від дії згинальних моментів; p_i – інтенсивність розподіленого навантаження.

Значення усередненої поздовжньої сили знаходимо за формулами

$$\begin{aligned} P_i &= \left(\frac{\mu_i l_i}{2} + \sum_{j=i+1}^n \mu_j l_j + \sum_{j=i}^n m_j \right) g + P \quad (i=1, 2, \dots, n-1); \\ P_n &= \left(\frac{\mu_n l_n}{2} + m_n \right) g + P. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Виключивши з рівнянь (2.24) невідому функцію φ_i , одержуємо

$$\frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + b_i^2 \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} = \frac{p_i}{E_i I_i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.26)$$

де

$$b_i^2 = \frac{P_i}{E_i I_i}.$$

З диференціальних рівнянь (2.24) одержуємо кут нахилу дотичної до зігнутої осі висотної конструкції

$$\varphi_i = \left(1 + \frac{P_i}{\kappa_i G_i A_i} \right) \frac{dw_i}{dx_i} + \frac{E_i I_i}{\kappa_i G_i A_i} \frac{d^3 w_i}{dx_i^3}. \quad (2.27)$$

Згинальний момент і поперечну силу у поперечному перерізі конструкції, згідно з теорією балок С. Тимошенка, записуємо як

$$M_i = -E_i I_i \frac{d\varphi_i}{dx_i}; \quad Q_i = \kappa_i G_i A_i \left(\frac{dw_i}{dx_i} - \varphi_i \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.28)$$

З урахуванням залежностей (2.24), співвідношення (2.28) перетворюємо до вигляду

$$M_i = -E_i I_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} - E_i I_i \frac{p_i}{\kappa_i G_i A_i}; \quad Q_i = -P_i \frac{dw_i}{dx_i} - E_i I_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.29)$$

Для випадку, коли висотна конструкція защемлена в основі, на її нижньому кінці прогин і кут повороту поперечного перерізу, обумовлений дією згинальних моментів, дорівнюють нулю,

$$w_1(0) = 0; \quad \varphi_1(0) = 0. \quad (2.30)$$

Крайові умови для стиків сусідніх ділянок споруди запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} w_{i+1}(0) &= w_i(l_i); \quad \varphi_{i+1}(0) = \left(1 + \frac{c_{\varphi 1i}}{c_{\varphi i}} \right) \varphi_i(l_i) - \frac{1}{c_{\varphi i}} M_i(l_i); \\ M_{i+1}(0) &= - \left(c_{\varphi 1i} + c_{\varphi 2i} + \frac{c_{\varphi 1i} c_{\varphi 2i}}{c_{\varphi i}} \right) \varphi_i(l_i) + \left(1 + \frac{c_{\varphi 2i}}{c_{\varphi i}} \right) M_i(l_i); \\ Q_{i+1}(0) &= Q_i(l_i) + c_{yi} w_i(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Перша з цих рівностей є умовою спряження сусідніх секцій, три інші впливають з умов рівноваги шарнірно сполучених їхніх кінців.

Аналогічно записуємо крайові умови для верхнього кінця споруди,

$$c_{\varphi 1n} \varphi_n(l_n) + M_n(l_n) = 0; \quad c_{yn} w_n(l_n) + Q_n(l_n) = 0. \quad (2.32)$$

За відсутності бокового навантаження споруди диференціальні рівняння зігнутих осей ділянок (2.26) спрощуються і набувають вигляду

$$\frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + b_i^2 \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.33)$$

Розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (2.33) подаємо у матричному вигляді

$$Y_i(x_i) = S_i(x_i) \cdot Y_i(0) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.34)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), w'_i(x_i), w''_i(x_i), w'''_i(x_i)]; \quad (2.35)$$

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) & \frac{1}{b_i^3}(b_i x_i - \sin b_i x_i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i & \frac{1}{b_i^2}(1 - \cos b_i x_i) \\ 0 & 0 & \cos b_i x_i & \frac{1}{b_i} \sin b_i x_i \\ 0 & 0 & -b_i \sin b_i x_i & \cos b_i x_i \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

З диференціальних залежностей (2.27) і (2.29) одержуємо вирази похідних функції $w_i(x_i)$,

$$\begin{aligned} \frac{dw_i}{dx_i} &= \varphi_i + \frac{Q_i}{\kappa_i G_i A_i}; & \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} &= -\frac{M_i}{E_i I_i} - \frac{p_i}{\kappa_i G_i A_i}; \\ \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} &= -\frac{P_i}{E_i I_i} \varphi_i - \frac{1}{E_i I_i} \left(1 - \frac{P_i}{\kappa_i G_i A_i}\right) Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Долучаючи до рівностей (2.27), (2.29), (2.37) тотожність $w_i \equiv w_i$, і, припускаючи, що бокове навантаження p_i відсутнє, записуємо матричні співвідношення взаємозв'язків між функцією $w_i(x_i)$ і її похідними, з одного боку, та фізичними величинами, що характеризують напружено-деформований стан конструкції, з іншого боку,

$$F_i(x_i) = A_i Y_i(x_i); \quad Y_i(x_i) = B_i F_i(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.38)$$

де

$$F_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), \varphi_i(x_i), M_i(x_i), V_i(x_i)]; \quad (2.39)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{P_i}{\kappa_i G_i A_i} & 0 & \frac{E_i I_i}{\kappa_i G_i A_i} \\ 0 & 0 & -E_i I_i & 0 \\ 0 & -P_i & 0 & -E_i I_i \end{pmatrix}; \quad (2.40)$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\kappa_i G_i A_i} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E_i I_i} & 0 \\ 0 & -\frac{P_i}{E_i I_i} & 0 & -\frac{1}{E_i I_i} \left(1 - \frac{P_i}{\kappa_i G_i A_i} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Крайові умови (2.31), (2.32) подаємо у матричному вигляді

$$F_{i+1}(0) = H_i F_i(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad F_{n+1} = H_n F_n(l_n), \quad (2.42)$$

де

$$F_{n+1} = \text{col}(w_n(l_n), \varphi_n(l_n), 0, 0); \quad (2.43)$$

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{c_{\varphi 1i}}{c_{\varphi i}} & -\frac{1}{c_{\varphi i}} & 0 \\ 0 & -c_{\varphi 1i} - c_{\varphi 2i} - \frac{c_{\varphi 1i} c_{\varphi 2i}}{c_{\varphi i}} & 1 + \frac{c_{\varphi 2i}}{c_{\varphi i}} & 0 \\ c_{yi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_{\varphi 1n} & 1 & 0 \\ c_{yn} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

З урахуванням матричних співвідношень (2.34), (2.38), (2.42), одержуємо матричний зв'язок геометричних і силових параметрів на кінцях споруди,

$$F_{n+1} = \left(\prod_{i=n}^1 H_i A_i S_i(l_i) B_i \right) \cdot F_1(0), \quad (2.45)$$

де матриця-колонка $F_1(0)$, згідно з крайовими умовами (2.30), має вигляд

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, M_1(0), Q_1(0)). \quad (2.46)$$

Задаючи по чергово матрицю-колонку (2.46) у вигляді

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, 1, 0) \text{ або } F_1(0) = \text{col}(0, 0, 0, 1), \quad (2.47)$$

за допомогою матричної залежності (2.45) визначаємо реакції третього і четвертого елементів матриці-колонки F_{n+1} на одиничні значення третього і четвертого елементів матриці-колонки $F_1(0)$. Реакції третього елемента матриці-колонки F_{n+1} на одиничні значення згинального моменту $M_1(0)$ і внутрішньої сили $Q_1(0)$ позначаємо як r_{33} і r_{34} ; реакції четвертого елемента матриці-колонки F_{n+1} на одиничні значення відповідних елементів матриці-колонки $F_1(0)$ позначаємо як r_{43} і r_{44} . Тоді, з урахуванням крайових умов (2.32), одержуємо систему алгебричних рівнянь

$$r_{33}M_1(0) + r_{34}Q_1(0) = 0; \quad r_{43}M_1(0) + r_{44}Q_1(0) = 0. \quad (2.48)$$

Для існування ненульових розв'язків системи (2.48) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто,

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.49)$$

Оскільки коефіцієнти алгебричних рівнянь (2.48) є функціями осьового навантаження споруди P , співвідношення (2.49) можна розглядати як характеристичне рівняння для знаходження критичних значень навантаження $P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, \dots$. В процесі виконання розрахунку багатопрогонової висотної конструкції на стійкість значення поздовжніх сил на її ділянках визначаємо за формулами (2.25).

Для кожного з критичних значень осьового навантаження обчислюємо початкові параметри напружено-деформованого стану ділянок багатопрогонової висотної конструкції за допомогою залежності

$$F_i(0) = \left(\prod_{j=i}^1 H_j A_j S_j(l_j) B_j \right) F_1(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.50)$$

яка безпосередньо впливає із співвідношень (2.34), (2.38), (2.42), і обчислюємо форми прогинів, кутів повороту поперечних перерізів і згинальних моментів за формулами

$$F_i(x_i) = A_i S_i(x_i) B_i F_i(0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.51)$$

які є наслідком співвідношень (2.34), (2.38).

Отже, для визначення спектру критичних сил спершу за допомогою залежностей (2.45), (2.47) визначаємо коефіцієнти алгебричних рівнянь (2.48), після чого знаходимо корені трансцендентного рівняння (2.49). Форми геометричних і силових параметрів поперечних перерізів конструкції одержуємо із застосуванням співвідношень (2.50), (2.51).

Розглянемо результати розрахунків на стійкість щогли будівельного підйимального пристрою ZREMB-Gniezno-1000, призначеного для підймання кабіни масою 1200 кг з вантажем масою до 1000 кг на висоту до 150 м. Підймання вантажу здійснюється за допомогою електромеханічного приводу, розташованого у кабіні, та зубчастої передачі шестірня-рейка. Для зменшення енергії, що повинна витратитися на піднімання вантажу, а також зусиль, що виникають в елементах привідної системи, підйимальний пристрій оснащений противагою масою 1000 кг, яка з'єднана з кабіною за допомогою каната, перекинутого через блоки, встановлені на верху щогли. Отже, номінальне осьове навантаження висотної конструкції становить 3200 кг. Геометричні і жорсткісні характеристики щогли наведені у табл. 2.3.

Результати визначення характеристик стійкості щогли висотою від 15 до 60 м наведені у табл. 2.4. На рис. 2.5 і 2.6 наведені приклади форм геометричних і силових факторів поперечних перерізів споруди.

Як видно з табл. 2.4, із збільшенням висоти споруди істотно зростає її гнучкість і спадають розрахункові значення критичної сили і критичного напруження. Застосування бокових кріплень значно підвищує жорсткість

конструкції, переводячи її з області великих в область середніх або малих гнучкостей. За відсутності таких кріплень для споруди значної висоти критичне напруження може виявитися меншим, ніж напруження викликане номінальним навантаженням і силами власної ваги споруди. В процесі розв'язання задачі обчислено значення коефіцієнтів зведеної довжини багатопрогової висотної конструкції з урахуванням числа, розташування та значень коефіцієнтів жорсткості проміжних опор.

Форми прогинів (рис. 2.6, *а*) ілюструють зменшення поступального переміщення перерізу, розташованого навпроти опори. У цьому ж перерізі згинальний момент набуває максимального значення (рис. 2.6, *в*).

За наявності усіх бокових кріплень щогли, що передбачені її проектом, прогини і кути повороту поперечних перерізів нижньої і середньої частини щогли, згідно з основними формами деформування конструкції, є значно меншими від відповідних параметрів для верхньої частини щогли (рис. 2.7, *а* і 2.7, *б*). Це свідчить про можливість збільшення критичного навантаження за рахунок додаткового закріплення верхньої частини споруди.

Таблиця 2.3 – Параметри багатопрогової висотної конструкції

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
l_1	м	12,00
$l_2 \dots l_{n-1}$	м	9,00
l_n	м	3,00
$E_1 \dots E_n$	Н/м ²	$2,10 \cdot 10^{11}$
$G_1 \dots G_n$	Н/м ²	$8,10 \cdot 10^{10}$
$\kappa_1 \dots \kappa_n$	—	0,80
$A_1 \dots A_n$	м ²	$3,34 \cdot 10^{-3}$
$I_1 \dots I_n$	м ⁴	$3,26 \cdot 10^{-4}$
$\rho_1 \dots \rho_n$	кг/м ³	$1,25 \cdot 10^4$
$\mu_1 \dots \mu_n$	кг/м	41,68
$m_1 \dots m_{n-1}$	кг	10,00
m_n	кг	35,00
$C_1 \dots C_n$	Н/м	$3,50 \cdot 10^6$
$C_{\phi 1} \dots C_{\phi n}$	Н·м/рад	$1,00 \cdot 10^7$
$C_{\phi 11} \dots C_{\phi 1n}$	Н·м/рад	$1,25 \cdot 10^3$
$C_{\phi 21} \dots C_{\phi 2n}$	Н·м/рад	$1,25 \cdot 10^3$

Розроблені вище математична модель і узагальнений алгоритм розрахунку багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість із застосуванням матричного методу початкових параметрів дають можливість підвищити ефективність проведення проектних розрахунків щогл будівельних підймальних пристроїв та інших висотних споруд. Як показали дослідження, щоголова конструкція підймального пристрою ZREMB-Gniezno-1000 має велику гнучкість. Ефективним способом підвищення стійкості споруди слід вважати її додаткове кріплення до стіни будівлі. За допомогою запропонованих математичної моделі і алгоритму можна добирати раціональне число опорних вузлів багатопрогової несівної конструкції в залежності від її висоти.

Таблиця 2.4 – Розрахункові значення характеристик стійкості висотної конструкції

Висота щогли l , м	Число ділянок n	Номери наявних опор	Гнучкість λ	Коефіцієнт зведеної висоти μ	Значення критичної сили, кН	Критичне напруження σ_k , МПа
15,00	2	—	96,025	2,0000	747,85	225,14
60,00	7	5	200,23	1,0426	167,74	57,112
60,00	7	5, 7	77,464	0,4033	1141,8	348,74
15,00	2 (з ослабленнями)	—	100,74	2,0982	679,60	204,71
60,00	7 (з ослабленнями)	5	57,465	1,3639	96,205	35,694
60,00	7 (з ослабленнями)	5, 7	57,465	0,51704	691,90	214,05

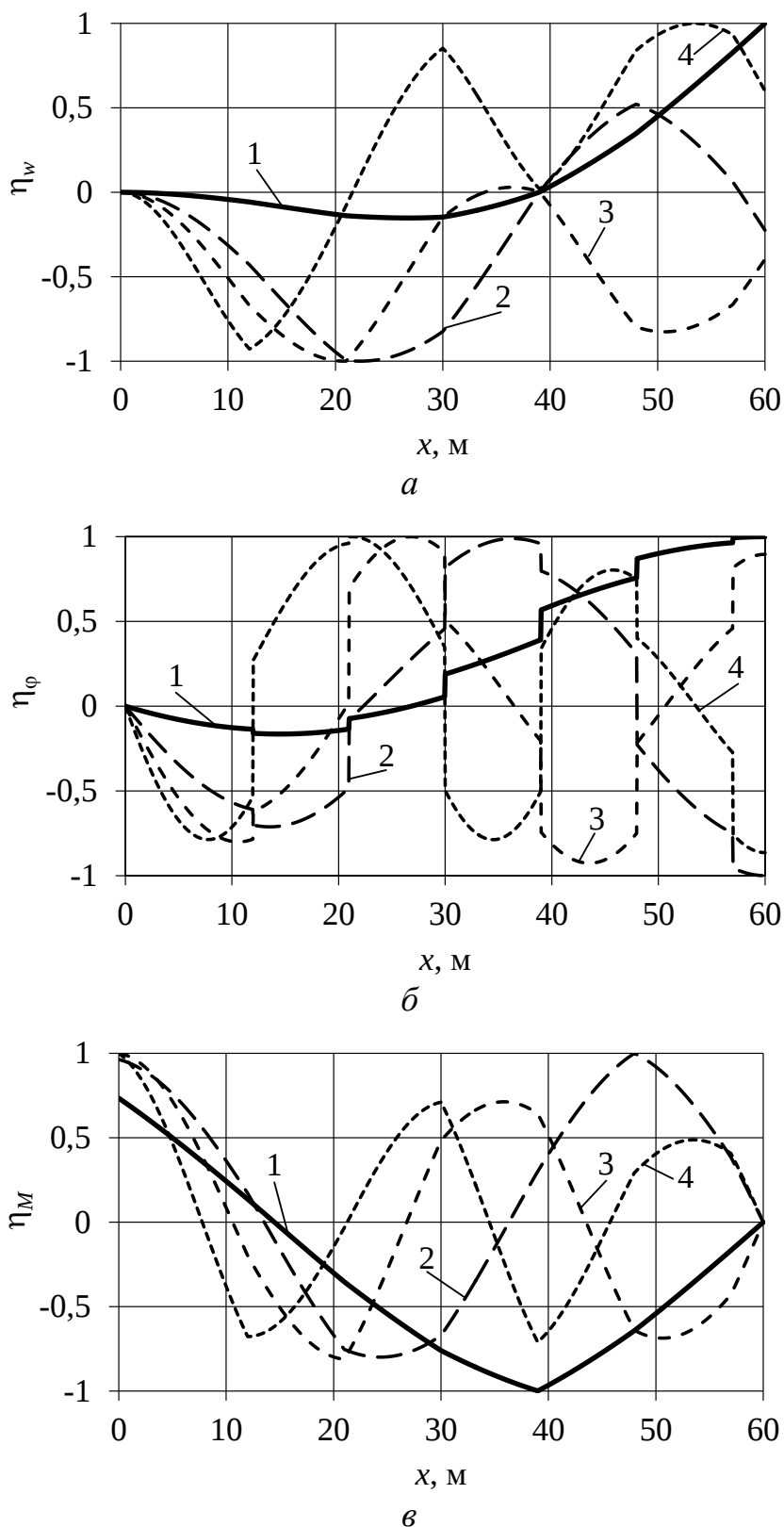


Рисунок 2.5 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) семипрогонової висотної конструкції, защемленої в основі, з пружною опорою 5 і місцевими ослабленнями (позначення форм відповідають порядковим значенням критичної сили)

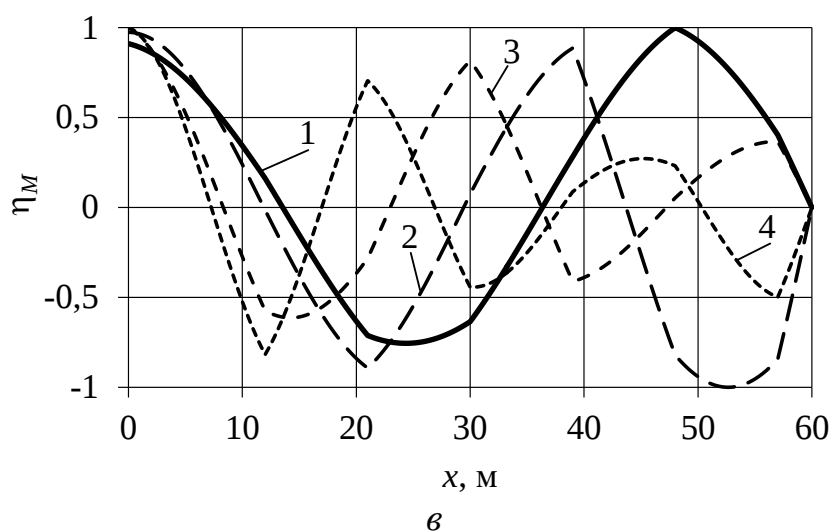
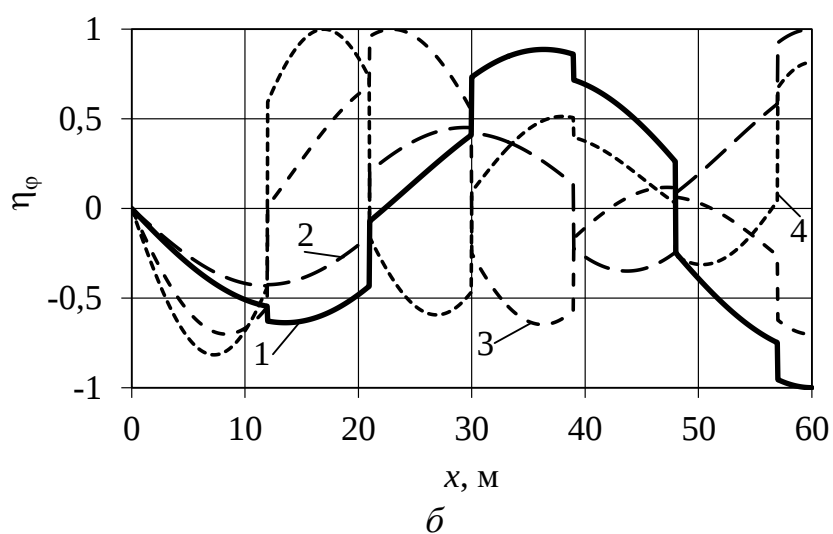
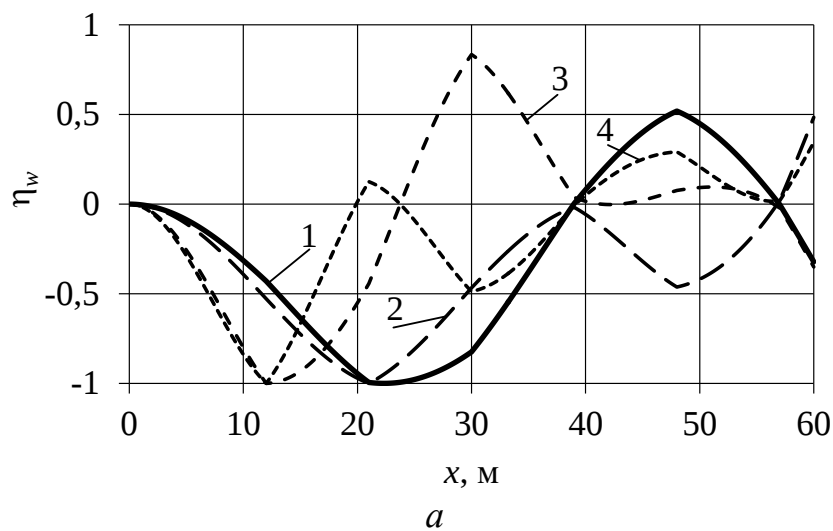


Рисунок 2.6 – Форми прогинів (*a*), кутів повороту поперечних перерізів (*б*) і згинальних моментів (*в*) семипрогонової висотної конструкції, зацмленої в основі, з пружними опорами 5 і 7 і місцевими ослабленнями (позначення форм відповідають порядковим значенням критичної сили)

2.3. Стійкість і коливання конструкції пілонного типу

Розрахункову схему щоглової А-подібної вишки для вивчення поздовжньо-поперечних коливань споруди в площині колон подано на рис. 2.7. Колони розглядаємо як багатопрогонові складені стержні, нахилені до вертикалі під кутами β_1 і β_2 . Поздовжні розміри ділянок колон позначаємо як $l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1, n-1}, l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2, n-1}$. На нижніх кінцях та у стиках ділянок з металоконструкціями жорстко зв'язані вантажі масами $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1, n-1}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2, n-1}$ і моментами інерції $J_{11}, J_{12}, \dots, J_{1, n-1}, J_{21}, J_{22}, \dots, J_{2, n-1}$. Ексцентриситети центрів мас вантажів відносно осей колон складають $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{1, n-1}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \dots, \varepsilon_{2, n-1}$. Верхні кінці колон жорстко зв'язані із кронблоком масою m_k і центральним моментом інерції J_k ; центр маси кронблока збігається із початком системи координат x_k, y_k , а його положення визначається розмірами $\delta_{k1}, \delta_{k2}, \varepsilon_k$. Перерізи колон, які є межами ділянок, зв'язані між собою пружними ланками 1, 2, ..., $n-1$, а з нерухомою основою – деформівними елементами 11, 12, ..., 1 n , 21, 22, ..., 2 n .

Для опису руху колон споруди використовуємо прямокутні координатні системи x_{ij}, y_{ij} ($j = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n-1$), початки яких розташовані в нижніх крайніх перерізах відповідних ділянок. Поздовжні та поперечні переміщення перерізів колон позначаємо як u_{ij}, w_{ij} , а поступальні і обертальні переміщення кронблока – як x_k, y_k, α_k .

Рівняння поздовжніх коливань ділянок колон записуємо у вигляді

$$\frac{\partial^2 u_{ji}}{\partial \xi_{ji}^2} - \frac{l_{ji}^2}{a_{ji}^2} \frac{\partial^2 u_{ji}}{\partial t^2} = 0 \quad (j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.52)$$

де $a_{ij} = \sqrt{E/\rho_{ji}}$ – швидкість поширення хвилі пружних деформацій (E і ρ_{ji} – модуль пружності першого роду і усереднена густина матеріалу); $\xi_{ji} = x_{ji}/l_{ji}$ – відносна поздовжня координата.

Поперечні коливання ділянок металоконструкції описуємо з урахуванням деформацій зсуву та інерції обертального руху поперечних перерізів

$$\begin{aligned}
& \frac{EI_{ji}}{l_{ji}^4} \left(1 - \frac{P_{ji}}{\kappa_{ji} G A_{ji}} \right) \frac{\partial^4 w_{ji}}{\partial \xi_{ji}^4} - \frac{\rho_{ji} I_{ji}}{l_{ji}^2} \left(1 + \frac{E}{\kappa_{ji} G} - \frac{P_{ji}}{\kappa_{ji} G A_{ji}} \right) \frac{\partial^4 w_{ji}}{\partial \xi_{ji}^2 \partial t^2} + \\
& + \frac{P_{ji}}{l_{ji}^2} \frac{\partial^2 w_{ji}}{\partial \xi_{ji}^2} + \rho_{ji} A_{ji} \frac{\partial^2 w_{ji}}{\partial t^2} + \frac{\rho_{ji}^2 I_{ji}}{\kappa_{ji} G} \frac{\partial^4 w_{ji}}{\partial t^4} = 0
\end{aligned} \quad (2.53)$$

$$(j=1, 2; \quad i=1, 2, \dots, n-1),$$

де A_{ji} і I_{ji} – площа та осьовий момент інерції поперечного перерізу; G – модуль пружності матеріалу другого роду; κ_{ji} – коефіцієнт, що характеризує вплив деформацій зсуву; P_{ij} – статична осьова сила, що стискає стержень.

Для складання крайових умов інтегрування рівнянь (2.52), (2.53) розглянемо особливості взаємодії колон через дискретні пружні елементи. Схему зусиль, які діють з боку деформівної ланки на колони, зображено на рис. 2.8, а. Внутрішні сили межевих перерізів пружного елемента, що примикають до вузлів колон, подано на рис. 2.8, б.

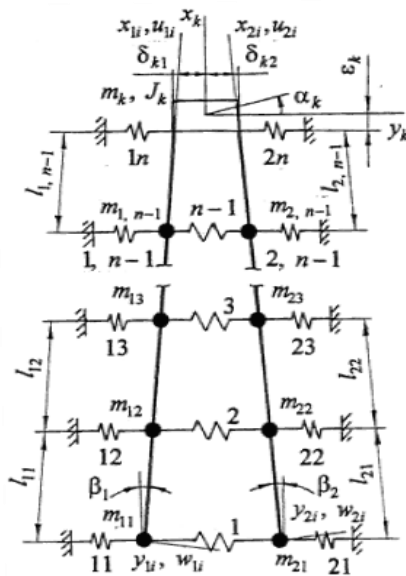


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема щоглової А-подібної утримувальної конструкції.

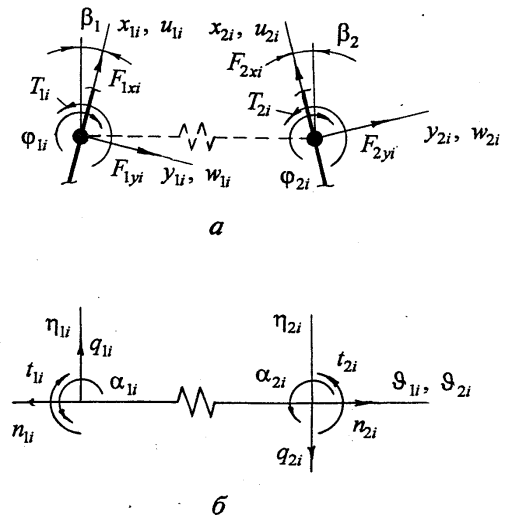


Рисунок 2.8 – Схема взаємодії колон споруди із з'єднувальним пружним елементом

Пружні ланки, якими взаємодіють колони, здебільшого мають вигляд звичайних або складених стержнів. Для їх крайніх перерізів є справедливими такі залежності внутрішніх силових факторів і переміщень:

$$p_{1i} = a_i \psi_{1i} + b_i \psi_{2i}, \quad p_{2i} = c_i \psi_{1i} + d_i \psi_{2i}, \quad (2.54)$$

де ψ_{1i}, ψ_{2i} – матриці-колонки переміщень,

$$\psi_{1i} = \text{col}(\vartheta_{1i}, \eta_{1i}, \alpha_{1i}), \quad \psi_{2i} = \text{col}(\vartheta_{2i}, \eta_{2i}, \alpha_{2i}); \quad (2.55)$$

p_{1i}, p_{2i} – матриці-колонки внутрішніх сил,

$$p_{1i} = \text{col}(n_{1i}, q_{1i}, t_{1i}), \quad p_{2i} = \text{col}(n_{2i}, q_{2i}, t_{2i}); \quad (2.56)$$

a_i, b_i, c_i, d_i – квадратні матриці квазіпружних коефіцієнтів.

Сформуємо матриці-колонки переміщень

$$\begin{aligned} \Psi_{1i} &= \text{col}(u_{1i}(0, t), w_{1i}(0, t), \varphi_{1i}(0, t)), \\ \Psi_{2i} &= \text{col}(u_{2i}(0, t), w_{2i}(0, t), \varphi_{2i}(0, t)). \end{aligned} \quad (2.57)$$

і матриці-колонки навантажень

$$P_{1i} = \text{col}(F_{1xi}, F_{1yi}, T_{1i}), \quad P_{2i} = \text{col}(F_{2xi}, F_{2yi}, T_{2i}). \quad (2.58)$$

Як видно з рис. 2.9, матриці-колонки (2.55) і (2.58) зв'язані відповідно з матрицями-колонками (2.57) і (2.56) залежностями

$$\psi_{ji} = \Gamma_j \Psi_{ji}, \quad P_{ji} = \Lambda_j p_{ji} \quad (j=1, 2; \quad i=1, 2, \dots, n-1). \quad (2.59)$$

Тут Γ_j і Λ_j – квадратні матриці,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 \\ \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} -\sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ \cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & -\cos \beta_1 & 0 \\ \cos \beta_1 & \sin \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \sin \beta_2 & \cos \beta_2 & 0 \\ -\cos \beta_2 & \sin \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З урахуванням (2.54), (2.59) записуємо вирази матриць-колонок навантажень у вигляді

$$P_{1i} = A_i \Psi_{1i} + B_i \Psi_{2i}; \quad P_{2i} = C_i \Psi_{1i} + D_i \Psi_{2i}, \quad (2.60)$$

де

$$A_i = \Lambda_1 a_i \Gamma_1, \quad B_i = \Lambda_1 b_i \Gamma_2, \quad C_i = \Lambda_2 c_i \Gamma_{1i}, \quad D_i = \Lambda_2 d_i \Gamma_{2i}.$$

Компоненти квадратних матриць A_i , B_i , C_i , D_i позначаємо як a_{jki} , b_{jki} , c_{jki} , d_{jki} , де індекси j , k є номерами стрічки та стовпця, яким належить даний елемент матриці. Залежності (2.59) використовуємо для складання крайових умов розв'язування рівнянь (2.52), (2.53).

Зауважимо, що, згідно з теоремою Бетті про взаємність робіт, матриці A_i і D_i симетричні, а матриці B_i і C_i задовольняють співвідношення

$$C_i = B_i^t,$$

де верхній індекс t вказує на транспонування матриці.

У подальшому скористаємося такими позначеннями: P_{xji} , P_{yji} , M_{aji} ($j = 1, 2$; $i = 1, 2, \dots, n-1$) – навантаження, прикладені до центрів поперечних перерізів колон, розташованих на межах ділянок, подані у вигляді проекцій головного вектора на координатні осі x_{ij} , y_{ij} і головного моменту; P_{xk} , P_{yk} , M_{ak} – проекції головного вектора навантажень, прикладених до кронблока, на координатні осі x_k , y_k і головний момент навантажень, обчислений за умови, що центром зведення сил є центр маси кронблока; N_{ij} , φ_{ij} , M_{ij} , Q_{ij} – поздовжня сила, кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і поперечна сила.

Крайові умови для нижнього крайнього перерізу першої колони споруди записуємо у вигляді

$$\begin{aligned} & m_{11} \frac{\partial^2 u_{11}(0, t)}{\partial t^2} - m_{11} \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{11}(0, t)}{\partial t^2} - N_{11}(0, t) + \\ & + (c_{x11} - a_{111}) u_{11}(0, t) + (c_{y11} - a_{121}) w_{11}(0, t) - (c_{x\alpha 11} - a_{131}) \varphi_{11}(0, t) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_{111}u_{21}(0,t) - b_{121}w_{21}(0,t) - b_{131}\varphi_{21}(0,t) = P_{x11}; \\
& m_{11} \frac{\partial^2 w_{11}(0,t)}{\partial t^2} - Q_{11}(0,t) + (c_{xy11} - a_{211})u_{11}(0,t) + \\
& + (c_{y11} - a_{221})w_{11}(0,t) - (c_{y\alpha 11} - a_{231})\varphi_{11}(0,t) - b_{211}u_{21}(0,t) - \\
& - b_{221}w_{21}(0,t) - b_{231}\varphi_{21}(0,t) = P_{y11}; \\
& J_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{11}(0,t)}{\partial t^2} + M_{11}(0,t) - \varepsilon_{11}N_{11}(0,t) + \\
& + (\varepsilon_{11}c_{x11} - c_{x\alpha 11} + a_{311})u_{11}(0,t) + (\varepsilon_{11}c_{xy11} - c_{y\alpha 11} + a_{321})w_{11}(0,t) + \\
& + (c_{\alpha 11} - \varepsilon_{11}c_{x\alpha 11} + a_{331})\varphi_{11}(0,t) + b_{311}u_{21}(0,t) + \\
& + b_{321}w_{21}(0,t) + b_{331}\varphi_{21}(0,t) = -M_{\alpha 11}. \tag{2.61}
\end{aligned}$$

Аналогічно складаємо крайові умови для нижнього крайнього перерізу другої колони вишки

$$\begin{aligned}
& m_{21} \frac{\partial^2 u_{21}(0,t)}{\partial t^2} - m_{21}\varepsilon_{21} \frac{\partial^2 \varphi_{21}(0,t)}{\partial t^2} - N_{21}(0,t) + \\
& + (c_{x21} - d_{111})u_{21}(0,t) + (c_{xy21} - d_{121})w_{21}(0,t) - (c_{x\alpha 21} + d_{131})\varphi_{21}(0,t) - \\
& - c_{111}u_{11}(0,t) - c_{121}w_{11}(0,t) - c_{131}\varphi_{11}(0,t) = P_{x21}; \\
& m_{21} \frac{\partial^2 w_{21}(0,t)}{\partial t^2} - Q_{21}(0,t) + (c_{xy21} - d_{211})u_{21}(0,t) + \\
& + (c_{y21} - d_{221})w_{21}(0,t) - (c_{y\alpha 21} + d_{231})\varphi_{21}(0,t) - c_{211}u_{11}(0,t) - \\
& - c_{221}w_{11}(0,t) - c_{231}\varphi_{11}(0,t) = P_{y21}; \\
& J_{21} \frac{\partial^2 \varphi_{21}(0,t)}{\partial t^2} + M_{21}(0,t) - \varepsilon_{21}N_{21}(0,t) + \\
& + (\varepsilon_{21}c_{x21} - c_{x\alpha 21} + d_{311})u_{21}(0,t) + (\varepsilon_{21}c_{xy21} - c_{y\alpha 21} + d_{321})w_{21}(0,t) + \\
& + (c_{\alpha 21} - \varepsilon_{21}c_{x\alpha 21} + d_{331})\varphi_{21}(0,t) + c_{311}u_{11}(0,t) +
\end{aligned}$$

$$+ c_{321} w_{21}(0, t) + c_{331} \varphi_{11}(0, t) = -M_{\alpha 21}. \quad (2.62)$$

Для того, щоб записати крайові умови для верхнього кінця споруди, розглянемо взаємодію кронблока і колон. У відповідності до схеми, зображеної на рис. 2.9, координати точок кріплення колон O_1 і O_2 подаємо як функції координат руху кронблока

$$x_{k1} = x_k - \delta_{k1} \alpha_k, \quad x_{k2} = x_k + \delta_{k2} \alpha_k, \quad y_{k1} = y_{k2} = y_k + \varepsilon_k \alpha_k. \quad (2.63)$$

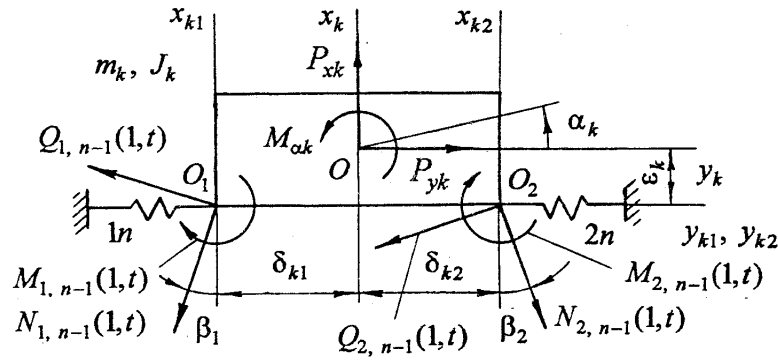


Рисунок 2.9 – Схема зусиль, що діють на кронблок бурової вишки.

Вважаючи, що у вузлах прикріплення до кронблока колони защемлені, отримуємо співвідношення для кутів повороту крайніх перерізів колон:

$$\varphi_{1,n-1}(1, t) = \varphi_{2,n-1}(1, t) = -\alpha_k. \quad (2.64)$$

Із рівностей (2.62) впливають такі співвідношення для координат поступальних переміщень центра маси C і координати обертального руху кронблока:

$$x_k = \frac{x_{k1} + x_{k2}}{2} + \frac{\delta_{k1} - \delta_{k2}}{2} \alpha_k, \quad y_k = y_{k1} - \varepsilon_k \alpha_k, \quad \alpha_k = \frac{x_{k2} - x_{k1}}{\delta_{k2} + \delta_{k1}}. \quad (2.65)$$

Координати точок кріплення колон до рами кронблока подаємо у вигляді

$$x_{k1} = u_{1,n-1}(1, t) \cos \beta_1 - w_{1,n-1}(1, t) \sin \beta_1,$$

$$y_{k1} = u_{1,n-1}(1, t) \sin \beta_1 + w_{1,n-1}(1, t) \cos \beta_1,$$

$$x_{k2} = u_{2,n-1}(1, t) \cos \beta_2 + w_{2,n-1}(1, t) \sin \beta_2,$$

$$y_{k2} = -u_{2,n-1}(1, t)\sin\beta_2 + w_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2. \quad (2.66)$$

З урахуванням (2.62), двох перших рівностей (2.63) та (2.64) координати руху кронблока записуємо як

$$\begin{aligned} x_k = & \frac{1}{2} [u_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 + u_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2 + w_{2,n-1}(1, t)\sin\beta_2 - \\ & - w_{1,n-1}(1, t)\sin\beta_1 + (\delta_{k1} - \delta_{k2})\varphi_{1,n-1}(1, t)], \\ y_k = & u_{1,n-1}(1, t)\sin\beta_1 + w_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 - \varepsilon_k \varphi_{1,n-1}(1, t), \quad \alpha_k = -\varphi_{1,n-1}(1, t). \end{aligned} \quad (2.67)$$

Використовуючи останнє співвідношення (2.62), рівність (2.63) і останній вираз (2.64) та приймаючи до уваги (2.65), доходимо залежностей

$$\begin{aligned} u_{1,n-1}(1, t)\sin\beta_1 + w_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 &= w_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2 - u_{2,n-1}(1, t)\sin\beta_2, \\ \varphi_{1,n-1}(1, t) &= \varphi_{2,n-1}(1, t), \\ \varphi_{1,n-1}(1, t) &= \frac{1}{\delta_{k1} - \delta_{k2}} [u_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2 + w_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2 - \\ & - u_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 + w_{1,n-1}(1, t)\sin\beta_1] \end{aligned} \quad (2.68)$$

На основі принципу Даламбера з урахуванням (2.66) записуємо рівняння руху кронблока

$$\begin{aligned} & \frac{m_k}{2} \left[\frac{\partial^2 u_{1,n-1}(1, t)}{\partial t^2} \cos\beta_1 + \frac{\partial^2 u_{2,n-1}(1, t)}{\partial t^2} \cos\beta_2 + \frac{\partial^2 w_{2,n-1}(1, t)}{\partial t^2} \sin\beta_2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 w_{1,n-1}(1, t)}{\partial t^2} \sin\beta_1 + (\delta_{k1} - \delta_{k2}) \frac{\partial^2 \varphi_{1,n-1}(1, t)}{\partial t^2} \right] + \\ & + N_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 + N_{2,n-1}(1, t)\cos\beta_2 - Q_{1,n-1}(1, t)\cos\beta_1 + Q_{2,n-1}(1, t)\sin\beta_2 + \\ & + u_{1,n-1}(1, t)(c_{x1n} \cos\beta_1 - c_{xy1n} \sin\beta_1) + w_{1,n-1}(1, t)(c_{xy1n} \cos\beta_1 - c_{y1n} \sin\beta_1) + \\ & + \varphi_{1,n-1}(1, t)(c_{y\alpha1n} \sin\beta_1 - c_{x\alpha1n} \cos\beta_1) + u_{2,n-1}(1, t)(c_{x2n} \cos\beta_2 + c_{xy2n} \sin\beta_2) + \\ & + w_{2,n-1}(1, t)(c_{xy2n} \cos\beta_2 + c_{y2n} \sin\beta_2) - \varphi_{2,n-1}(1, t)(c_{x\alpha2n} \cos\beta_2 + c_{y\alpha2n} \sin\beta_2) = P_{\text{ск}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_k \left[\frac{\partial^2 u_{1,n-1}(1,t)}{\partial t^2} \sin \beta_1 + \frac{\partial^2 w_{1,n-1}(1,t)}{\partial t^2} \cos \beta_1 - \varepsilon_k \frac{\partial^2 \varphi_{1,n-1}(1,t)}{\partial t^2} \right] + \\
& + Q_{1,n-1}(1,t) \cos \beta_1 - Q_{2,n-1}(1,t) \cos \beta_2 + N_{1,n-1}(1,t) \sin \beta_1 - N_{2,n-1}(1,t) \sin \beta_2 + \\
& + u_{1,n-1}(1,t) (c_{x1n} \sin \beta_1 - c_{xy1n} \cos \beta_1) + w_{1,n-1}(1,t) (c_{xy1n} \sin \beta_1 + c_{y1n} \cos \beta_1) - \\
& - \varphi_{1,n-1}(1,t) (c_{x\alpha 1n} \sin \beta_1 + c_{y\alpha 1n} \cos \beta_1) + u_{2,n-1}(1,t) (c_{xy2n} \cos \beta_2 - c_{x2n} \sin \beta_2) + \\
& + w_{2,n-1}(1,t) (c_{y2n} \cos \beta_2 - c_{xy2n} \sin \beta_2) + \varphi_{2,n-1}(1,t) (c_{x\alpha 2n} \sin \beta_2 - c_{y\alpha 2n} \cos \beta_2) = P_{yk}, \\
& - J_k \frac{\partial^2 \varphi_{1,n-1}(1,t)}{\partial t^2} + M_{1,n-1}(1,t) + M_{2,n-1}(1,t) + \\
& + Q_{1,n-1}(1,t) (\varepsilon_k \cos \beta_1 + \delta_{k1} \sin \beta_1) + Q_{2,n-1}(1,t) (\varepsilon_k \cos \beta_2 + \delta_{k2} \sin \beta_2) - \\
& - N_{1,n-1}(1,t) (\delta_{k1} \cos \beta_1 - \varepsilon_k \sin \beta_1) + N_{2,n-1}(1,t) (\delta_{k2} \cos \beta_2 - \varepsilon_k \sin \beta_2) + \\
& + [u_{1,n-1}(1,t) c_{x1n} + w_{1,n-1}(1,t) c_{xy1n} - \varphi_{1,n-1}(1,t) c_{x\alpha 1n}] \times (\varepsilon_k \cos \beta_1 + \delta_{k1} \sin \beta_1) - \\
& - [u_{1,n-1}(1,t) c_{xy1n} + w_{1,n-1}(1,t) c_{y1n} - \varphi_{1,n-1}(1,t) c_{y\alpha 1n}] \times (\delta_{k1} \cos \beta_1 - \varepsilon_k \sin \beta_1) + \\
& + [u_{2,n-1}(1,t) c_{x2n} + w_{2,n-1}(1,t) c_{xy2n} - \varphi_{2,n-1}(1,t) c_{x\alpha 2n}] \times (\varepsilon_k \cos \beta_2 + \delta_{k2} \sin \beta_2) + \\
& + [u_{2,n-1}(1,t) c_{xy2n} + w_{2,n-1}(1,t) c_{y2n} - \varphi_{2,n-1}(1,t) c_{y\alpha 2n}] \times (\delta_{k2} \cos \beta_2 - \varepsilon_k \sin \beta_2) + \\
& + u_{1,n-1}(1,t) c_{x\alpha 1n} + w_{1,n-1}(1,t) c_{y\alpha 1n} - \varphi_{1,n-1}(1,t) c_{\alpha 1n} + \\
& + u_{2,n-1}(1,t) c_{x\alpha 2n} + w_{2,n-1}(1,t) c_{y\alpha 2n} - \varphi_{2,n-1}(1,t) c_{\alpha 2n} = M_{\alpha k}. \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Сукупність рівностей (2.68), (2.69) складає крайові умови для верхнього кінця бурової вишки.

Крайові умови для нижнього крайнього перерізу першої колони споруди записуємо у вигляді

$$\begin{aligned}
& m_{11} \frac{\partial^2 u_{11}(0,t)}{\partial t^2} - m_{11} \varepsilon_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{11}(0,t)}{\partial t^2} - N_{11}(0,t) + \\
& + (c_{x11} - a_{111}) u_{11}(0,t) + (c_{xy11} - a_{121}) w_{11}(0,t) - (c_{x\alpha 11} - a_{131}) \varphi_{11}(0,t) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_{111}u_{21}(0,t) - b_{121}w_{21}(0,t) - b_{131}\varphi_{21}(0,t) = P_{x11}; \\
& m_{11} \frac{\partial^2 w_{11}(0,t)}{\partial t^2} - Q_{11}(0,t) + (c_{xy11} - a_{211})u_{11}(0,t) + \\
& + (c_{y11} - a_{221})w_{11}(0,t) - (c_{y\alpha 11} - a_{231})\varphi_{11}(0,t) - b_{211}u_{21}(0,t) - \\
& - b_{221}w_{21}(0,t) - b_{231}\varphi_{21}(0,t) = P_{y11}; \\
& J_{11} \frac{\partial^2 \varphi_{11}(0,t)}{\partial t^2} + M_{11}(0,t) - \varepsilon_{11}N_{11}(0,t) + \\
& + (\varepsilon_{11}c_{x11} - c_{x\alpha 11} + a_{311})u_{11}(0,t) + (\varepsilon_{11}c_{xy11} - c_{y\alpha 11} + a_{321})w_{11}(0,t) + \\
& + (c_{\alpha 11} - \varepsilon_{11}c_{x\alpha 11} + a_{331})\varphi_{11}(0,t) + b_{311}u_{21}(0,t) + \\
& + b_{321}w_{21}(0,t) + b_{331}\varphi_{21}(0,t) = -M_{\alpha 11}. \tag{2.70}
\end{aligned}$$

Аналогічно записуємо крайові умови для стиків сусідніх ділянок другої КОЛОНИ

$$\begin{aligned}
& m_{2i} \frac{\partial^2 u_{2i}(0,t)}{\partial t^2} - m_{2i}\varepsilon_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}(0,t)}{\partial t^2} - N_{2i}(0,t) + N_{2,i-1}(1,t) + \\
& + (c_{x2i} - d_{11i})u_{2i}(0,t) + (c_{xy2i} - d_{12i})w_{2i}(0,t) - (c_{x\alpha 2i} + d_{13i})\varphi_{2i}(0,t) - \\
& - (c_{x\alpha 2i} + d_{13i})\varphi_{2i}(0,t) - c_{11i}u_{1i}(0,t) - c_{12i}w_{1i}(0,t) - c_{13i}\varphi_{1i}(0,t) = P_{x2i}, \\
& m_{2i} \frac{\partial^2 w_{2i}(0,t)}{\partial t^2} - Q_{2i}(0,t) + Q_{2,i-1}(1,t) + (c_{xy2i} - d_{21i})u_{2i}(0,t) + \\
& + (c_{y2i} - d_{22i})w_{2i}(0,t) - (c_{y\alpha 2i} + d_{23i})\varphi_{2i}(0,t) - \\
& - c_{21i}u_{1i}(0,t) - c_{22i}w_{1i}(0,t) - c_{23i}\varphi_{1i}(0,t) = P_{y2i}, \\
& J_{2i} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}(0,t)}{\partial t^2} + M_{2i}(0,t) - M_{2,i-1}(1,t) - \varepsilon_{2i}N_{2i}(0,t) + \\
& + \varepsilon_{2i}N_{2,i-1}(1,t) + (\varepsilon_{2i}c_{x2i} - c_{x\alpha 2i} + d_{31i})u_{2i}(0,t) + \\
& + (\varepsilon_{2i}c_{xy2i} - c_{y\alpha 2i} + d_{32i})w_{2i}(0,t) + (c_{\alpha 2i} - \varepsilon_{2i}c_{x\alpha 2i} + d_{33i})\varphi_{2i}(0,t) +
\end{aligned}$$

$$+ c_{31i} u_{1i}(0, t) + c_{32i} w_{1i}(0, t) + c_{33i} \varphi_{1i}(0, t) = -M_{\alpha 2i},$$

$$u_{2i}(0, t) = u_{2, i-1}(1, t), \quad w_{2i}(0, t) = w_{2, i-1}(1, t), \quad \varphi_{2i}(0, t) = \varphi_{2, i-1}(1, t) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1). \quad (2.71)$$

Розглянемо алгоритм розрахунку вільних і вимушених гармонічних коливань щоглової А-подібної вишки. При дослідженні усталених вимушених коливань праві частини рівностей (2.60), (2.61), (2.69)–(2.71) задаємо у вигляді

$$P_{xji} = P_{0xji} \sin \omega t, \quad P_{yji} = P_{0yji} \sin \omega t,$$

$$M_{\alpha ji} = M_{0\alpha ji} \sin \omega t \quad (j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1);$$

$$P_{xk} = P_{0xk} \sin \omega t, \quad P_{yk} = P_{0yk} \sin \omega t, \quad M_{\alpha k} = M_{0\alpha k} \sin \omega t. \quad (2.72)$$

У випадку вільних коливань згадані навантаження рівні нулю.

Розглядаючи гармонічні коливання механічної системи, розв'язки рівнянь (2.52), (2.53) шукаємо у вигляді

$$u_{ji} = U_{ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t, \quad w_{ji} = W_{ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t \quad (j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.73)$$

де $U_{ji}(\xi_{ji})$, $W_{ji}(\xi_{ji})$ – амплітудні функції поступальних переміщень поперечних перерізів колон вишки.

Кути повороту поперечних перерізів стержнів і внутрішні сили подаємо як гармонічні функції

$$\varphi_{ji} = \Phi_{ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t, \quad N_{ji} = N_{0ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t,$$

$$M_{ji} = M_{0ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t, \quad Q_{ji} = Q_{0ji}(\xi_{ji}) \sin \omega t \quad (2.74)$$

$$(j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Тут $\Phi_{ji}(\xi_{ji})$, $N_{0ji}(\xi_{ji})$, $M_{0ji}(\xi_{ji})$, $Q_{0ji}(\xi_{ji})$ – амплітудні функції кутового переміщення перерізу і внутрішніх сил.

З урахуванням (2.72) рівняння руху (2.52), (2.53) легко звести до рівнянь амплітудних функцій, розв'язуючи які отримаємо матричні співвідношення

$$Z_{ji}(\xi_{ji}) = G_{ji}(\xi_{ji}) Z_{ji}(0) \quad (j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.75)$$

де

$$Z_{ji}(\xi_{ji}) = \begin{pmatrix} X_{ji}(\xi_{ji}) \\ Y_{ji}(\xi_{ji}) \end{pmatrix}, \quad G_{ji} = \begin{pmatrix} R_{ji}(\xi_{ji}) & 0 \\ 0 & S_{ji}(\xi_{ji}) \end{pmatrix},$$

причому X_{ji} та Y_{ji} – матриці-колонки,

$$X_{ji} = \text{col}(U_{ji}, U'_{ji}), \quad Y_{ji} = \text{col}(W_{ji}, W'_{ji}, W''_{ji}, W'''_{ji});$$

R_{ji}, S_{ji} – фундаментальні матриці.

Вирази (2.75), для ділянок першої і другої колон з однаковими порядковими номерами подаємо у вигляді єдиної матричної рівності

$$Z_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = G_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) Z_i(0, 0), \quad (2.76)$$

тут

$$Z_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = \begin{pmatrix} Z_{1i}(\xi_{1i}) \\ Z_{2i}(\xi_{2i}) \end{pmatrix}; \quad G_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = \begin{pmatrix} G_i(\xi_{1i}) & 0 \\ 0 & G_i(\xi_{2i}) \end{pmatrix}.$$

Запишемо співвідношення, якими виражається взаємозв'язок функцій $U_{ji}(\xi_{ji})$, $W_{ji}(\xi_{ji})$ та їхніх похідних з геометричними і силовими параметрами поперечних перерізів колон

$$F_{ji}(\xi_{ji}) = C_{1ji} Z_{ji}(\xi_{ji}), \quad Z_{ji}(\xi_{ji}) = C_{2ji} F_{ji}(\xi_{ji}) \quad (j=1, 2; \quad i=1, 2, \dots, n-1), \quad (2.77)$$

де $F_{ji}(\xi_{ji})$ – матриці-колонки,

$$F_{ji}(\xi_{ji}) = \text{col}(U_{ji}(\xi_{ji}), N_{0ji}(\xi_{ji}), W_{ji}(\xi_{ji}), \Phi_{ji}(\xi_{ji}), M_{0ji}(\xi_{ji}), Q_{0ji}(\xi_{ji}));$$

C_{1ji}, C_{2ji} – квадратні матриці сталих коефіцієнтів, причому $C_{2ji} = 1/C_{1ji}$.

Матричні рівності (2.77) перепишемо у вигляді

$$F_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = C_{1i} Z_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}), \quad Z_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = C_{2i} F_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}), \quad (2.78)$$

де

$$F_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = \text{col}(F_{1i}(\xi_{1i}), F_{2i}(\xi_{2i})),$$

$$C_{1i} = \text{diag}(C_{11i}, C_{12i}), \quad C_{2i} = C_{1i}^{-1} = \text{diag}(C_{21i}, C_{22i}).$$

Перетворюючи крайові умови (2.70), (2.71) з урахуванням (2.71)–(2.74), отримуємо матричні співвідношення

$$F_1(0, 0) = H_{F_1} F_0; \quad (2.79)$$

$$F_i(0, 0) = H_{F_i} F_{i-1}(1, 1) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1). \quad (2.80)$$

Тут F_0 – матриця-колонка,

$$F_0 = \text{col}(U_{11}(0), 0, W_{11}(0), \Phi_{11}(0), 0, 0, U_{21}(0), 0, W_{21}(0), \Phi_{21}(0), 0, 0);$$

H_{F_i} ($i = 1, 2, \dots, n-1$) – розширена 8×9 -матриця,

$$H_{F_i} = \begin{pmatrix} H_{1i} & K_{bi} & P_{1i} \\ K_{ci} & H_{2i} & P_{2i} \end{pmatrix},$$

де

$$H_{ji} \quad (j = 1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{xji} & 1 & c_{xyji}^* & -\Omega_{\varepsilon ji}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \Omega_{\varepsilon ji}^{**} & 0 & c_{y\alpha ji}^{**} & -\Omega_{\alpha ji} & 1 & 0 \\ c_{xyji}^* & 0 & \Omega_{yji} & -c_{y\alpha ji}^* & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_{hj} \quad (h = b, c) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{11i} & 0 & -h_{12i} & -h_{13i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -h_{31i}^* & 0 & -h_{32i}^* & -h_{33i}^* & 0 & 0 \\ -h_{21i} & 0 & -h_{22i} & -h_{23i} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_{ji} = \text{col}(0, -P_{0xji}, 0, 0, -M_{0\alpha ji} - \varepsilon_{ji} P_{0xji}, -P_{0yji}),$$

причому

$$\begin{aligned}
\Omega_{x1i} &= c_{x1i} - a_{11i} - m_{1i} \omega^2; & \Omega_{x2i} &= c_{x2i} - d_{11i} - m_{2i} \omega^2; \\
\Omega_{y1i} &= c_{y1i} - a_{22i} - m_{1i} \omega^2; & \Omega_{y2i} &= c_{y2i} - d_{22i} - m_{2i} \omega^2; \\
\Omega_{\alpha 1i} &= c_{\alpha 1i} + a_{33i} + \varepsilon_{1i} a_{13i} - J_{1i} \omega^2 - m_{1i} \varepsilon_{1i} \omega^2; \\
\Omega_{\alpha 2i} &= c_{\alpha 2i} + d_{33i} + \varepsilon_{2i} d_{13i} - J_{2i} \omega^2 - m_{2i} \varepsilon_{2i} \omega^2; \\
\Omega_{\varepsilon 1i} &= c_{x\alpha 1i} - m_{1i} \varepsilon_{1i} \omega^2; & \Omega_{\varepsilon 2i} &= c_{x\alpha 2i} - m_{2i} \varepsilon_{2i} \omega^2; \\
\Omega_{\varepsilon 1i}^* &= \Omega_{\varepsilon 1i} + a_{13i}; & \Omega_{\varepsilon 1i}^{**} &= \Omega_{\varepsilon 1i} - a_{31i} - \varepsilon_{1i} a_{11i}; \\
\Omega_{\varepsilon 2i}^* &= \Omega_{\varepsilon 2i} + d_{13i}; & \Omega_{\varepsilon 2i}^{**} &= \Omega_{\varepsilon 2i} - d_{31i} - \varepsilon_{2i} d_{11i}; \\
c_{xy1i}^* &= c_{xy1i} - a_{12i}; & c_{y\alpha 1i}^* &= c_{y\alpha 1i} + a_{23i}; & c_{xy2i}^* &= c_{xy2i} - d_{12i}; & c_{y\alpha 2i}^* &= c_{y\alpha 2i} + d_{23i}; \\
c_{y\alpha 1i}^{**} &= c_{y\alpha 1i} - a_{32i} - \varepsilon_{1i} a_{12i}; & c_{y\alpha 2i}^{**} &= c_{y\alpha 2i} - d_{32i} - \varepsilon_{2i} d_{12i}; \\
b_{31i}^* &= b_{31i} + \varepsilon_{1i} b_{11i}; & b_{32i}^* &= b_{32i} + \varepsilon_{1i} b_{12i}; & b_{33i}^* &= b_{33i} + \varepsilon_{1i} b_{13i}; \\
c_{31i}^* &= c_{31i} + \varepsilon_{2i} c_{11i}; & c_{32i}^* &= c_{32i} + \varepsilon_{2i} c_{12i}; & c_{33i}^* &= c_{33i} + \varepsilon_{2i} c_{13i}.
\end{aligned}$$

Крайові умови для верхнього кінця споруди (2.67), (2.68) з урахуванням (2.71)–(2.73) перетворимо до вигляду

$$F_n = H_{Fn} F_{n-1} (1, 1). \quad (2.81)$$

Тут F_n – матриця-колонка, що має шість нульових компонент; H_{Fn} – прямокутна розширена 6×12 -матриця,

$$H_{Fn} = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & 0 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & P_k \end{pmatrix},$$

де

$$L_1 = \begin{pmatrix} \sin \beta_1 & 0 & \cos \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos \beta_1 & 0 & -\sin \beta_1 & \delta_{k1} + \delta_{k2} & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} \sin \beta_2 & 0 & -\cos \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\cos \beta_2 & 0 & -\sin \beta_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \Omega_{x1} & \cos \beta_1 & \Omega_{y1} & \Omega_{\alpha 1} & 0 & -\sin \beta_1 \\ \Psi_{x1} & \sin \beta_1 & \Psi_{y1} & \Psi_{\alpha 1} & 0 & \cos \beta_1 \\ \Delta_{x1} & -\Delta_3 & \Delta_{y1} & \Delta_{\alpha 1} & 1 & \Delta_1 \end{pmatrix};$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} \Omega_{x2} & \cos \beta_2 & \Omega_{y2} & \Omega_{\alpha 2} & 0 & \sin \beta_2 \\ \Psi_{x2} & -\sin \beta_2 & \Omega_{y2} & \Psi_{\alpha 2} & 0 & -\cos \beta_2 \\ \Delta_{x2} & \Delta_4 & \Delta_{y2} & \Delta_{\alpha 2} & 1 & \Delta_2 \end{pmatrix};$$

$$P_k = \text{col}(-P_{0xk}, -P_{0yk}, -M_{0\alpha k}),$$

при цьому

$$\Omega_{x1} = c_{x1n} \cos \beta_1 - c_{xy1n} \sin \beta_1 - \frac{m_k}{2} \omega^2 \cos \beta_1;$$

$$\Omega_{y1} = c_{xy1n} \cos \beta_1 - c_{y1n} \sin \beta_1 - \frac{m_k}{2} \omega^2 \sin \beta_1;$$

$$\Omega_{\alpha 1} = c_{y\alpha 1n} \sin \beta_1 - c_{x\alpha 1n} \cos \beta_1 - \delta_{k1} \omega^2;$$

$$\Omega_{x2} = c_{x2n} \cos \beta_2 + c_{xy2n} \sin \beta_2 - \frac{m_k}{2} \omega^2 \cos \beta_2;$$

$$\Omega_{y2} = c_{xy2n} \cos \beta_2 + c_{y2n} \sin \beta_2 - \frac{m_k}{2} \omega^2 \sin \beta_2;$$

$$\Omega_{\alpha 2} = -c_{x\alpha 2n} \cos \beta_2 - c_{y\alpha 2n} \sin \beta_2 + \delta_{k2} \omega^2;$$

$$\Psi_{x1} = c_{x1n} \sin \beta_1 + c_{xy1n} \cos \beta_1 - m_k \omega^2 \sin \beta_1;$$

$$\Psi_{y1} = c_{xy1n} \sin \beta_1 + c_{y1n} \cos \beta_1 - m_k \omega^2 \cos \beta_1;$$

$$\Psi_{\alpha 1} = c_{x\alpha 1n} \sin \beta_1 + c_{y\alpha 1n} \cos \beta_1 + m_k \varepsilon_k \omega^2;$$

$$\Psi_{x2} = c_{xy2n} \cos \beta_2 - c_{x2n} \sin \beta_2; \quad \Psi_{y2} = c_{y2n} \cos \beta_2 - c_{xy2n} \sin \beta_2;$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\alpha 2} &= -c_{x\alpha 2n} \cos \beta_2 - c_{y\alpha 2n} \sin \beta_2; \\
\Delta_1 &= \delta_{k1} \sin \beta_1 + \varepsilon_k \cos \beta_1; \quad \Delta_2 = \delta_{k2} \sin \beta_2 + \varepsilon_k \cos \beta_2; \\
\Delta_3 &= \delta_{k1} \cos \beta_1 - \varepsilon_k \sin \beta_1; \quad \Delta_4 = \delta_{k2} \cos \beta_2 - \varepsilon_k \sin \beta_2; \\
\Delta_{x1} &= c_{x1n} \Delta_1 - c_{xy1n} \Delta_3 + c_{x\alpha 1n}; \quad \Delta_{y1} = c_{xy1n} \Delta_1 - c_{y1n} \Delta_3 + c_{y\alpha 1n}; \\
\Delta_{\alpha 1} &= -c_{x\alpha 1n} \Delta_1 + c_{y\alpha 1n} \Delta_3 - c_{\alpha 1n} + J_k \omega^2; \\
\Delta_{x2} &= c_{x2n} \Delta_2 + c_{xy2n} \Delta_4 + c_{x\alpha 2n}; \quad \Delta_{y2} = c_{xy2n} \Delta_2 + c_{y2n} \Delta_4 + c_{y\alpha 2n}; \\
\Delta_{\alpha 2} &= -c_{x\alpha 2n} \Delta_2 - c_{y\alpha 2n} \Delta_4 - c_{\alpha 2n}.
\end{aligned}$$

На основі залежностей (2.76), (2.77)–(2.80) запишемо матричну рівність

$$F_n = H_{Fn} \left\{ \prod_{j=n-1}^1 [C_{1j} G_j(1,1) C_{2j} H_{Fj}] \right\} F_0. \quad (2.82)$$

За допомогою матричного співвідношення (2.82) обчислюємо реакції елементів матриці-колонки F_n на одиничні значення ненульових компонент матриці-колонки $F_0 - U_{11}(0), W_{11}(0), \Phi_{11}(0), U_{21}(0), W_{21}(0), \Phi_{21}(0)$ та одиничні значення навантажень $P_{0xji}, P_{0yji}, M_{0\alpha ji}$ ($j = 1, 2; i = 1, 2, \dots, n-1$), а також $P_{0xk}, P_{0yk}, M_{0\alpha k}$ і позначаємо відповідно як $f_{mu1}, f_{mw1}, f_{m\phi 1}, f_{mu2}, f_{mw2}, f_{m\phi 2}, f_{mxji}, f_{myji}, f_{majj}, f_{mxk}, f_{myk}, f_{mak}$, де $m = 1, 2, \dots, 6$ – номер елемента матриці-колонки F_n . Відтак, складаємо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
&f_{mu1} U_{11}(0) + f_{mw1} W_{11}(0) + f_{m\phi 1} \Phi_{11}(0) + f_{mu2} U_{21}(0) + f_{mw2} W_{21}(0) + f_{m\phi 2} \Phi_{21}(0) = \\
&= - \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^{n-1} (f_{mxji} P_{0xji} + f_{myji} P_{0yji} + f_{majj} M_{0\alpha ji}) - f_{mxk} P_{0xk} - f_{myk} P_{0yk} - f_{mak} M_{0\alpha k} \quad (2.83) \\
&(m = 1, 2, \dots, 6).
\end{aligned}$$

За значеннями коренів системи рівнянь (2.83) обчислюємо матрицю-стовпець F_0 і відшукуємо початкові параметри ділянок колон вишки. Для цього використовуємо наступні залежності, що впливають із (2.76), (2.77)–(2.80):

$$F_1(0,0) = H_{F1} F_0;$$

$$F_i(0, 0) = \left\{ \prod_{j=i}^2 [H_j C_{1,j-1} G_{j-1}(1, 1) C_{2,j-1}] \right\} H_{F1} F_0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1). \quad (2.84)$$

За допомогою залежностей (2.76), (2.78) знаходимо амплітудні функції переміщень і внутрішніх сил у формі

$$F_i(\xi_1, \xi_2) = C_{1i} G_i(\xi_1, \xi_2) C_{2i} F_i(0, 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (2.85)$$

У випадку вільних коливань система рівнянь (2.83) стає однорідною у зв'язку з рівністю нулю навантажень, що діють на механічну систему. Прирівнюючи до нуля визначник цієї системи рівнянь, знаходимо власні частоти споруди. Обчисливши з точністю до сталого множника матрицю-стовпець F_0 , за формулами (2.84), (2.85) розраховуємо форми вільних коливань.

2.4. Висновки

У дисертаційній роботі розроблено математичну модель напружено-деформованого стану і алгоритм розрахунку на стійкість багатопрогонової висотної конструкції з урахуванням східчастої зміни згинної жорсткості і осьового навантаження по висоті, а також податливості опор. Показано, що раціональне застосування додаткових зв'язків з основою є ефективним способом збільшення критичного навантаження та підвищення ефективності експлуатації щогли підйимального пристрою. За рахунок застосування додаткових опор можна досягти збільшення критичного навантаження щоголової конструкції більше, ніж на порядок. Податливість з'єднань секцій споруди може знижувати значення критичної сили на 12–15%.

Побудовано математичну модель напружено-деформованого стану багатопрогонової висотної конструкції на стійкість з урахуванням неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів та опрацьовано узагальнений алгоритм розрахунку споруди на стійкість і коливання шляхом чисельного розв'язання рівнянь напружено-деформованого стану і систематизації обчислювального процесу за

допомогою методу початкових параметрів. З'ясовано, що за рахунок урахування неперервної зміни параметрів висотної споруди можна досягти підвищення точності визначення критичної сили на 17–22%.

Розроблено математичну модель напружено-деформованого стану для аналізу статичної стійкості і вільних коливань складеної багатопрогової висотної конструкції пілонного типу, та досліджено особливості втрати стійкості А-подібної бурової вежі. Підтверджена необхідність детального врахування структури і жорсткісних параметрів пілонної конструкції під час визначення критичних навантажень і проведення модального аналізу.

Р О З Д І Л 3

СТІЙКІСТЬ БАГАТОПРОГОНОВИХ КОНСТРУКЦІЙ МАГІСТРАЛЬНИХ ТРУБОПРОВОДІВ ПІД ДІЄЮ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

3.1. Визначення температурних зусиль у поперечних перерізах надземної ділянки трубопроводу з урахуванням податливості підземних ділянок

Температурні перепади надземних ділянок магістральних трубопроводів обумовлюють виникнення значних поздовжніх зусиль у трубах, що може призводити до втрати їх статичної стійкості. Визначення температурного зусилля у трубі зводиться до розв'язання статично невизначної задачі аналізу напружено-деформованого стану механічної системи. При цьому необхідно враховувати взаємодію надземної ділянки трубопроводу з прилеглими до неї частинами підземних ділянок, а також взаємодію підземних ділянок з ґрунтом.

Побудуємо математичну модель для визначення температурного зусилля у прямолінійній надземній ділянці магістрального трубопроводу. Для цього спершу розглянемо прилеглу до надземної ділянки частину підземної ділянки трубопроводу (рис. 3.1, *a*), навантажену з боку надземної ділянки силою P . Переміщення деякого поперечного перерізу труби у напрямі координати x позначимо як u ; поздовжні сили, що діють на нескінченно малий елемент довжиною dx , – як N та $N+dN$; силу, що діє на цей елемент з боку ґрунту – як dT . Рівняння рівноваги нескінченно малого елемента труби записуємо у вигляді

$$-N - dT + N + dN = 0,$$

звідки одержуємо

$$dN - dT = 0. \quad (3.1)$$

Відносну поздовжню деформацію матеріалу труби ε_x з урахуванням двовісного напруженого стану, обумовленого дією осьових навантажень, внутрішнього тиску і перепадом температури, подаємо у вигляді

$$\varepsilon_x = \frac{N(x)}{EA} + \alpha \cdot \Delta t - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E}, \quad (3.2)$$

де E і μ – модуль пружності першого роду і коефіцієнт Пуассона матеріалу труби; α – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу; A – площа поперечного перерізу труби; Δt – температурний перепад, додатний у випадку нагрівання; $\sigma_{\text{кц}}$ – кільцеве напруження, обумовлене дією внутрішнього тиску.

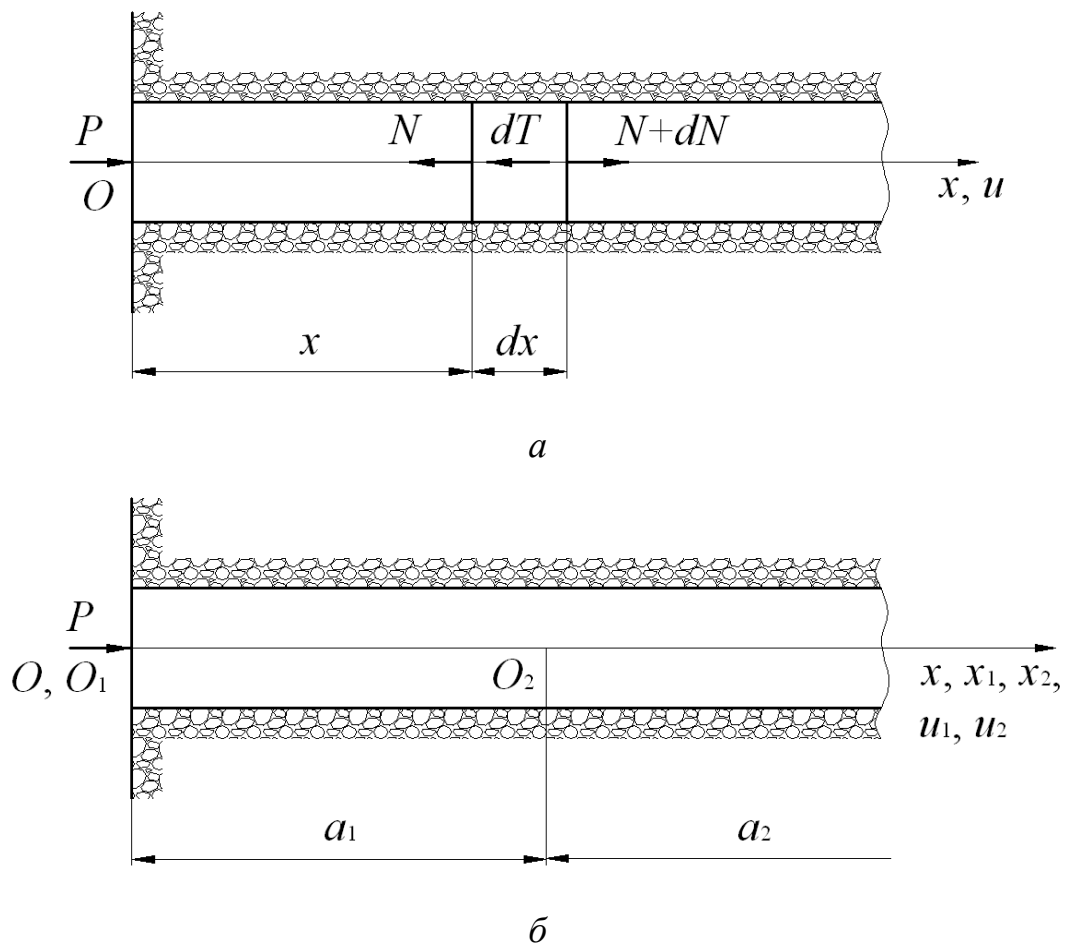


Рисунок 3.1 – Розрахункові схеми підземної ділянки магістрального трубопроводу, навантаженої в осьовому напрямі з боку надземної ділянки: a – випадок пружної взаємодії труби з ґрунтом; b – випадок, коли частина труби взаємодіє з ґрунтом з проковзуванням, а решта – пружно.

Для розв’язання задачі застосуємо лінійну залежність між відносною лінійною деформацією ε_x і переміщенням поперечного перерізу труби $u(x)$,

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (3.3)$$

З урахуванням (3.2), (3.3) одержуємо вираз поздовжньої сили

$$N(x) = EA \frac{du}{dx} - EA\alpha \cdot \Delta t + A\mu\sigma_{\text{кц}}. \quad (3.4)$$

Диференціально малий приріст поздовжньої сили, згідно з залежністю (3.4), буде

$$dN = EA \frac{d^2u}{dx^2} dx. \quad (3.5)$$

Осьове дотичне напруження, що виникає на поверхні труби внаслідок взаємодії труби з ґрунтом, подаємо як функцію переміщення поперечного перерізу,

$$\begin{aligned} \tau &= k_{\tau} u, & \text{якщо} & \quad |u| \leq u_{\text{гр}}; \\ \tau &= \tau_{\text{гр}}, & \text{якщо} & \quad |u| > u_{\text{гр}}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

де k_{τ} – коефіцієнт пропорційності; $\tau_{\text{гр}}$ – граничне дотичне напруження, що відповідає граничному переміщенню $u_{\text{гр}}$.

Згідно з (3.6), погонне зусилля взаємодії труби з ґрунтом буде

$$\begin{aligned} q &= k_q u, & \text{якщо} & \quad |u| \leq u_{\text{гр}}; \\ q &= q_{\text{гр}}, & \text{якщо} & \quad |u| > u_{\text{гр}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Тут k_q – коефіцієнт пропорційності між погонним зусиллям і переміщенням поперечного перерізу; $q_{\text{гр}}$ – граничне погонне зусилля.

Значення k_q і $q_{\text{гр}}$ знаходимо як

$$k_q = \pi D k_{\tau}; \quad q_{\text{гр}} = \pi D \tau_{\text{гр}}, \quad (3.8)$$

де D – зовнішній діаметр труби.

Елементарну дотичну силу, що діє на зовнішню поверхню нескінченно малого елемента труби, знаходимо у вигляді

$$dT = q dx. \quad (3.9)$$

На основі співвідношень (3.1), (3.5), (3.7), (3.9) одержуємо диференціальні рівняння напружено-деформованого стану труби за відсутності та за наявності її проковзування відносно ґрунту. Якщо виконується умова $u \leq u_{\text{гр}}$ і проковзування не виникає, то згадане рівняння має вигляд

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - k^2 u = 0, \quad \text{де} \quad k^2 = \frac{k_q}{EA}. \quad (3.10)$$

За наявності проковзування (коли $u > u_{\text{гр}}$) диференціальне рівняння напружено-деформованого стану труби набуває вигляду

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - s = 0, \quad \text{де} \quad s = \frac{q_{\text{гр}}}{EA}. \quad (3.11)$$

Якщо підземна ділянка трубопроводу деформується без проковзування, напружено-деформований стан труби описується диференціальним рівнянням (3.10), розв'язки якого повинні задовольняти крайові умови

$$N(0) = -P; \quad (3.12)$$

$$N(x)|_{x=\infty} = -EA\alpha\Delta t_{\text{п}} + A\mu\sigma_{\text{кц}}. \quad (3.13)$$

тут $\Delta t_{\text{п}}$ – перепад температури підземної ділянки труби.

Підставляючи вираз поздовжньої сили (3.4) до рівностей (3.12), (3.13), перетворюємо крайові умови до вигляду

$$EA \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} - EA\alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + A\mu\sigma_{\text{кц}} = -P; \quad (3.14)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=\infty} = 0. \quad (3.15)$$

Розв'язок диференціального рівняння (3.10) записуємо у вигляді

$$u = B_1 e^{kx} + B_2 e^{-kx}, \quad (3.16)$$

де e – основа натурального логарифму; B_1, B_2 – сталі коефіцієнти.

З урахуванням (3.16) похідну від переміщення поперечного перерізу труби по координаті x подаємо як

$$\frac{du}{dx} = B_1 k e^{kx} - B_2 k e^{-kx}. \quad (3.17)$$

Із сумісного розгляду (3.14), (3.15), (3.17) знаходимо коефіцієнти B_1 і B_2 :

$$B_1 = 0; \quad B_2 = \frac{1}{k} \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right). \quad (3.18)$$

З урахуванням залежностей (3.16)-(3.18) одержуємо функцію, що описує переміщення поперечних перерізів підземної ділянки, та її похідну,

$$u = \frac{1}{k} \left(\frac{P}{EA} - \alpha \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) \cdot e^{-kx}; \quad (3.19)$$

$$\frac{du}{dx} = - \left(\frac{P}{EA} - \alpha \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) \cdot e^{-kx}. \quad (3.20)$$

Підставляючи вираз (3.20) до залежності (3.4), знаходимо поздовжню силу у поперечних перерізах труби на підземній ділянці,

$$N = - \left(P - EA \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + A \mu \sigma_{\text{кц}} \right) \cdot e^{-kx} - EA \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + A \mu \sigma_{\text{кц}}. \quad (3.21)$$

Для визначення поздовжньої сили, що виникає у поперечному перерізі надземної ділянки трубопроводу внаслідок нагрівання, розглянемо трубопровід як трипрогонову конструкцію. Пружна механічна система включає надземну і зв'язані з нею симетрично розташовані підземні ділянки. Довжину надземної ділянки позначаємо як l_2 , а довжини підземних – як l_1 та l_3 .

Абсолютні деформації ділянок трубопроводу Δl_i ($i = 1, 2, 3$) повинні задовольняти умову

$$\sum_{i=1}^3 \Delta l_i = 0. \quad (3.22)$$

Абсолютну деформацію надземної ділянки знаходимо як

$$\Delta l_2 = \varepsilon_{2x} \cdot l_2, \quad (3.23)$$

де ε_{2x} – відносна деформація матеріалу труби в напрямі осі x , яка, згідно з (3.2), становить

$$\varepsilon_{2x} = \frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\text{н}} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E}, \quad (3.24)$$

тут N_2 і $\Delta t_{\text{н}}$ – поздовжня сила у поперечному перерізі і перепад температури матеріалу труби надземної ділянки.

Підставляючи (3.24) до (3.23), одержуємо

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} + \alpha l_2 \Delta t_{\text{н}} - \frac{\mu l_2 \sigma_{\text{кц}}}{E}. \quad (3.25)$$

Абсолютні деформації підземних ділянок магістрального трубопроводу знаходимо за формулою (3.19) як, взяте з протилежними знаком, переміщення поперечного перерізу труби з координатою $x = 0$ за умови, що осьове навантаження підземної ділянки $P = -N_2$,

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = -\frac{1}{k} \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right). \quad (3.26)$$

Після підстановки виразів (3.25), (3.26) до співвідношення (3.22) і розв'язання одержаного рівняння відносно поздовжньої сили у надземній ділянці N_2 , знайдемо

$$N_2 = A \mu \delta_{\text{кц}} - \frac{EA \alpha k}{kl_2 + 2} \left(l_2 \cdot \Delta t_{\text{н}} + \frac{2}{k} \Delta t_{\text{п}} \right). \quad (3.27)$$

Беручи до уваги, що осьове навантаження підземної ділянки $P = -N_2$, залежності (3.19) і (3.21) остаточно подаємо як

$$u = \frac{1}{k} \left(-\frac{N_2}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) e^{-kx}; \quad (3.28)$$

$$N = - \left(-N_2 + EA \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} - A \mu \sigma_{\text{кц}} \right) e^{-kx} - EA \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + A \mu \sigma_{\text{кц}}. \quad (3.29)$$

Встановимо межі застосування формул (3.28), (3.29). Як впливає з першої рівності (3.6), за відсутності проковзування труби відносно ґрунту має місце співвідношення

$$\tau_{\text{гр}} = k_{\tau} \cdot u_{\text{гр}}, \quad (3.30)$$

звідки

$$u_{\text{гр}} = \frac{\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}}. \quad (3.31)$$

Отже, залежність (3.28) є правомірною, якщо модуль найбільшого за абсолютною величиною переміщення не перевищує граничного значення, тобто, якщо виконується співвідношення

$$|u(0)| \leq u_{\text{гр}}. \quad (3.32)$$

З урахуванням (3.31), (3.32) одержуємо

$$|u(0)| \leq \frac{\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}}. \quad (3.33)$$

Із сумісного аналізу залежностей (3.28), (3.33) одержуємо

$$\begin{aligned} N_2 &\geq -EA\alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + A\mu\sigma_{\text{кц}} - \frac{EAk\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}}; \\ N_2 &\leq -EA\alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + A\mu\sigma_{\text{кц}} + \frac{EAk\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Якщо виконуються нерівності (3.33), (3.34), то це означає, що проковзування труби у ґрунті відсутнє і для визначення переміщень поперечних перерізів та поздовжніх зусиль можна застосовувати залежності (3.28) і (3.29).

Якщо ж умови (3.33), (3.34) не виконуються, то підземні ділянки, внаслідок нагрівання надземної, деформуються з проковзуванням. Розглянемо цей випадок деформування трубопроводу детальніше.

Оскільки підземна ділянка магістрального трубопроводу навантажена в осьовому напрямі у місці її стику з надземною ділянкою, ймовірно виникнення зони проковзування труби відносно ґрунту слід очікувати в області її виходу на поверхню. Для виявлення цієї зони і визначення довжини відрізка труби, zdeформованого з проковзуванням, поділимо підземну ділянку на дві частини за характером взаємодії труби з ґрунтом (рис. 1, б). Припустимо, що лівий відрізок

довжиною a_1 деформується з проковзуванням, а правий довжиною a_2 – без проковзування. Для опису напружено-деформованого стану лівої частини труби використовуємо поздовжню координатну вісь O_1x_1 , а правої частини – координатну вісь O_2x_2 . Переміщення поперечних перерізів відповідних частин позначаємо як $u_1(x_1)$ та $u_2(x_2)$.

Диференціальні рівняння напружено-деформованого стану частин підземної ділянки трубопроводу записуємо у вигляді

$$\frac{d^2 u_1}{dx_1^2} - s = 0, \quad (3.35)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx_2^2} - k^2 u_2 = 0. \quad (3.36)$$

Розв'язки системи диференціальних рівнянь (3.35), (3.36) повинні задовольняти крайові умови:

– на лівому кінці відрізка, що взаємодіє з ґрунтом з проковзуванням

$$N_1(0) = -P; \quad (3.37)$$

– у стику частин підземної ділянки труби

$$u_2(0) = u_1(a_1), \quad N_2(0) = N_1(a_1); \quad (3.38)$$

– у безмежно віддаленому перерізі правого відрізка, що пружно взаємодіє з ґрунтом

$$N_2(x_2) \Big|_{x_2=\infty} = -EA\alpha \cdot \Delta t_{\Pi} + A\mu\sigma_{\text{кц}}. \quad (3.39)$$

З урахуванням залежності (3.4) крайові умови (3.37)–(3.39) перетворюємо до вигляду

$$EA \frac{du_1}{dx_1} \Big|_{x_1=0} - EA\alpha \cdot \Delta t_{\Pi} + A\mu\sigma_{\text{кц}} = -P; \quad (3.40)$$

$$u_2(0) = u_1(a_1); \quad \frac{du_2}{dx_2} \Big|_{x_2=0} = \frac{du_1}{dx_1} \Big|_{x_1=a_1}; \quad (3.41)$$

$$\left. \frac{du_2}{dx_2} \right|_{x_2=\infty} = 0. \quad (3.42)$$

Першу похідну функції $u_1(x_1)$ і саму функцію одержуємо, інтегруючи диференціальне рівняння (3.35),

$$\frac{du_1}{dx_1} = sx_1 + C_1; \quad (3.43)$$

$$u_1 = \frac{sx_1^2}{2} + C_1x_1 + C_2, \quad (3.44)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування.

Розв'язок диференціального рівняння (3.36) має вигляд

$$u_2 = C_3e^{kx_2} - C_4e^{-kx_2}, \quad (3.45)$$

а його перша похідна

$$\frac{du_2}{dx_2} = C_3ke^{kx_2} - C_4ke^{-kx_2}, \quad (3.46)$$

де C_3 і C_4 – сталі коефіцієнти.

Після підстановки виразів (3.43)–(3.46) до крайових умов (3.40)–(3.42) і розв'язання системи алгебраїчних рівнянь одержуємо

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{P}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\Pi} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E}; \\ C_2 &= \left(a + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\Pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{k} \right) sa; \\ C_3 &= 0; \\ C_4 &= \frac{1}{k} \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\Pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} - sa \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

З урахуванням співвідношень (3.47) остаточно одержуємо функції (3.44) і (3.45), що характеризують переміщення поперечних перерізів підземної ділянки труби,

$$u_1(x_1) = \frac{sx_1^2}{2} - \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) x_1 + \left(a + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) - \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{k} \right) sa; \quad (3.48)$$

$$u_2(x_2) = \frac{1}{k} \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} - sa \right) e^{-kx_2}. \quad (3.49)$$

На основі рівностей (3.4), (3.43), (3.46), (3.47) записуємо вирази поздовжніх сил у поперечних перерізах труби

$$N_1(x_1) = -P + EA s x_1; \quad (3.50)$$

$$N_2(x_2) = -EA \left(\frac{P}{EA} - \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} - sa \right) e^{-kx_2} - EA \alpha \cdot \Delta t_{\pi} + A \mu \sigma_{\text{кц}}. \quad (3.27)$$

Як і у попередньому випадку, трубопровід розглядаємо як трипрогонову конструкцію, рівняння деформацій якої зберігає вигляд (3.22). Застосовуючи спільну для обох відрізків підземної ділянки магістрального трубопроводу поздовжню координату x і беручи до уваги, що навантаження цієї ділянки $P = -N_2$, запишемо переміщення поперечних перерізів і поздовжні сили, відповідно до (3.48)–(3.51), у вигляді

$$u(x) = \frac{sx^2}{2} + \left(\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\pi} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) x - \left(a_1 + \frac{1}{k} \right) \cdot \left(\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\pi} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) - \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{k} \right) sa_1, \quad \text{якщо} \quad 0 \leq x \leq a_1; \quad (3.52)$$

$$u(x) = -\frac{1}{k} \left(\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\pi} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} + sa_1 \right) e^{-k(x-a_1)}, \quad \text{якщо} \quad x > a_1, \quad (3.53)$$

$$N(x) = N_2 + EA s x, \quad \text{якщо} \quad 0 \leq x \leq a_1; \quad (3.54)$$

$$N(x) = EA \left(\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} + s a_1 \right) e^{-k(x-a_1)} - EA \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} + A \mu \sigma_{\text{кц}},$$

якщо $x > a_1$. (3.55)

Абсолютна деформація надземної ділянки трубопроводу зберігає вигляд (3.25); абсолютні деформації підземних ділянок, згідно з (3.52), будуть:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = \left(a_1 + \frac{1}{k} \right) \cdot \left(\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) + \left(\frac{a_1}{2} + \frac{1}{k} \right) s a_1. \quad (3.56)$$

Підставляючи до рівняння (3.22) вирази (3.25) і (3.56), одержуємо

$$\left(\frac{N_2}{EA} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} \right) \left(l_2 + 2a_1 + \frac{2}{k} \right) + \alpha l_2 \cdot \Delta t_{\text{п}} + \alpha \left(2a_1 + \frac{2}{k} \right) \cdot \Delta t_{\text{п}} + \left(a_1 + \frac{2}{k} \right) s a_1 = 0. \quad (3.57)$$

Алгебричне рівняння (3.57) містить дві невідомі величини: поздовжню силу в надземній ділянці N_2 і довжину відрізка підземної ділянки a_1 , який деформується з проковзуванням відносно ґрунту. Для знаходження цих величин доповнюємо рівняння (3.57) рівнянням граничної рівноваги (3.30) елементарного відрізка підземної ділянки з координатою $x = a_1$:

$$u(a_1) = \frac{\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}}. \quad (3.58)$$

Підставляючи до рівняння (3.58) вираз переміщення (3.53) за $x = a_1$, одержуємо

$$\frac{N_2}{EA} + \alpha \cdot \Delta t_{\text{п}} - \frac{\mu \sigma_{\text{кц}}}{E} + s a_1 + \frac{k \tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}} = 0. \quad (3.59)$$

Виключаючи із системи алгебричних рівнянь (3.57), (3.59) невідому N_2 , одержуємо квадратне рівняння відносно довжини відрізка a_1 ,

$$a_1^2 + b a_1 + c = 0, \quad (3.60)$$

де

$$b = l_2 + \frac{2k\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}s}; \quad c = \frac{\tau_{\text{гр}}}{k_{\tau}s}(kl_2 + 2) - \frac{\alpha l_2}{s}(\Delta t_{\text{н}} - \Delta t_{\text{п}}). \quad (3.61)$$

Розв'язавши рівняння (3.60) і відкинувши корінь, що не має практичного сенсу, одержимо:

$$a_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}, \quad (3.62)$$

Після визначення довжини відрізка труби a_1 за формулою (3.62) знаходимо поздовжнє зусилля у поперечному перерізі надземної ділянки N_2 з рівняння (3.57) або (3.59). Наприклад, з рівняння (3.57) одержуємо

$$N_2 = A\mu\sigma_{\text{кц}} - \frac{EAk}{l_2k + 2ak + 2} \left\{ \alpha \left[l_2\Delta t_{\text{н}} + \left(2a + \frac{2}{k}\right)\Delta t_{\text{п}} \right] + \left(a + \frac{2}{k}\right)sa \right\}. \quad (3.63)$$

Отже, загальний алгоритм визначення осевих переміщень поперечних перерізів надземної і прилеглих до неї підземних ділянок магістрального трубопроводу, а також поздовжніх зусиль у поперечних перерізах зазначених ділянок такий:

1) припускаючи, що проковзування труби відносно ґрунту відсутнє, обчислюємо поздовжню силу у поперечному перерізі надземної ділянки за формулою (3.27);

2) якщо умови відсутності проковзування труби у ґрунті (3.34) виконуються, то:

- знайдене значення поздовжньої сили вважаємо остаточною,
- переміщення і внутрішні зусилля на підземних ділянках визначаємо за формулами (3.28), (3.29);

3) якщо ж умови (3.34) не виконуються, то:

- за формулою (3.69) визначаємо довжину відрізка підземної ділянки трубопроводу, на якому труба взаємодіє з ґрунтом з проковзуванням,

- за формулою (3.63) знаходимо поздовжню силу у поперечному перерізі надземної ділянки,

– за формулами (3.52)–(3.55) визначаємо переміщення і внутрішні зусилля на підземних ділянках.

Для прикладу розглянемо результати розрахунків переміщень і внутрішніх зусиль трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу з надземною ділянкою. Розрахункові параметри трубопроводу були прийняті такими: $l_2 = 60$ м; $D = 0,529$ м; $\delta = 10$ мм; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\rho = 7870$ кг/м³; $\mu = 0,3$; $\tau_{гр} = 9170$ Н/м²; $k_{\tau} = 2,10 \cdot 10^6$ Н/м³. Внутрішній тиск у трубі задавали рівним 0; 2; 4; 6 МПа. За відсутності поздовжніх зусиль такі значення внутрішнього тиску обумовлюють появу кільцевих напружень у матеріалі 0; 50; 90; 101,8; 152,7 МПа відповідно. Перепад температури надземної ділянки задавали рівним 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, а підземної – 0°.

Одержані результати (табл. 3.1) показують, що довжина відрізка підземної ділянки, на якому трубопровід деформується з проковзуванням відносно ґрунту, визначається головним чином перепадом температури і довжиною надземної ділянки і не залежить від внутрішнього тиску в трубі про що свідчать залежності (3.60)–(3.62).

Таблиця 3.1 – Сумісний вплив перепаду температури надземної ділянки магістрального газопроводу і внутрішнього тиску в трубі на поздовжні зусилля у її поперечному перерізі

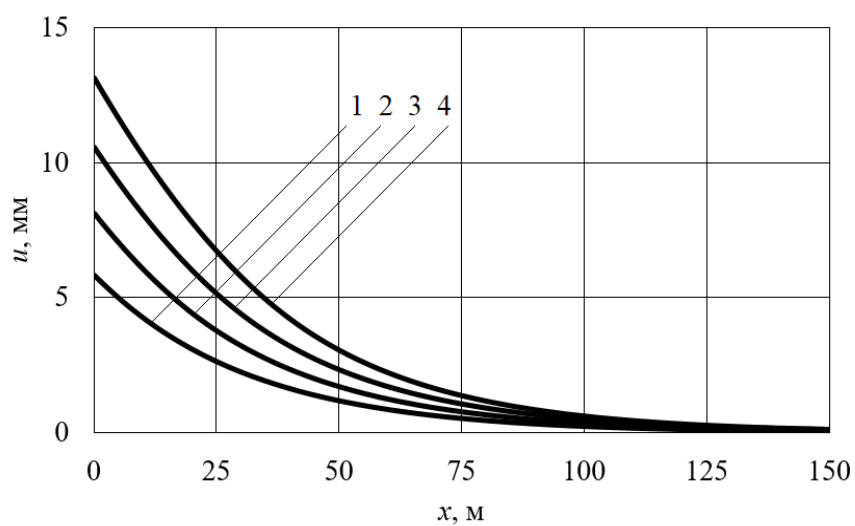
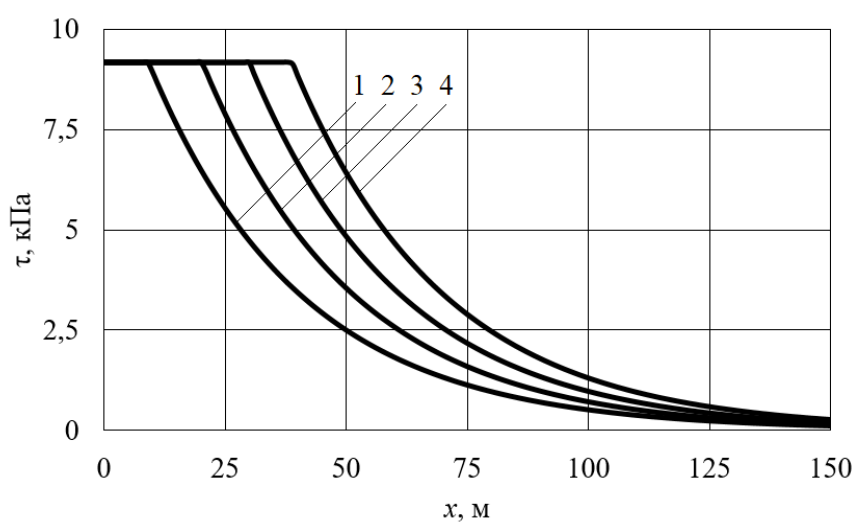
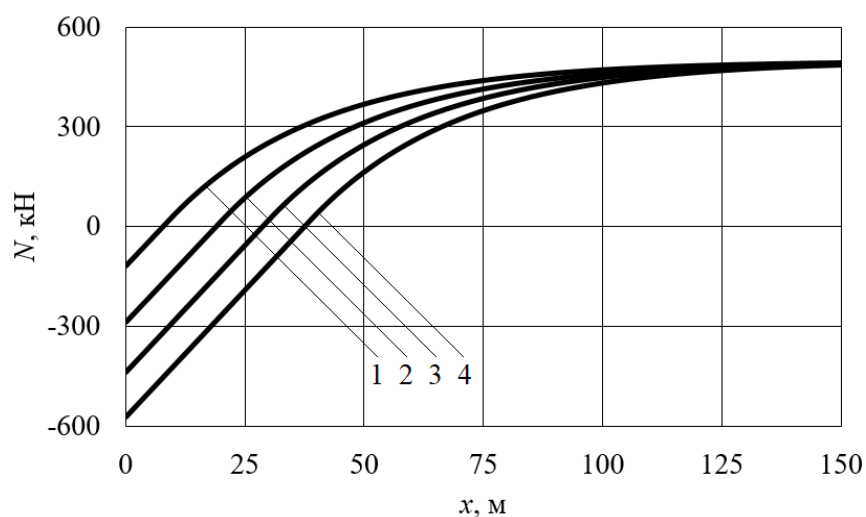
Δt_n , град	a_1 , м	$u(0)$, мм	N_2 , кН			
			$p_{вн} = 0$	$p_{вн} = 2$ МПа	$p_{вн} = 4$ МПа	$p_{вн} = 6$ МПа
10	—	1,915	-209,39	—	—	—
20	—	3,831	-418,77	-169,80	—	—
30	9,2053	5,839	-617,63	-368,65	-119,68	—
40	20,282	8,110	-786,43	-537,46	-288,48	-39,505
50	30,025	10,559	-934,91	-685,94	-436,96	-187,99
60	38,825	13,134	-1069,02	-820,04	-571,07	-322,09

Із збільшенням перепаду температури абсолютна величина зусилля стиску надземної ділянки значно зростає, а із збільшенням внутрішнього тиску в трубі – спадає. Це свідчить про необхідність урахування зазначених чинників під час визначення осьового навантаження надземної ділянки магістрального трубопроводу. З огляду на можливу втрату стійкості, найнебезпечнішим випадком навантаження надземної ділянки трубопроводу слід вважати випадок стискання незаповненої газом труби за максимального температурного перепаду.

Наведені на рис. 3.2 графічні залежності ілюструють вплив перепаду температури надземної ділянки на відповідні характеристики напружено-деформованого стану у поперечних перерізах підземної ділянки трубопроводу за внутрішнього тиску газу в трубі $p_{вн} = 4$ МПа. Із збільшенням перепаду температури переміщення поперечних перерізів, дотичні напруження на зовнішній поверхні труби і абсолютні значення поздовжніх сил стиску зростають. Із збільшенням координати поперечного перерізу переміщення труби і дотичне напруження на її зовнішній поверхні прямують до нуля, а поздовжнє зусилля – до деякого додатного значення, що визначається внутрішнім тиском газу в трубі.

3.2. Діагностика водневого макророзшарування в стінці труби в системі магістральних газопроводів

До важливих чинників, що впливають на стійкість надземних діляниць магістральних трубопроводів відносяться локальні ослаблення труб, що можуть бути обумовлені розвитком дефектів у матеріалах трубопроводів в процесі експлуатації. У даному підрозділі розглядаються результати досліджень обширного воднем ініційованого розшарування у стінці гину тривало експлуатованої відвідної від газокompресорної станції труби в системі магістральних газопроводів. Проаналізовано чинники, що відіграли вирішальну роль у його утворенні. Встановлено, що його діагностичними ознаками є аномальні покази товщиноміра, різке зниження твердості та пластичності сталі. Виявлено вищий ступінь деградації сталі гину труби порівняно з її прямою ділянкою, причому незалежно від того, ділянка розтягнута чи стиснута. Встановлені обмеження у використанні і відносного видовження, і відносного звуження для характеристики пластичності металу стінки труби з обширним розшаруванням.

*a**б**в*

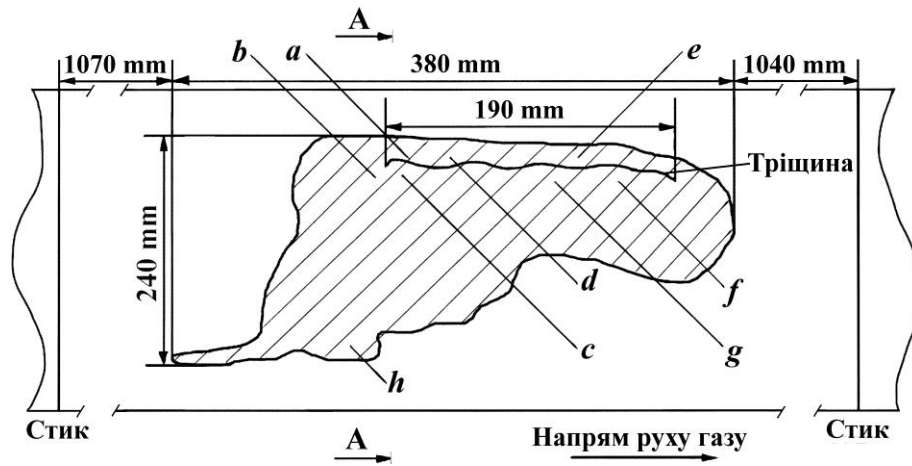
1 – $\Delta t_{\text{н}} = 30^\circ$; 2 – $\Delta t_{\text{н}} = 40^\circ$; 3 – $\Delta t_{\text{н}} = 50^\circ$; 4 – $\Delta t_{\text{н}} = 60^\circ$

Рисунок 3.2 – Залежності осевих переміщень (*a*), дотичних напружень на зовнішній поверхні (*б*) і поздовжнього зусилля (*в*) від координати поперечного перерізу підземної ділянки трубопроводу

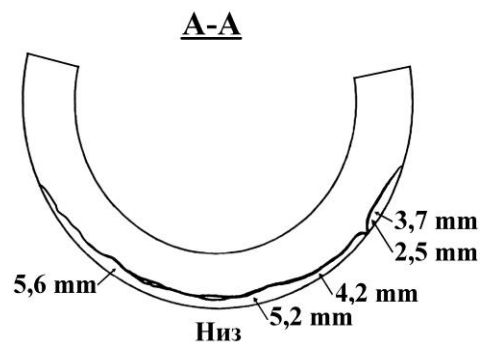
Діагностування дефектності гину газопроводу. Досліджували гин експлуатованої 40 років відвідної від газокompресорної станції труби зовнішнього діаметра 219 мм з номінальною товщиною стінки 18 мм. Гин розташований у надземній частині, максимальний робочий тиск в трубі 5,5 МПа, температура металу могла сягати 80°C. Гин труби на 90° виконано холодним способом без термообробки. Матеріал труби – сталь 20. Причиною діагностування стану труби стала поява на її зовнішній поверхні в розтягнутій зоні гину протяжної тріщини. Зазначимо, що це не призвело до розгерметизації трубопроводу, він надалі витримував в цій ділянці робоче навантаження, тому постало питання можливості подальшої безпечної експлуатації цього гину.

Ультразвуковим товщиноміром з А/В сканом MVX (Dakota Ultrasonics) обстежили гин та прилеглі до нього прямі ділянки. Його покази вказували на нереальне стоншення розтягнутої частини гину труби. Для прикладу, заміри товщиноміра, мм: 4,5; 3,7; 2,5; 4,2; 5,2; 5,6; 7,0; 6,4; 7,7; 6,5; 6,8; 6,9; 7,2; 7,6; 7,7; 8,0; 8,2; 16,2; 16,6; 17,3; 18,0; 16,8; 16,4; 17,6; 17,8; 16,5; 16,8; 17,2; 17,6; 17,0; 17,4; 17,0; 17,7; 18,1. І якщо товщина $t \geq 16,2$ мм могла відповідати дійсності, враховуючи деяке стоншення труби у розтягнутій частині гину та можливу корозію металу на внутрішній поверхні, то формально визначені значення $t = 3,7 \dots 8,2$ мм свідчили про реакцію товщиноміра на макродефекти всередині стінки труби.

Виявлене катастрофічне стоншення стінки труби спостерігали на великій площі її зовнішньої поверхні у сегменті між 4 та 8 год (загальна площа розшарування становила 380 мм уздовж осі та 240 мм по колу поперечного перерізу труби, що становить приблизно третину довжини зазначеного кола). Відповідно побудували карту ділянки розшарування (рис. 3.3) та позначили її на реальному гині (рис. 3.4). Зазначимо, що розшарування всередині стінки труби розташоване ближче до зовнішньої поверхні, що вказує на визначальну роль у процесі розвитку розшарування робочих напружень, обумовлених тиском газу в трубі, які є максимальними на зовнішній поверхні і стимулюють корозійно-водневе руйнування.



а



б

Рисунок 3.3 – Вигляд розшарування у стінці гину відвідної труби магістрального газопроводу (а) та переріз труби з дефектом (б).
Позначення а–h наведені у табл. 1

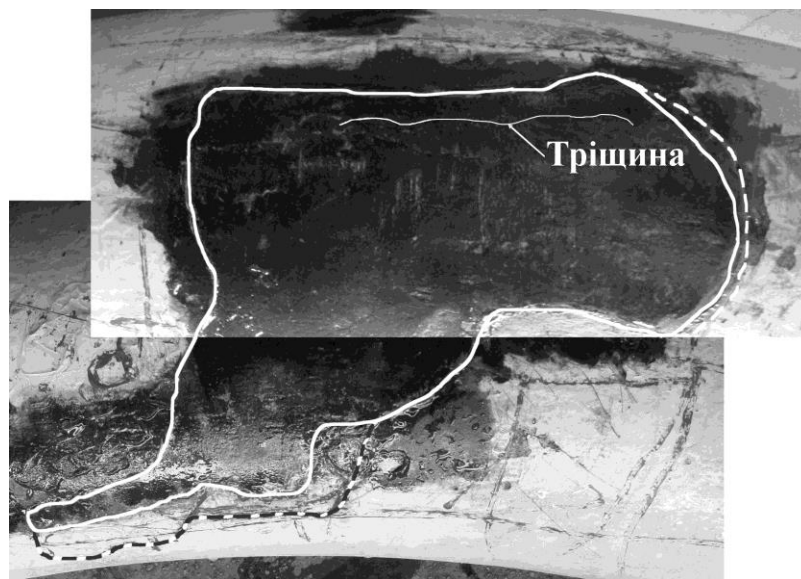


Рисунок 3.4 – Розшарування, спричинене воднем, у стінці гину відвідної труби магістрального газопроводу (суцільна лінія) та його поширення після гідроопресування (пунктирна лінія)

Зі зовнішньої поверхні труби переносним динамічним твердоміром ТД-32 заміряли твердість металу за Брінелем НВ у зоні виявленого розшарування (табл. 3.2). Максимальна твердість НВ 334 була дещо вищою, ніж на прямій ділянці труб, що можна пояснити деформаційним зміцненням, і відповідала тим локальним ділянкам, де розшарування було відсутнє. А інтенсивне зниження показів твердості пов'язане з підповерхневим розшаруванням у зоні заміру твердості і його можна трактувати як діагностичну ознаку прояву цього явища.

Таблиця 3.2 – Твердість НВ в місцях, позначених на рис. 3.3, *a*

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>
141	294	135	158	122	158	334	158

Наведені результати діагностичного обстеження гину труби стали основою для висновку про небезпеку його подальшої експлуатації, тому його усунули з трубопроводу та використали для напівнатурних і лабораторних досліджень.

Спочатку методом гідроопресування проаналізували можливість поширення експлуатаційного розшарування на сусідні ділянки гину. Для цього гин заварили з двох боків для герметизації, вмонтували манометр тиску і підключили до водопомпи. Гин піддали внутрішньому тиску, у півтора рази більшому за робочий, тобто, 8,25 МПа. Після гідроопресування повторили ультразвуковий контроль товщини труби навколо зони розшарування та виявили його збільшення (див. рис. 3.9).

Вибірковий металографічний аналіз поперечних розрізів гину підтвердив феритно-перлітну структуру низьковуглецевої сталі 20 та дав можливість переконатися в макропошкодженості всередині стінки труби (рис. 3.5). Тріщини місцями були сильно розкриті, що вказує на існування в них тисків, достатніх для пластичного деформування матеріалу у вершині тріщини. Спостерігали і розгалуження поверхонь розшарування по висоті стінки труби (рис. 3.10, *z*), що пояснює різні покази товщиноміра в зоні розшарування.

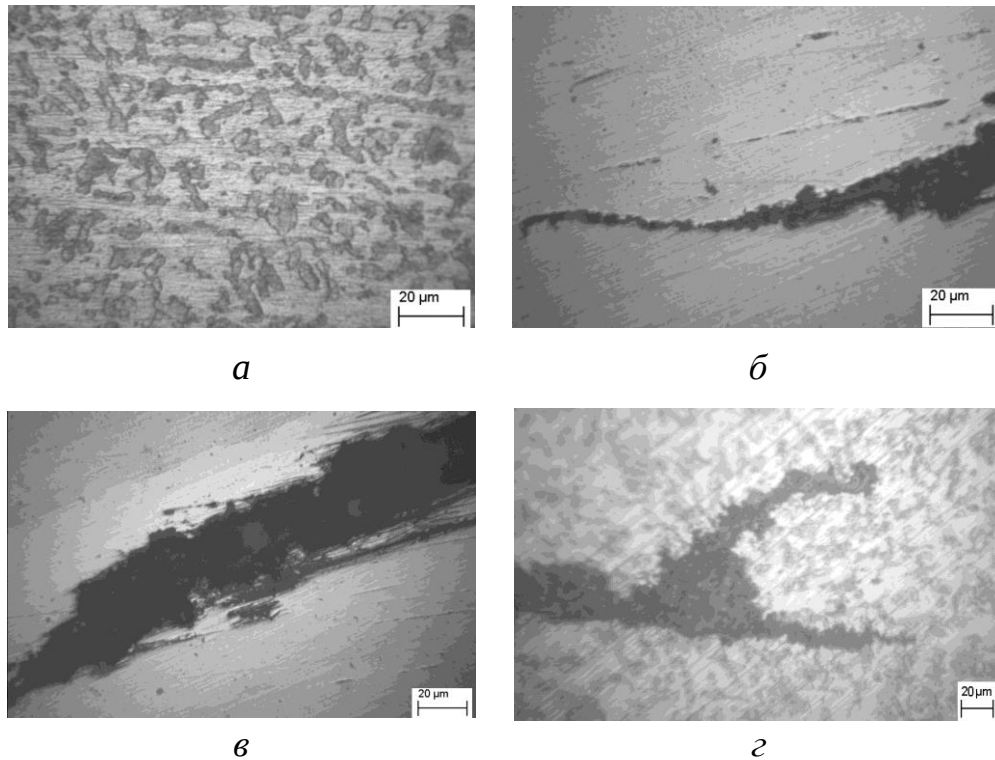


Рисунок 3.5 – Типова перлітно-феритна структура сталі (*а*) та приклади макророзшарування у стінці гину труби (*б–г*)

Лабораторні оцінки механічних властивостей експлуатованої трубної сталі. Застосовуючи методику випробування на розтяг, визначали характеристики міцності і пластичності матеріалу з використанням циліндричних зразків на розтяг двох геометрій (рис. 3.6). Вирізані уздовж осі труби L_N -зразки мали робочу частину довжиною 25 мм та діаметром 5 мм (рис. 3.7), що відповідали нормативним вимогам ДСТУ. Такі зразки дають можливість визначати показники міцності (границю міцності σ_B , границю плинності $\sigma_{0,2}$) та показники пластичності (відносне видовження δ і відносне звуження ψ). Додатково випробовували радіальні R_S -зразки (рис. 3.6, 3.8), які не мали протяжної робочої частини, оскільки їх довжину обмежувала товщина стінки труби. Вибір такої геометрії зразків зумовлений тим, щоби їх площа руйнування в результаті активного розтягування відповідала загалом площині розшарування. Такі зразки будуть максимально відбивати схильність металу до порушення когезії між матрицею і включеннями в результаті вальцювання трубного листа. Робоча частина укорочених зразків була 5 мм у діаметрі з радіусом закруглення 5 мм.

Результати випробувань таких зразків не дають можливості визначити механічні властивості, які би можна було порівнювати з властивостями, отриманими на L_N -зразках. Тому для порівняння властивостей у поздовжньому та радіальному напрямках виготовили також укорочені L_S -зразки і в поздовжньому напрямі.

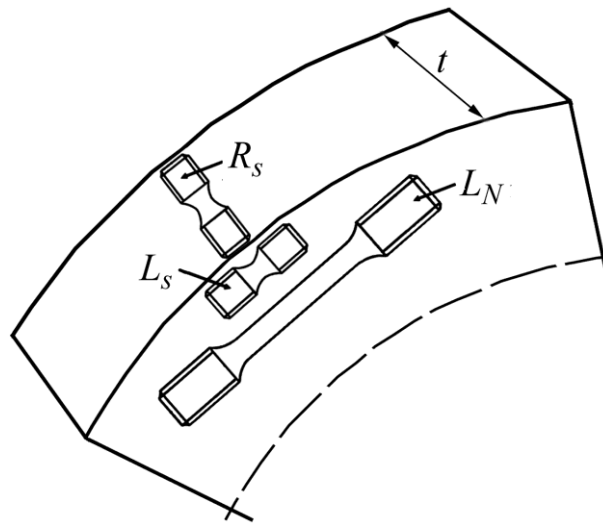


Рисунок 3.6 – Схема вирізання зразків з гину труби

Експерименти проводили на універсальній випробувальній машині типу УМЕ10-ТМ (рис. 3.9) за швидкості переміщення активного затискача 0,5 мм/хв, що забезпечувало швидкість деформації $3,3 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$. При випробуваннях здійснювався автоматичний запис діаграми навантаження в координатах “сила-переміщення активного затискача” із застосуванням для цього балки-тензоперетворювача. Балка згиналися внаслідок переміщення захвату під час навантаження зразка. На одну з діагоналей моста подавали напругу 20 В, а з іншої – знімали сигнал, пропорційний переміщенню, і в активному режимі записували покази до пам’яті комп’ютера (за допомогою аналого-цифрового перетворювача АЦП І–7018). Випробами на розтяг визначали показники міцності (границю міцності σ_B , границю плинності $\sigma_{0,2}$), показники пластичності (відносне видовження δ і відносне звуження ψ).

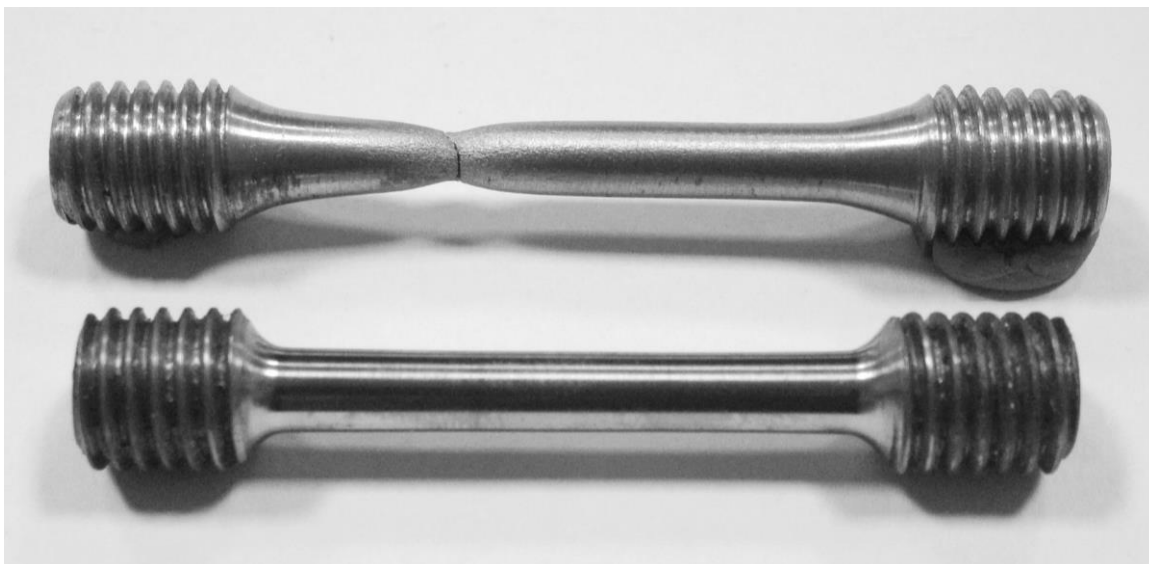


Рисунок 3.7 – Стандартизований ДСТУ зразок для визначення характеристик міцності і пластичності

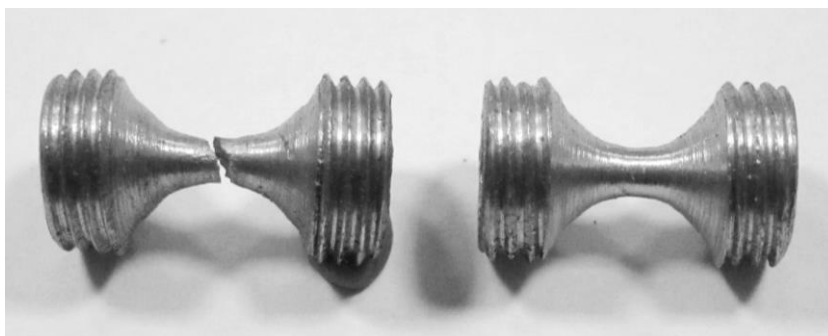


Рисунок 3.8 – Запропонована геометрія зразків на розтяг для оцінювання чутливості металу до розшарування



Рисунок 3.9 – Випробувальна установка УМЕ10-ТМ

Порівнювали властивості металу на прямій ділянці трубопроводу поблизу гину та окремо – стиснутої і розтягнутої зон. Визначали характеристики міцності і пластичності з використанням циліндричних зразків на розтяг двох геометрій. Вища їх міцність проти зі звичайних (табл. 3.3) була прогнозованою через геометрію. Що стосується впливу напрямку їх вирізання з труби, то радіальним зразкам властива менша міцність, що теж передбачали, оскільки площа руйнування була вздовж волокон вальцювання. Однак незалежно від типу зразків та напрямку їх вирізання міцність металу гину порівняно з прямою ділянкою була для всіх випадків більшою для розтягнутої його частини і нижчою для стиснутої. Оче-

видно, тут треба брати до уваги різну товщину стінки труби в різних ділянках гину, а тому, і відповідно більші та менші робочі напруження порівняно з напруженим станом прямої частини труби. Це свідчить про те, що упродовж тривалої експлуатації матеріал деформаційно зміцнюється залежно від рівня робочих напружень у ньому, хоч вони значно менші за границю текучості, якщо брати до уваги внутрішній тиск у трубі 5,5 МПа. Разом з тим, пульсація тиску газу на виході з газокompресорної станції та підвищена температура металу – це чинники, які сприяють його деформаційному зміцненню.

Таблиця 3.3 – Механічні властивості звичайних L_N - і L_S - та укорочених R_S -зразків

Ділянка труби	Тип зразка	$\sigma_{0,2}$	σ_B	ψ , %	$\frac{\Psi_R}{\Psi_L}$	δ , % / Δ , мм
		МПа				
пряма	L_N	293	482	64,0	—	17,6 / —
	L_S	451	562	67,5	—	— / 1,56
	R_S	427	604	38,7	0,57	— / 0,66
розтягнута	L_N	324	507	68,5	—	20,2 / —
	L_S	434	590	59,7	—	— / 1,20
	R_S	393	587	30,0	0,50	— / 0,4
стиснена	L_N	283	468	62,2	—	18,8 / —
	L_S	416	568	63,5	—	— / 1,31
	R_S	386	557	34,8	0,55	— / 0,58

Порівняльні оцінки пластичності за відносним видовженням δ можливо отримати лише для звичайних L -зразків. Найменше значення δ властиве металу прямої ділянки, максимальне – розтягнутої. Це неочікувані результати, оскільки найбільш зміцненій сталі властива максимальна пластичність. Однак, така особливість є часто діагностичною ознакою експлуатаційної деградації конструкційних сталей, у тому числі магістральних газопроводів. Вона пов'язана з розкриттям у зразках під навантаженням тріщин розсіяної пошкодженості і тоді параметр δ відтворює не тільки здатність металу пластично деформуватись, але

і розкриття у ньому множинних дефектів. Звідси найінтенсивніша пошкодженість властива розтягнутій ділянці гину, а найменша – прямій.

Водночас укорочені зразки без протяжної робочої частини (рис. 3.8), хоч і не дають можливості кількісно оцінити пластичність δ , однак локалізують деформацію практично в одному перерізі. Це перевага, оскільки тоді мінімізується розкриття тріщин розсіяної пошкодженості в інших перерізах зразка через низькі в них напруження. Водночас за визначеними в експерименті переміщеннями активного тримача Δ для різних ділянок труби можна достовірніше порівнювати пластичність металу. Зокрема, найнижча пластичність за показником Δ притаманна сталі розтягнутої, а найвища – прямої ділянок труби. Це протилежна характеристиці δ закономірність і згідно з нею метал гину включно з його стиснутою частиною поступається за пластичністю сталі прямої ділянки.

Основні оцінки пластичності отримано за відносним звуженням ψ . Зазначимо, що значення ψ , одержані для звичайних L -зразків, подібно як і показника δ , не узгоджуються з відповідними характеристиками міцності. Зокрема, металу розтягнутої ділянки гину властива максимальна і міцність, і ψ . І, навпаки, мінімальні міцність і пластичність притаманні металу стиснутої ділянки. Можливо, пояснення таких неочікуваних ефектів слід шукати саме у прояві впливу розшарування на руйнування циліндричних поздовжніх зразків з протяжною робочою частиною. Зокрема, використання поздовжніх укорочених L_s -зразків, з їхньою перевагою в локалізації деформації практично в одному перерізі, привело до оцінок відносного звуження ψ_L , які повністю узгоджуються з порівняльними оцінками показника Δ : найвища пластичність властива сталі прямої ділянки труби, а найнижча – розтягнутої ділянки гину. Таким чином, немає протиріч у показниках пластичності, якщо випробовувати вкорочені L_s -зразки.

Використовуючи укорочені радіальні R_s -зразки, виявили різкий спад пластичності ψ_R для металу всіх досліджуваних ділянок, що вказує на слабку адгезію між поздовжніми волокнами структури. Тобто, тривала експлуатація призвела до інтенсивної деградації металу труби, яка проявилась саме в ослабленні когезивної міцності між витягнутими включеннями і матрицею, а

водень сприяв цьому процесу. Разом з тим, спостерігали і відмінності між пластичністю різних ділянок гину: $\psi_R = 38,7: 30,0$ і $34,8\%$ для прямої, розтягнутої і стисненої ділянок відповідно. Це означає, що за характеристикою ψ_R метал не тільки розтягнутої, але і стиснутої ділянки деградував під час експлуатації інтенсивніше, ніж прямої ділянки труби. Що стосується порівняння різних зон гину, то саме розтягнута ділянка, на якій виявлено обширне розшарування, характеризується мінімальною пластичністю. І якщо при $\psi_R \sim 35\%$ запас пластичності ще був достатнім, щоби не спричинити макророзшарування, то вже $\psi_R = 30\%$ можна вважати граничним, причому не тільки для реалізації спричиненого воднем розшарування, але і виходу підповерхневого макродефекту на зовнішню поверхню.

Принципово вияснити причини сильнішої деградації за характеристиками пластичності металу стиснутої ділянки порівняно з прямою частиною труби. Адже у першому випадку товщина стінки труби більша і тому напруження від тиску газу менші. Очевидно, тут треба брати до уваги інші важливі експлуатаційні чинники, які впливають на деградацію металу. Транспортований зразу ж за компресорною станцією газ характеризується пульсацією тиску, яка на гині труби повинна бути сильнішою, а це означає відчутніший вплив циклічності навантаження, ніж на прямій ділянці труби. Крім того, не виняток, що з цієї причини і температура металу гину вища, що сприятиме деградації металу через інтенсифікацію дифузії водню.

3.3. Оцінка локального ослаблення трубопроводу внаслідок макророзшарування матеріалу труби

Розшарування металу може істотно зменшити залишкову міцність, а також жорсткість труби магістрального трубопроводу. У зв'язку з виникненням системи тріщин у відшарованій частині стінки труби та випучуванням цієї частини, її вплив на залишкову міцність й на деформативність трубопроводу до уваги не береться [Настанова]. На основі такого підходу розглянемо вплив геометричних параметрів розшарування на згинну жорсткість відрізка труби.

Для цього визначимо положення головних центральних осей інерції та мінімальний головний центральний момент інерції поперечного перерізу труби з розшаруванням.

Схема поперечного перерізу труби зображена на рис. 3.10, де R і r – зовнішній і внутрішній радіуси труби; r_1 – радіус циліндричної поверхні розшарування металу; A_1 і A_2 – площі поперечних перерізів робочої і відшарованої частин труби; ϕ – половинний кут, що характеризує коловий розмір поверхні розшарування; α – поточне значення кутової координати; zOy , $z_1C_1y_1$, $z_2C_2y_2$ – головні центральні осі повного поперечного перерізу труби площею $A = A_1 + A_2$ та його частин площами A_1 і A_2 відповідно. Товщини стінки труби і її відшарованої частини позначаємо як δ та δ_2 ,

$$\delta = R - r; \delta_2 = R - r_1.$$

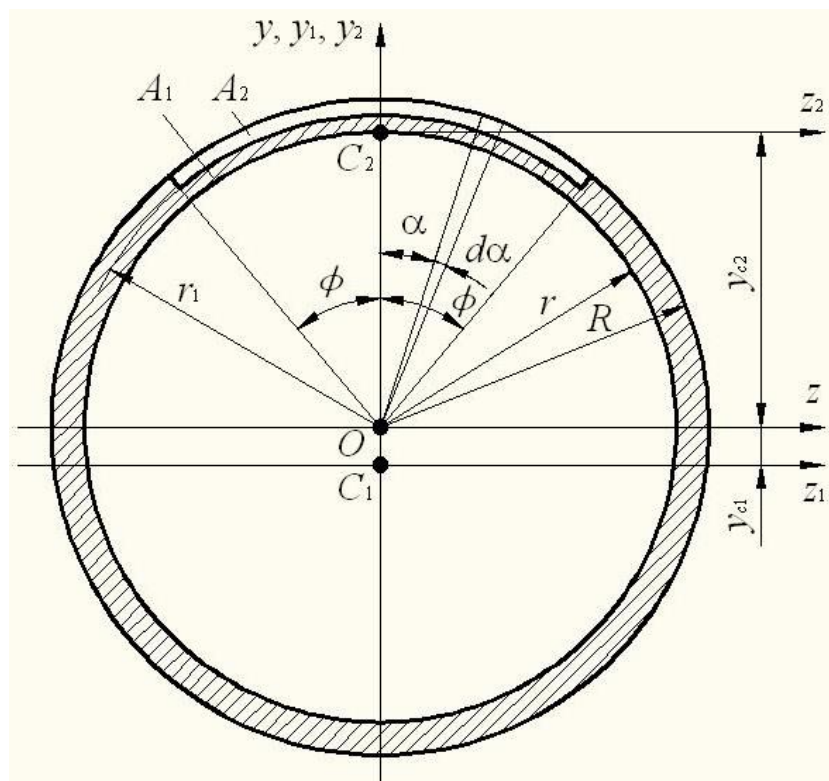


Рисунок 3.10 – Схема поперечного перерізу труби, ослабленої розшаруванням металу

Площу поперечного перерізу A_2 , статичний момент S_{2z} і момент інерції I_{2z} відшарованої частини труби відносно осі z визначаємо як

$$A_2 = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{r_1 + R}{2} \delta_2 d\alpha = (r_1 + R) \delta \varphi; \quad (3.64)$$

$$S_{2z} = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{(r_1 + R)^2}{4} \delta_2 \cos \alpha d\alpha = \frac{(r_1 + R)^2}{2} \delta_2 \sin \varphi; \quad (3.65)$$

$$I_{2z} = \int_{-\varphi}^{\varphi} \frac{(r_1 + R)^3}{8} \delta_2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{(r_1 + R)^3}{8} \delta_2 \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right). \quad (3.66)$$

Ординату y_{c2} центра ваги поперечного перерізу відшарованої частини труби C_2 в системі координат zOy знаходимо з урахуванням (3.64) і (3.65) як

$$y_{c2} = \frac{S_{2z}}{A_2} = \frac{(r_1 + R) \sin \varphi}{2\varphi}. \quad (3.67)$$

Оскільки повна площа поперечного перерізу труби $A = \pi(R^2 - r^2)$, а площа поперечного перерізу відшарованої частини, згідно з (3.64), $A_2 = (r_1 + R) \delta \varphi$, площа поперечного перерізу труби з розшаруванням дорівнює

$$A_1 = A - A_2 = \pi(R^2 - r^2) - (r_1 + R) \delta \varphi. \quad (3.68)$$

Згідно з теоремою про момент рівнодійної запишемо рівність

$$A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} = (A_1 + A_2) y_o. \quad (3.69)$$

де y_o і y_{c1} – ординати центрів поперечних перерізів труби O і C_1 без розшарування і з розшаруванням відповідно у системі координат zOy .

Беручи до уваги, що $y_o = 0$, з урахуванням співвідношень (3.64), (3.67)–(3.69) одержуємо

$$y_{c1} = -\frac{A_2}{A_1} y_{c2} = -\frac{(r_1 + R)^2 \delta \sin \varphi}{2[\pi(R^2 - r^2) - (r_1 + R) \delta \varphi]}. \quad (3.70)$$

Момент інерції поперечного перерізу труби без розшарування I_z відносно осі Oz становить

$$I_z = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}. \quad (3.71)$$

З урахуванням залежностей (3.66) та (3.71) визначаємо момент інерції поперечного перерізу труби з розшаруванням відносно осі Oz :

$$I_{1z} = I_z - I_{2z} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} - \frac{(r_1 + R)^3 \delta_2}{8} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right). \quad (3.72)$$

Якщо позначити головний центральний момент інерції поперечного перерізу труби з розшаруванням відносно осі C_{1z1} як I_{1z1} , то його зв'язок з величиною I_z визначається теоремою Штейнера, тобто,

$$I_{1z1} = I_{1z} - A_1 y_{c1}^2. \quad (3.73)$$

З урахуванням співвідношень (3.68), (3.70), (3.72), (3.73) одержуємо формулу для визначення осьового моменту інерції поперечного перерізу труби з розшаруванням

$$I_{1z1} = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4} - \frac{(r_1 + R)^3 \delta_2}{8} \left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) - \left[\pi(R^2 - r^2) - (r_1 + R)\delta\varphi \right] \cdot \frac{(r_1 + R)^4 \delta^2 \sin^2 \varphi}{4[\pi(R^2 - r^2) - (r_1 + R)\delta\varphi]^2}. \quad (3.74)$$

Для прикладу у табл. 3.4 наведені геометричні характеристики поперечних перерізів труби зовнішнім діаметром 529 мм і товщиною стінки 10 мм, обчислені за формулами (3.64), (3.68), (3.70), (3.74) з урахуванням розшарування. Коефіцієнт товщини відшарованого металу k_δ визначали як

$$k_\delta = \frac{\delta_2}{\delta}.$$

Результати обчислень показують, що за $k_\delta = 0,25$ розшарування металу труби може призвести до зменшення моменту інерції поперечного перерізу труби на 26,06 %, а за $k_\delta = 0,5$ – на 51,44 %. Це свідчить про істотний вплив розшарування на згинну жорсткість локальних ослаблених зон магістральних трубопроводів.

Таблиця 3.4 – Геометричні характеристики поперечних перерізів труби з розшаруванням металу

$\varphi, ^\circ$	$k_\delta=0,25$				$k_\delta=0,5$			
	$A_1, \text{см}^2$	$A_2, \text{см}^2$	$y_{c1}, \text{мм}$	$I_{1z1}, \text{см}^4$	$A_1, \text{см}^2$	$A_2, \text{см}^2$	$y_{c1}, \text{мм}$	$I_{1z1}, \text{см}^4$
0	163,05	0,0000	0,0000	54919	163,05	0,0000	0,0000	54919
15	159,60	3,4459	-5,6191	52534	156,19	6,8591	-11,375	50115
30	156,16	6,8919	-11,095	50364	149,33	13,718	-22,984	45528
45	152,71	10,338	-16,044	48664	142,47	20,577	-34,069	41707
60	149,26	13,784	-20,104	47565	135,61	27,437	-43,836	39003
75	145,82	17,230	-22,953	47041	128,75	34,296	-51,498	37485
90	142,37	20,676	-24,338	46912	121,89	41,155	-56,315	36928
105	138,93	24,122	-24,091	46895	115,03	48,014	-57,639	36866
120	135,48	27,567	-22,149	46677	108,17	54,873	-54,955	36712
135	132,04	31,013	-18,557	45999	101,32	61,732	-47,908	35902
150	128,58	34,459	-13,473	44720	94,457	68,591	-36,336	34024
165	125,14	37,905	-7,1663	42861	87,598	75,451	-20,282	30911
180	121,70	41,351	0,0000	40591	80,739	82,310	0,0000	26669

3.4. Математична модель втрати стійкості надземної ділянки магістрального трубопроводу

Розглянемо методику розрахунку багатопрогонової довгомірної конструкції магістрального трубопроводу на стійкість на прикладі механічної системи, що включає надземну і зв'язані з нею підземні ділянки довгомірної конструкції (рис. 3.11).

Будемо вважати, що прогони, які знаходяться у землі, опираються на пружну основу типу Вінклера. Довжини прогонів довгомірної конструкції позначаємо як l_i ($i = 1, 2, 3$), а погонні коефіцієнти постелі пружної основи – як

k_1, k_3 . Для опису напружено-деформованого стану трубопроводу скористаємося поздовжніми координатами x_i ($i = 1, 2, 3$) з початками у лівих крайніх перерізах відповідно прогонів і направлених праворуч. Прогини здеформованої осі довгомірної конструкції позначаємо як w_i ($i = 1, 2, 3$).

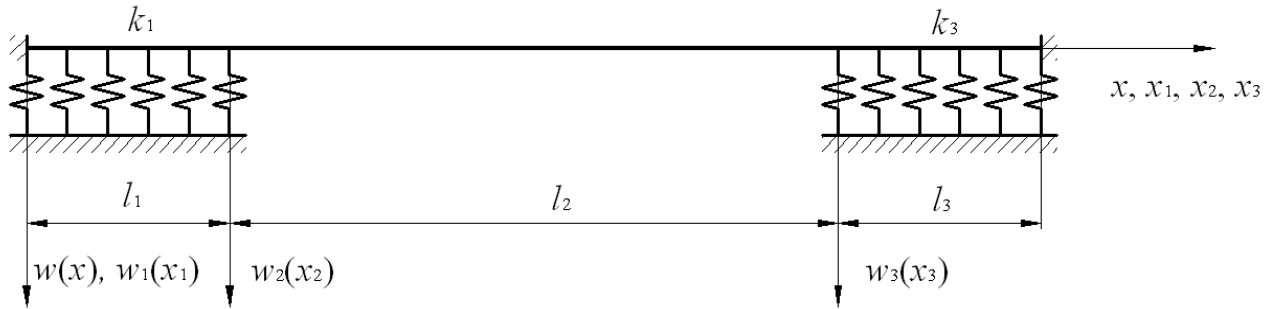


Рисунок 3.11 – Розрахункова схема надземної ділянки трубопроводу з частинами підземних ділянок

Для зручності зображення форм коливань усієї трипрогонової конструкції додатково вводимо направлену вправо, спільну для усіх ділянок координату x з початком на лівому кінці конструкції. Тоді загальний вираз для прогину складеної балки як функції координати x набуває вигляду

$$w(x, t) = w_1(x, t), \text{ якщо } 0 \leq x \leq l_1;$$

$$w(x, t) = w_2(x - l_1, t), \text{ якщо } l_1 \leq x \leq l_1 + l_2;$$

$$w(x, t) = w_3(x - l_1 - l_2, t), \text{ якщо } l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3.$$

Застосовуючи технічну теорію згину, рівняння напружено-деформованого стану прогонів, опертих на пружну основу записуємо у вигляді

$$\frac{d^4 w_i}{dx_i^4} + b_i^2 \frac{d^2 w_i}{dx_i^2} + c_i^4 w_i = 0 \quad (i = 1, 3); \quad (3.75)$$

де

$$b_i = \frac{P_i}{EI_i}; \quad c_i = \frac{k_i}{EI_i}, \quad (3.76)$$

причому, E – модуль пружності першого роду матеріалу труби; I_i – осьовий момент інерції поперечного перерізу труби; P_i – осьова сила, якою стискається надземний прогін труби.

Характеристичне рівняння, що відповідає диференціальному рівнянню (3.75), має вигляд

$$r_i^4 + b_i^2 r_i^2 + c_i^4 = 0, \quad (3.77)$$

а його коренями будуть величини

$$r_i = \pm \sqrt{-\frac{b_i^2}{2} \pm \sqrt{\frac{b_i^4}{4} - c_i^4}}.$$

У випадку, коли

$$b_i^4 / 4 - c_i^4 \geq 0,$$

усі чотири корені характеристичного рівняння (3.77) будуть уявними.

Відповідно до методу початкових параметрів, розв'язки диференціальних рівнянь (3.75) подаємо у матричній формі

$$Y_i(x_i) = S_i(x_i) \cdot Y_i(0) \quad (i=1, 3), \quad (3.78)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), w_i'(x_i), w_i''(x_i), w_i'''(x_i)]; \quad (3.79)$$

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{4i}(x_i) \\ \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{4i}(x_i) \\ \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{4i}(x_i) \\ \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{4i}(x_i) \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Тут $\psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}, \psi_{4i}$ – фундаментальна система інтегралів рівняння (3.64), що визначаються за формулами

$$\psi_{1i} = \frac{1}{\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2} (\lambda_{1i}^2 \cos \lambda_{2i} x - \lambda_{2i}^2 \cos \lambda_{1i} x);$$

$$\begin{aligned}
\psi_{2i} &= \frac{1}{\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2} \left(\frac{\lambda_{1i}^2}{\lambda_{2i}} \sin \lambda_{2i} x - \frac{\lambda_{2i}^2}{\lambda_{1i}} \sin \lambda_{1i} x \right); \\
\psi_{3i} &= \frac{1}{\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2} (\cos \lambda_{2i} x - \cos \lambda_{1i} x); \\
\psi_{4i} &= \frac{1}{\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2} \left(\frac{1}{\lambda_{2i}} \sin \lambda_{2i} x - \frac{1}{\lambda_{1i}} \sin \lambda_{1i} x \right),
\end{aligned} \tag{3.81}$$

причому,

$$\lambda_{1i} = \sqrt{\frac{b_1^2}{2} + \sqrt{\frac{b_1^4}{4} - c_i^4}}; \quad \lambda_{2i} = \sqrt{\frac{b_1^2}{2} - \sqrt{\frac{b_1^4}{4} - c_i^4}}.$$

З урахуванням залежностей (3.80), (3.81), квадратну матрицю $S_i(x_i)$ зводимо до вигляду

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{4i}(x_i) \\ -c_i^4 \psi_{4i}(x_i) & \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) - b_i^2 \psi_{4i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) \\ -c_i^4 \psi_{3i}(x_i) & -c_i^4 \psi_{4i}(x_i) & \psi_{1i}(x_i) - b_i^2 \psi_{3i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) - b_i^2 \psi_{4i}(x_i) \\ -c_i^4 \psi_{2i}(x_i) + b_i^2 c_i^4 \psi_{4i}(x_i) & -c_i^4 \psi_{3i}(x_i) & -b_i^2 \psi_{2i}(x_i) + (b_i^4 - c_i^4) \psi_{4i}(x_i) & \psi_{1i}(x_i) - b_i^2 \psi_{3i}(x_i) \end{pmatrix}. \tag{3.82}$$

Диференціальні рівняння зігнутої осі другого прогону трубопроводу записуємо у вигляді

$$\frac{d^4 w_2}{dx_2^4} + b_2^2 \frac{d^2 w_2}{dx_2^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{3.83}$$

де

$$b_2^2 = \frac{P_2}{EI_2}. \tag{3.84}$$

Розв'язки однорідних диференціальних рівнянь (3.83) подаємо у матричному вигляді

$$Y_2(x_2) = S_2(x_2) \cdot Y_2(0), \quad (3.85)$$

де

$$Y_2(x_2) = \text{col}[w_2(x_2), w_2'(x_2), w_2''(x_2), w_2'''(x_2)]; \quad (3.86)$$

$$S_2(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & x_2 & \frac{1}{b_2^2} \left(1 - \cos b_2 x_2 \right) & \frac{1}{b_2^3} \left(b_2 x_2 - \sin b_2 x_2 \right) \\ 0 & 1 & \frac{1}{b_2} \sin b_2 x_2 & \frac{1}{b_2^2} \left(1 - \cos b_2 x_2 \right) \\ 0 & 0 & \cos b_2 x_2 & \frac{1}{b_2} \sin b_2 x_2 \\ 0 & 0 & -b_2 \sin b_2 x_2 & \cos b_2 x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.87)$$

Кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і внутрішню силу у вертикальному перерізі конструкції визначаємо за формулами

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{dw_i}{dx_i}; & M_i &= -EI_i \frac{d^2 w_i}{dx_i^2}; \\ V_i &= -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3} - P_i \frac{dw_i}{dx_i} \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (3.88)$$

Поперечну силу, на відміну від внутрішньої сили у вертикальному перерізі, знаходимо як

$$Q_i = -EI_i \frac{d^3 w_i}{dx_i^3}. \quad (3.89)$$

Крайові умови, яким повинні відповідати розв'язки диференціального рівняння (3.75) на лівому кінці споруди, запишемо у вигляді

$$w_1(0) = 0; \quad \varphi_1(0) = 0. \quad (3.90)$$

Крайові умови для стиків сусідніх прогонів трубопроводу записуємо з урахуванням можливого ослаблення труби в областях стиків

$$w_{i+1}(0) = w_i(l_i); \quad \varphi_{i+1}(0) = \varphi_i(l_i) - \frac{M_i(l_i)}{c_i};$$

$$M_{i+1}(0) = M_i(l_i); \quad V_{i+1}(0) = V_i(l_i) \quad (i=1, 2), \quad (3.91)$$

де c_1, c_2 – коефіцієнти жорсткості ослаблених зон труби.

Крайовими умовами для правого крайнього перерізу довгомірної конструкції будуть співвідношення:

$$w_3(l_3) = 0; \quad \varphi_3(l_3) = 0. \quad (3.92)$$

З урахуванням диференціальних залежностей (3.88) утворимо матричні співвідношення взаємозв'язків між функцією $w_i(x_i)$ і її похідними, з одного боку, та фізичними величинами, що характеризують напружено-деформований стан конструкції у даному перерізі, з іншого боку:

$$F_i(x_i) = A_i Y_i(x_i); \quad Y_i(x_i) = B_i F_i(x_i) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.93)$$

де

$$F_i(x_i) = \text{col}[w_i(x_i), \varphi_i(x_i), M_i(x_i), V_i(x_i)]; \quad (3.94)$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -EI_i & 0 \\ 0 & -P_i & 0 & -EI_i \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{EI_i} & 0 \\ 0 & -\frac{P_i}{EI_i} & 0 & -\frac{1}{EI_i} \end{pmatrix}. \quad (3.95)$$

Крайові умови (3.91) подаємо у матричному вигляді

$$F_{i+1}(0) = H_i F_i(l_i) \quad (i=1, 2); \quad (3.96)$$

де

$$H_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -c_i^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.97)$$

З урахуванням матричних співвідношень (3.78), (3.85), (3.93) одержуємо зв'язок геометричних і силових параметрів на кінцях споруди

$$F_3(l_3) = \left(A_3 S_3(l_3) B_3 \prod_{i=2}^1 H_i A_i S_i(l_i) B_i \right) \cdot F_1(0), \quad (3.98)$$

де матриці-стовпці $F_1(0)$ і $F_3(l_3)$, згідно з крайовими умовами (3.90), (3.92), мають вигляд

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, M_1(0), V_1(0)); \quad (3.99)$$

$$F_3(l_3) = \text{col}(0, 0, M_3(l_3), V_3(l_3)). \quad (3.100)$$

Задаючи по чергово матрицю-стовпець (3.99) у вигляді

$$F_1(0) = \text{col}(0, 0, 1, 0) \quad \text{або} \quad F_1(0) = \text{col}(0, 0, 0, 1), \quad (3.101)$$

за допомогою матричної залежності (3.98) визначаємо реакції першого і другого елементів матриці-стовпця (3.100) на одиничні значення третього і четвертого елементів матриці-стовпця $F_1(0)$. Реакції поступального переміщення $w_3(l_3)$ на одиничні значення згинального моменту $M_1(0)$ і внутрішньої сили $V_1(0)$ позначаємо як r_{13} і r_{14} ; реакції обертального переміщення $\varphi_3(l_3)$ на одиничні значення відповідних елементів матриці-стовпця $F_1(0)$ – як r_{23} і r_{24} . Тоді, з урахуванням крайових умов (3.92), одержуємо систему алгебричних рівнянь

$$r_{13} M_1(0) + r_{14} V_1(0) = 0; \quad r_{23} M_1(0) + r_{24} V_1(0) = 0. \quad (3.102)$$

Для існування ненульових розв'язків системи (3.102) необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю, тобто,

$$\begin{vmatrix} r_{13} & r_{14} \\ r_{23} & r_{24} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.103)$$

Оскільки коефіцієнти алгебричних рівнянь (3.102) є функціями осевого навантаження P надземної ділянки магістрального трубопроводу, співвідношення (3.103) можна розглядати як характеристичне рівняння для знаходження критичних значень навантаження $P_{k1}, P_{k2}, P_{k3}, \dots$. Практичне значення має найменша вартість критичної сили, з якою порівнюють осеве зусилля в трубі, обумовлене перепадом температури.

Для кожного з критичних значень осьового навантаження обчислюємо початкові параметри напружено-деформованого стану надземної ділянки магістрального трубопроводу за залежністю

$$F_i(0) = \left(\prod_{j=i}^1 H_j A_j S_j(l_j) B_j \right) F_1(0) \quad (i=1, 2), \quad (3.104)$$

яка безпосередньо впливає із співвідношень (3.78), (3.85), (3.93), (3.96), і обчислюємо форми прогинів, кутів повороту поперечних перерізів і згинальних моментів за формулами

$$F_i(x_i) = A_i S_i(x_i) B_i F_i(0) \quad (i=1, 2, 3), \quad (3.105)$$

які є наслідком співвідношень (3.78), (3.85), (3.93).

Отже, для визначення спектру критичних сил спершу за допомогою рівності (3.98) визначаємо коефіцієнти алгебричних рівнянь (3.102), після чого знаходимо корені трансцендентного рівняння (3.103). Форми геометричних і силових параметрів поперечних перерізів конструкції одержуємо із застосуванням співвідношень (3.104), (3.105). Зауважимо, що сила у вертикальному перерізі $V_i(x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) кожної з ділянок споруди дорівнює нулю. Графіки форм поперечних сил $Q_i(x_i)$ ($i = 1, 2, 3$) будуюмо, застосовуючи співвідношення (3.89).

3.5. Дослідження стійкості надземної ділянки магістрального трубопроводу

Розглянемо результати визначення параметрів статичної стійкості трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу, що складається з надземної та частин прилеглих до неї підземних ділянок. Вихідні дані для впровадження розрахунків були прийняті такими: зовнішній діаметр труби $D = 529$ мм; товщина стінки $\delta = 10$ мм; довжина підземних ділянок $l_1 = l_3 = 20$ м; довжину надземної ділянки l_2 змінювали в межах від 20 до 80 м; модуль пружності першого роду, густина і коефіцієнт Пуассона матеріалу труби $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа;

$\rho = 0,787 \text{ кг/м}^3$; $\mu = 0,3$; коефіцієнт пропорційності між осьовим переміщенням поперечного перерізу підземного прогону труби і дотичними напруженням на її зовнішній поверхні $k_t = 2,0 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3$; погонний коефіцієнт постелі пружної основи, на яку опираються крайні прогони, $k = 2,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2$. Розглядали найбільш несприятливий випадок, коли внутрішній тиск газу у трубі відсутній. Вважали, що труба перебуває під дією осьового навантаження, викликаного температурним перепадом надземної ділянки $\Delta t_n = 50^\circ$. Можливе проковзування труби відносно ґрунту, яке зменшує поздовжнє зусилля стиску труби, до уваги не брали.

Розрахунки на стійкість з визначенням температурних зусиль і напружень на надземній ділянці, а також гнучкості, коефіцієнта зведеної довжини і критичної сили проводили для трубопроводу без локальних ослаблень та з одним (на межі першої і другої ділянок) або двома (на обох межах сусідніх ділянок) ослабленнями. Коефіцієнти жорсткості пружних шарнірів, якими моделювали ослаблені зони трубопроводу, приймали рівними $1,1533 \text{ Н·м/рад}$, що рівнозначно зменшенню осьового моменту інерції вдвічі на відрізьку труби довжиною 1 м .

Одержані результати розрахунків (табл. 3.5) засвідчують, що в реальних умовах експлуатації магістральних трубопроводів температурні перепади можуть призводити до втрати статичної стійкості надземних ділянок. Зростання довжини надземної ділянки трубопроводу, а також податливість локально ослаблених зон помітно збільшує гнучкість і коефіцієнт зведеної довжини пружної механічної системи та істотно зменшує критичне навантаження, що необхідно враховувати під час проектування магістральних трубопроводів.

Зауважимо, що залежність гнучкості від довжини надземної ділянки є близькою до лінійної (рис. 3.12). Перетин кривих критичної сили (1 – 3) з кривою температурного зусилля (4) на рис. 3.13 підтверджує можливість втрати стійкості надземної ділянки довжиною близько 60 м . Форми прогинів, кутів повороту поперечних перерізів і згинальних моментів трипрогонової конструкції трубопроводу ілюструють особливості її деформування в процесі втрати стійкості за відсутності та за наявності локальних ослаблень.

Таблиця 3.5 – Результати визначення характеристик статичної стійкості трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу з надземною ділянкою

Довжина надземної ділянки l_2 , м	Число локальних ослаблень	Температурне зусилля, кН	Температурне напруження, МПа	Гнучкість λ	Коефіцієнт зведеної довжини μ	Критична сила P_{kl} , кН
20,00	0	508,37	31,179	65,341	0,19986	7915,3
30,00	0	681,59	41,803	92,514	0,24256	3948,4
40,00	0	821,57	50,389	119,73	0,27467	2357,4
50,00	0	937,03	57,469	146,96	0,29968	1564,8
60,00	0	1033,9	63,410	174,19	0,31969	1113,7
70,00	0	1116,3	68,465	201,43	0,33607	832,89
80,00	0	1187,3	72,820	228,67	0,34972	646,30
20,00	1	508,37	31,179	68,424	0,20930	7218,0
30,00	1	681,59	41,803	96,407	0,25276	3635,9
40,00	1	821,57	50,389	124,04	0,28456	2196,4
50,00	1	937,03	57,469	151,51	0,30895	1472,2
60,00	1	1033,9	63,410	178,89	0,32831	1056,0
70,00	1	1116,3	68,465	206,22	0,34407	794,64
80,00	1	1187,3	72,820	233,52	0,35715	619,69
20,00	2	508,37	31,179	72,125	0,22062	6496,2
30,00	2	681,59	41,803	100,82	0,26434	3324,4
40,00	2	821,57	50,389	128,81	0,29550	2036,8
50,00	2	937,03	57,469	156,47	0,31908	1380,2
60,00	2	1033,9	63,410	183,98	0,33766	998,38
70,00	2	1116,3	68,465	211,39	0,35270	756,22
80,00	2	1187,3	72,820	238,75	0,36515	592,84

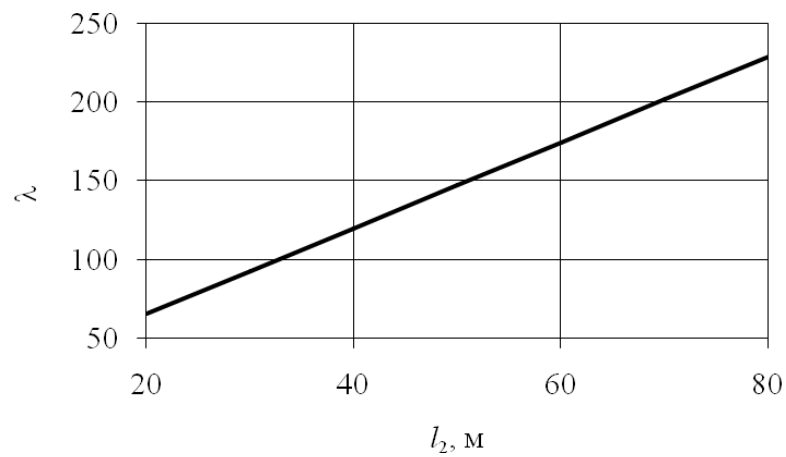


Рисунок 3.12 – Залежність гнучкості конструкції трипрогонової конструкції трубопроводу без локальних ослаблень від довжини надземного прогону

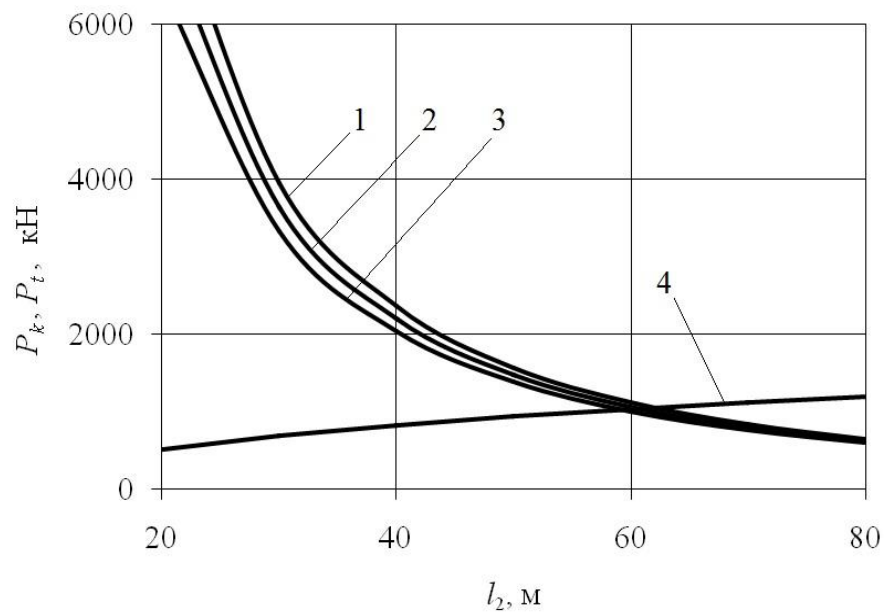
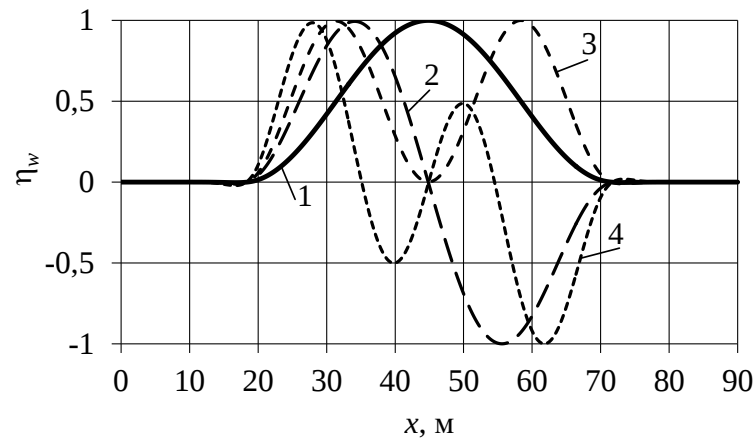
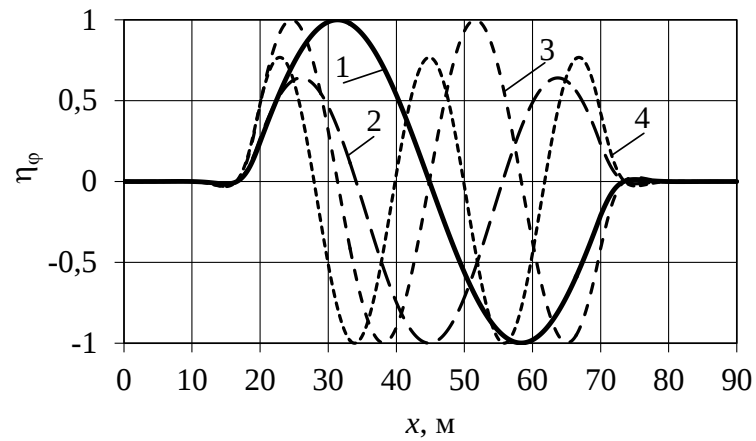


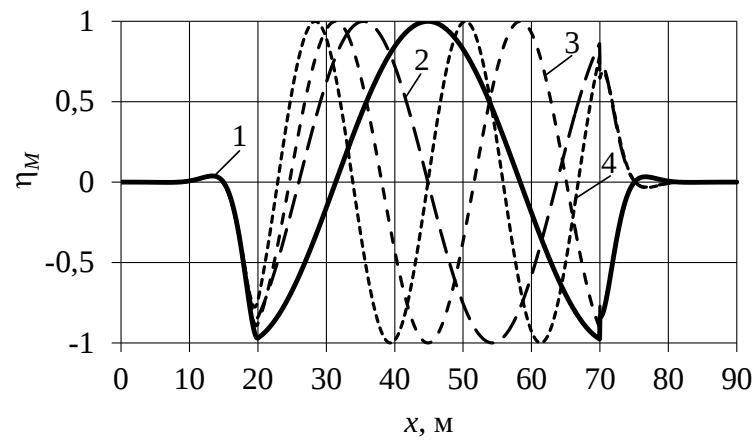
Рисунок 3.13 – Залежності критичного навантаження трипрогонової ділянки трубопроводу без локальних ослаблень (1), з одним (2) і з двома (3) локальними ослабленнями та залежність температурного зусилля в трубі (4) від довжини надземного прогону



a

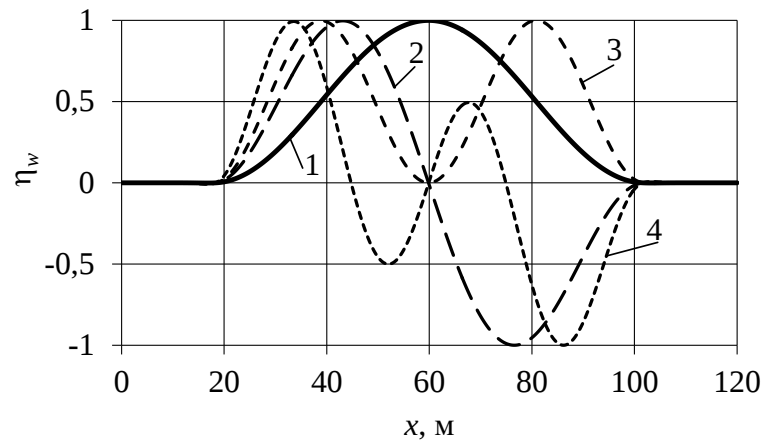


б

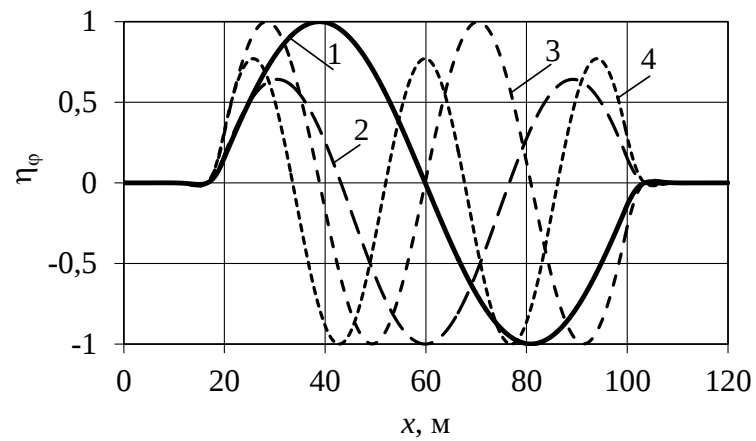


в

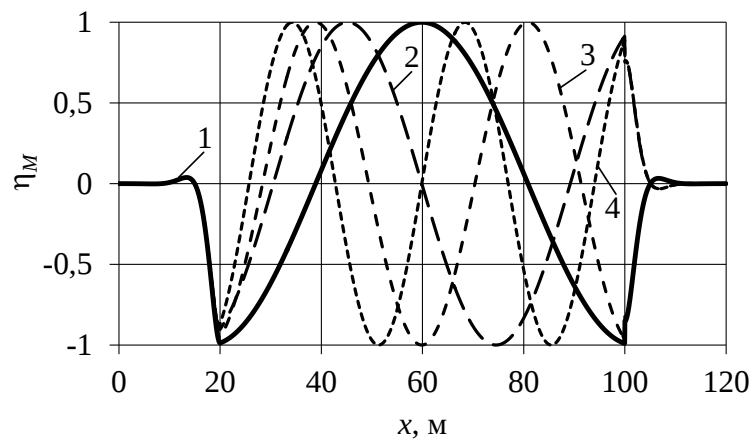
Рисунок 3.14 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) трипрогонової ділянки трубопроводу без місцевих ослаблень (довжини підземних прогонів становлять 20 м, а надземного – 50 м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)



а



б



в

Рисунок 3.15 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) трипрогонової ділянки трубопроводу без місцевих ослаблень (довжини підземних прогонів становлять 20 м, а надземного – 80; м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)

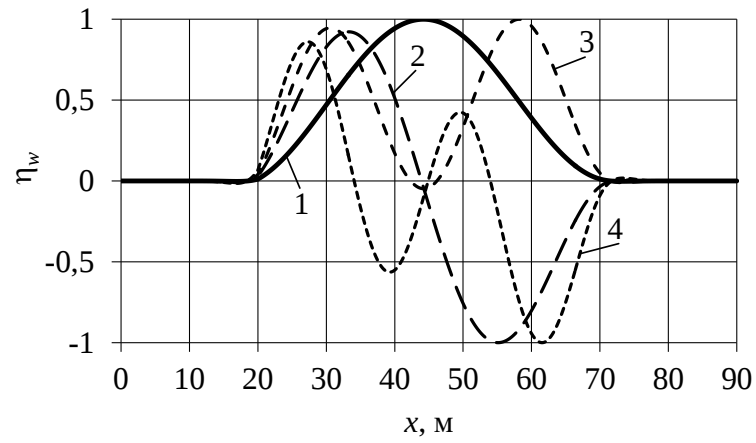
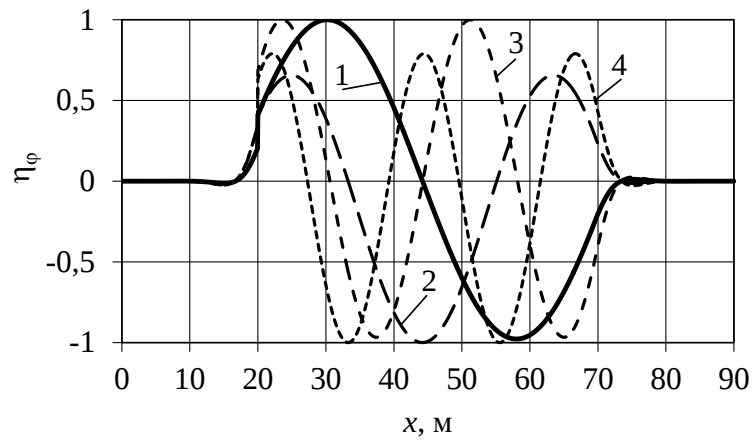
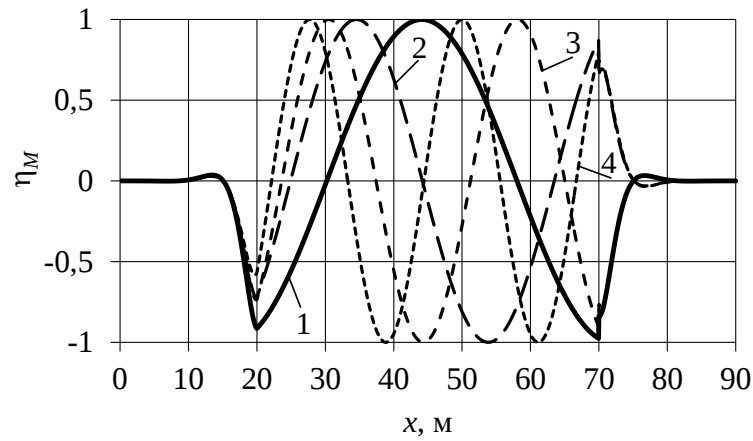
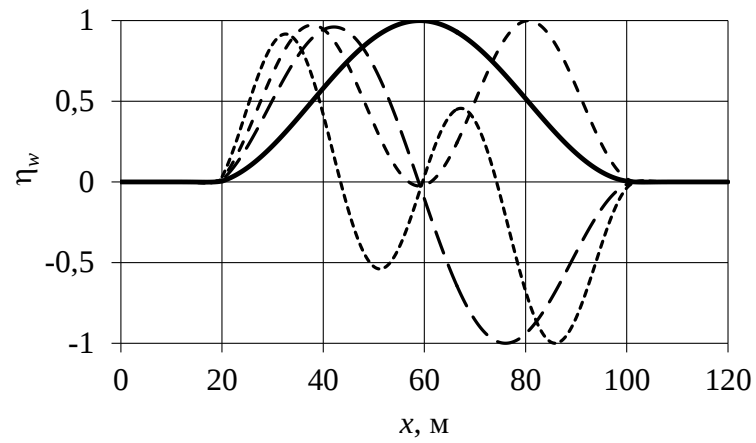
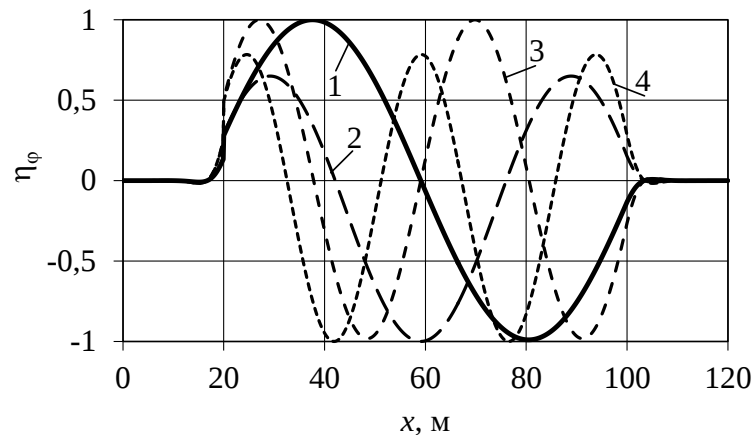
*a**б**в*

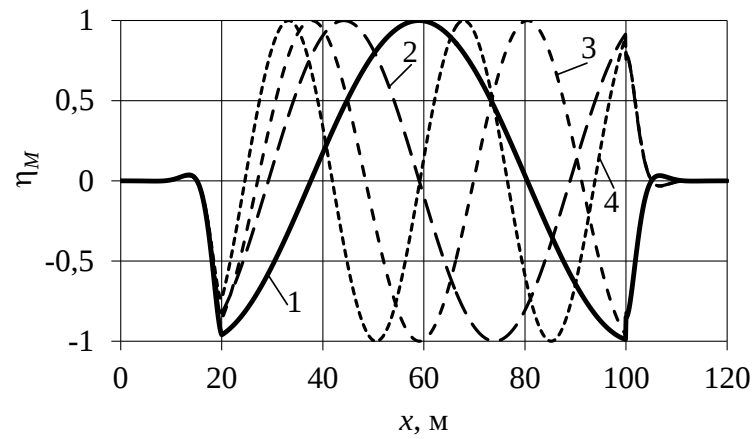
Рисунок 3.16 – Форми прогинів (*a*), кутів повороту поперечних перерізів (*б*) і згинальних моментів (*в*) трипрогонової ділянки трубопроводу з місцевим ослабленням на межі першого і другого прогонів (довжини підземних прогонів становлять 20 м а надземного – 50 м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)



a

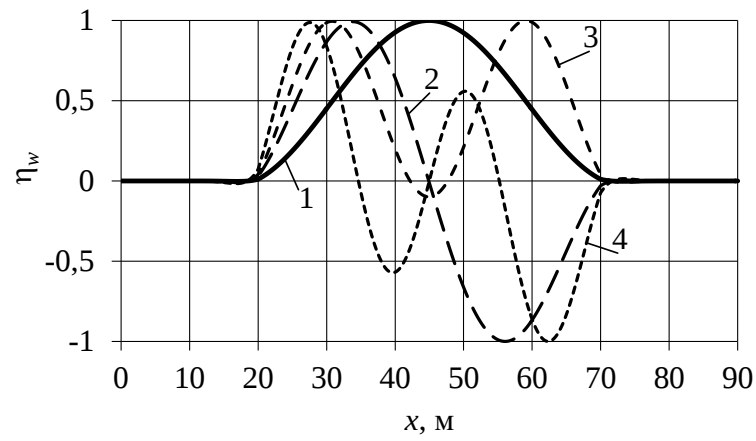


б

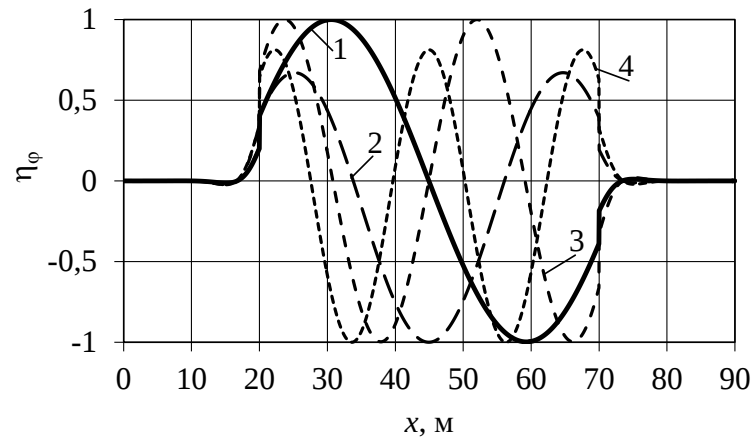


в

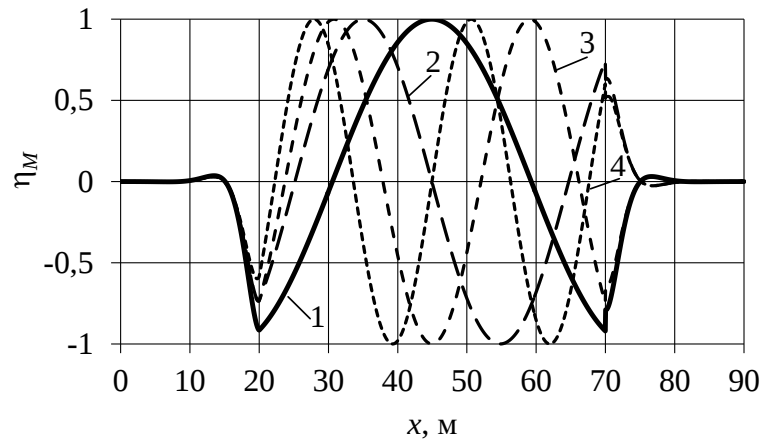
Рисунок 3.17 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) трипрогонової ділянки трубопроводу з місцевим ослабленням на межі першого і другого прогонів (довжини підземних прогонів становлять 20 м а надземного – 80 м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)



a

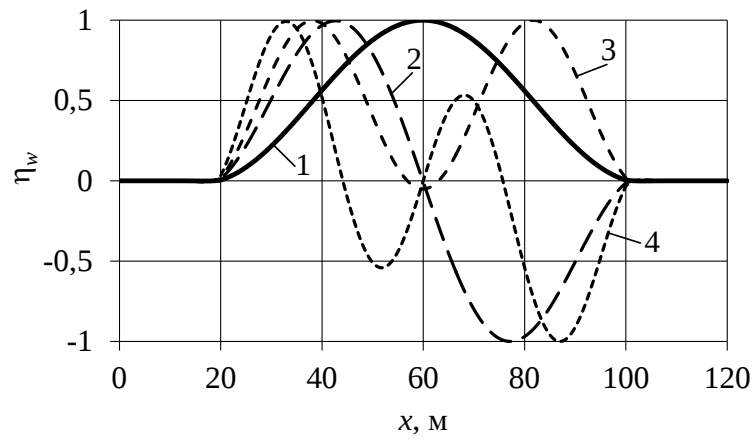


б

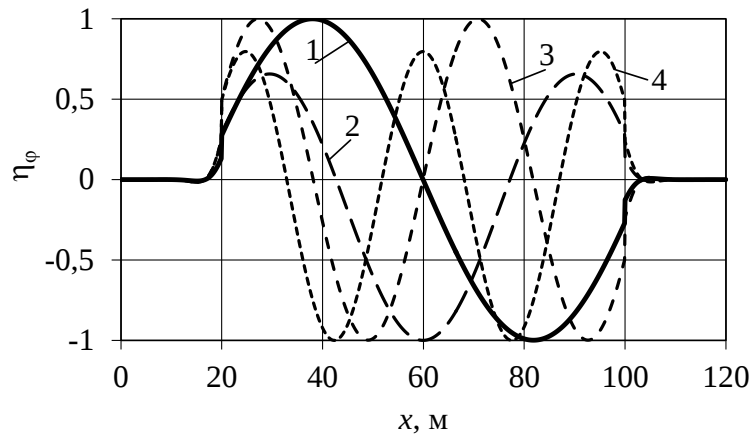


в

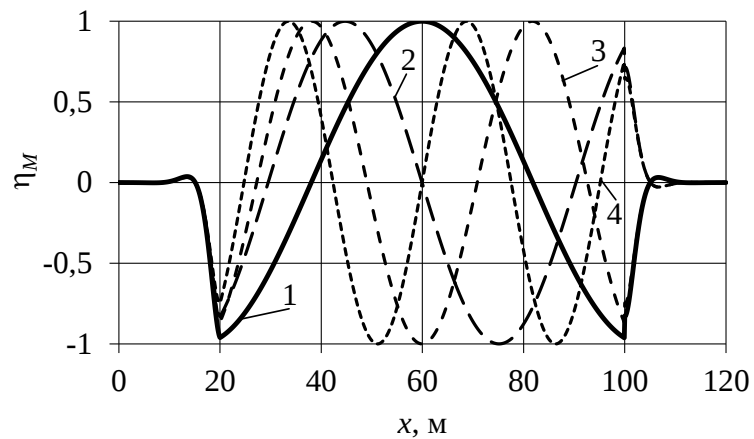
Рисунок 3.18 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) трипрогонової дільниці трубопроводу з місцевими ослабленнями на межах сусідніх прогонів (довжини підземних прогонів становлять 20 м, а надземного – 50 м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)



а



б



в

Рисунок 3.19 – Форми прогинів (а), кутів повороту поперечних перерізів (б) і згинальних моментів (в) трипрогонової дільниці трубопроводу з місцевими ослабленнями на межах сусідніх прогонів (довжини підземних прогонів становлять 20 м, а надземного – 80 м; позначення кривих відповідають порядковим значенням критичної сили)

3.6. Висновки

1. Побудована математична модель напружено-деформованого стану трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу, що включає надземну і прилеглі до неї підземні ділянки і перебуває під дією температурних навантажень. Проаналізовані умови виникнення осьового проковзування труби відносно ґрунту та одержані аналітичні залежності для визначення довжини відрізка підземної ділянки, на якому трубопровід деформується з проковзуванням, а також формули для визначення поздовжніх зусиль, переміщень і деформації труби на надземній та на підземних ділянках.

2. Показано, що із збільшенням довжини і перепаду температури надземної ділянки магістрального трубопроводу абсолютна величина зусилля стиску цієї ділянки, а також довжина відрізка підземної ділянки, на якому труба деформується з проковзуванням відносно ґрунту, значно зростають. Із збільшенням внутрішнього тиску в трубі абсолютна величина зусилля стиску надземної ділянки зменшується. Довжина відрізка підземної ділянки, на якому труба деформується з проковзуванням, від тиску газу в трубі не залежить. З огляду на можливу втрату стійкості, найнебезпечнішим випадком навантаження надземної ділянки трубопроводу слід вважати випадок стискання незаповненої газом труби за максимального температурного перепаду.

3. В процесі діагностування дефектності зігнутої частини експлуатованої протягом 40 років відвідної від газокompресорної станції труби зовнішнім діаметром 219 мм і номінальною товщиною стінки 18 мм встановлено, що до важливих чинників, що можуть істотно впливати на стійкість надземних ділянок магістральних трубопроводів, відносяться локальні ослаблення труб у вигляді обширних зон воднем ініційованого розшарування металу, яке може виникнути за наявності структурно-металургійних дефектів. Тріщина виявлена внаслідок реакції товщиноміра на макродефекти всередині стінки труби, мала розміри 380 мм уздовж осі та 240 мм по серединному колу пореречного перерізу і була розташована ближче до зовнішньої поверхні труби, що вказує на істотну роль у процесі розвитку розшарування робочих напружень, обумовлених тиском газу

в трубі. Вибірковий металографічний аналіз низьковуглецевої сталі 20 підтвердив наявність макропошкодженості стінки труби. Сильне розкриття тріщин вказує на існування в них тисків, достатніх для пластичного деформування металу у вершині тріщини.

4. Для оцінки впливу тривалої експлуатації матеріалу труби на його механічні характеристики проводили випробовування на розтяг зразків, що були вирізані уздовж труби, довжина і діаметр робочої частини яких, згідно з ДСТУ, становили 25 і 5 мм відповідно, а також укорочених зразків, вирізаних із труби у поздовжньому та в радіальному напрямках, робоча частина яких мала форму рівця мінімальним діаметром 5 мм і радіусом заокруглення 5 мм. Порівнювали характеристики металу, визначені на прямій ділянці трубопроводу поблизу його зігнутої частини, а також у стиснутій та в розтягнутій зонах. Показники міцності укорочених зразків виявилися вищими у порівнянні з відповідними показниками звичайних зразків, що пояснюється особливістю форми зразків. Радіальним зразкам властива менша міцність, ніж осьовим, оскільки в них поверхня руйнування проходить вздовж волоком вальцювання. Незалежно від типу зразків та напрямку їх вирізання, міцність металу розтягнутої частини труби для усіх випадків була більшою, а для стиснутої частини – меншою у порівнянні з прямою ділянкою. Це свідчить про те, що упродовж тривалої експлуатації матеріал деформаційно зміцнюється залежно від рівня робочих напружень у ньому, незважаючи на те, що ці напруження є значно меншими від границі текучості. Пульсація тиску газу на виході з газокompресорної станції та підвищена температура металу сприяють його деформаційному зміцненню.

5. За допомогою укорочених радіальних зразків виявлено різкий спад показника пластичності ψ_R для металу всіх досліджуваних зон в процесі експлуатації, що вказує на слабку адгезію між поздовжніми волокнами структури. Тобто, тривала експлуатація призвела до інтенсивної деградації металу труби, яка проявилась саме в ослабленні когезивної міцності між витягнутими включеннями і матрицею, а водень сприяв цьому процесу. Разом з тим, спостерігали відмінності між пластичністю металу різних зон: $\psi_R = 38,7; 30,0$ і $34,8\%$ для прямої частини,

розтягнутої і стисненої зон зігнутої частини труби відповідно. Це означає, що за характеристикою ψ_R метал не тільки розтягнутої, але і стиснутої зони деградував під час експлуатації інтенсивніше, ніж матеріал прямої частини труби. Що стосується порівняння властивостей матеріалу різних зон труби, то саме розтягнута зона, у якій виявлено обширне розшарування, характеризується мінімальною пластичністю. І якщо при $\psi_R \approx 35\%$ запас пластичності ще був достатнім, щоби не спричинити макророзшарування, то вже $\psi_R \approx 30\%$ можна вважати граничним, причому не тільки для реалізації спричиненого воднем розшарування, а й для виходу підповерхневого макродефекту на зовнішню поверхню.

6. Локальне ослаблення трубопроводу внаслідок макророзшарування конструкційної сталі може призвести до істотного зменшення його залишкової міцності та жорсткості. Як показують результати обчислень, внаслідок виникнення системи тріщин у відшарованій частині стінки труби, її випучування і втрати несівної здатності, згинна жорсткість локально ослабленої зони трубопроводу може зменшитися на 26 – 51%.

7. Побудована математична модель трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу, яка включає надземну і зв'язані з нею підземні ділянки, з урахуванням пружної взаємодії труби з основою, а також можливого локального ослаблення труби на межах сусідніх ділянок. На розрахункових прикладах показано, що в реальних умовах експлуатації магістральних трубопроводів температурні перепади можуть призвести до втрати статичної стійкості надземних ділянок. Зростання довжини надземної ділянки трубопроводу, а також податливості локально ослаблених зон призводить до збільшення гнучкості і коефіцієнта зведеної довжини пружної механічної системи та істотно зменшує критичне навантаження, що необхідно враховувати під час проектування магістральних трубопроводів.

РОЗДІЛ 4

СТІЙКІСТЬ БАГАТОПРОГОНОВИХ ВИСОТНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

4.1. Стійкість і вільні коливання висотної конструкції

Розглянемо розрахункову схему висотної споруди, яка має вигляд багатопрогінного вертикального стрижня, пружно закріпленого на нерухомій основі (рис. 4.1). Ділянки споруди довжинами $l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ розмежовані опорними вузлами з деформівними елементами (відтяжками або скісними підпорами) 1, 2, ..., n . Жорсткості пружних ланок у вертикальному, горизонтальному та обертальному напрямках позначаємо як $c_{xi}, c_{yi}, c_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$); взаємні квазіпружні коефіцієнти — як $c_{xyi}, c_{x\alpha i}, c_{y\alpha i}$. На межах ділянок з металоконструкцією вишки жорстко зв'язані вантажі масами $m_1, m_2, \dots, m_n$ і моментами інерції $J_1, J_2, \dots, J_n$, закріплені з ексцентриситетами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ відносно осі споруди. Як тверді тіла (вантажі) розглядаємо кронблок, площадки для обслуговування бурової установки з обладнанням для автоматизації спускопідіймальних операцій, платформу основи вишки; в окремих випадках до кріпильних вузлів, розташованих на межах ділянок, зводимо також розподілені маси довгомірних конструкцій (трапів тощо).

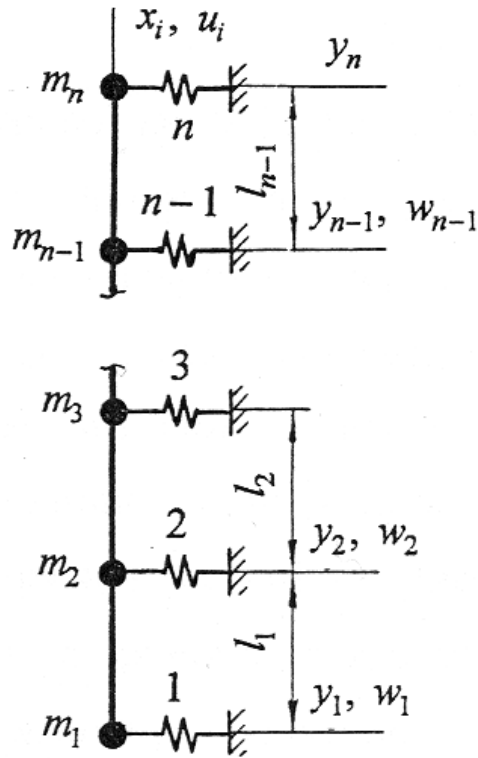


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема бурової вишки.

Для того, щоб записати рівняння руху споруди, скористаємося декартовими координатними системами x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) з початками у нижніх крайніх перерізах ділянок. Поздовжні і поперечні переміщення точок осі вишки позначаємо як u_i та w_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Поздовжній стиск бурової вишки силами, що діють з боку талевого каната на кронблок, і силами ваги враховуємо за допомогою прикладених до центрів крайніх перерізів ділянок статичних навантажень, направлених вздовж осі недеформованої конструкції. Відтак, внутрішні вертикальні сили, сталі в межах окремих ділянок стрижня, входять до рівнянь поперечних коливань як постійні коефіцієнти.

Оскільки пружна механічна система, що розглядається, лінійна, під час складання рівнянь поздовжніх коливань елементів вишки статичні навантаження і початкові деформації до уваги не беремо. Вказані чинники легко враховуються на основі принципу суперпозиції.

Розміри поперечного перерізу i , відповідно, пружно-інерційні властивості баштової вишки пірамідальної конструкції змінюються з висотою, що визначає певні особливості динамічного розрахунку таких споруд. У загальному випадку в межах окремої ділянки площу A_i і осьовий момент інерції I_i поперечного перерізу вишки, коефіцієнт κ_i , за допомогою якого враховуються деформації зсуву, усереднену густину матеріалу ρ_i та вертикальну стискаючу силу P_i можна вважати неперервними функціями відносної поздовжньої координати $\xi_i = x_i/l_i$. Поздовжні та поперечні коливання стрижня зі змінними параметрами описуються рівняннями з частковими похідними, що мають змінні коефіцієнти. Це значно ускладнює розв'язання задач динаміки аналітичними методами і робить доцільним застосування числових методів аналізу.

Для виконання наближених розрахунків коливальних явищ можна апроксимувати параметри конструкції кусково-сталими залежностями. Поряд із простотою методу, що ґрунтується на знаходженні аналітичних розв'язків рівнянь з постійними коефіцієнтами, його суттєвим недоліком є складність прогнозування точності аналізу, який залежить від способу ділення споруди на ділянки.

Розглянемо уточнену математичну модель висотної конструкції, яка дає можливість урахувати будь-які залежності геометричних чи пружно-інерційних параметрів перерізів від поздовжніх координат ділянок.

Рівняння руху ділянок споруди в поздовжньому напрямі запишемо у вигляді

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_i} = \frac{l_i N_i}{EA_i}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial \xi_i} = -l_i \rho_i A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.1)$$

де E – модуль пружності матеріалу першого роду; ρ_i – усереднена густина матеріалу, яка визначається як відношення погонної маси вишки μ_i до сумарної площі поперечного перерізу основних несівних елементів; $N_i(\xi_i, t)$ – поздовжня сила; t – час.

Аналогічно записуємо рівняння поперечних коливань ділянок вишки

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_i}{\partial \xi_i} &= \frac{l_i \kappa_i G A_i}{\kappa_i G A_i - P_i} \varphi_i + \frac{l_i}{\kappa_i G A_i - P_i} Q_i, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_i} = -\frac{l_i}{EI_i} M_i, \\ \frac{\partial M_i}{\partial \xi_i} &= \frac{l_i \kappa_i G A_i}{\kappa_i G A_i - P_i} Q_i + \frac{l_i \kappa_i G A_i P_i}{\kappa_i G A_i - P_i} \varphi_i - l_i \rho_i I_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \xi_i} = l_i \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1),\end{aligned}\quad (4.2)$$

де G – модуль пружності матеріалу другого роду; $\varphi_i(\xi_i, t)$ – кут повороту поперечного перерізу складеного стрижня від дії згинальних моментів; $Q_i(\xi_i, t)$ – поперечна сила; $M_i(\xi_i, t)$ – згинальний момент.

Беручи до уваги гармонічний характер коливального процесу, зводимо рівняння (4.1), (4.2) до вигляду

$$\frac{dF_{xi}(\xi_i)}{d\xi_i} = D_{xi}(\xi_i)F_{xi}(\xi_i), \quad \frac{dF_{yi}(\xi_i)}{d\xi_i} = D_{yi}(\xi_i)F_{yi}(\xi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.3)$$

де

$$F_{xi} = \text{col}(U_i(\xi_i), N_{0i}(\xi_i)), \quad F_{yi} = \text{col}(W_i(\xi_i), \Phi_i(\xi_i), M_{0i}(\xi_i), Q_{0i}(\xi_i)),$$

$$D_{xi}(\xi_i) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l_i}{\chi_i} \\ l_i \gamma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{yi}(\xi_i) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{l_i \beta_i}{\beta_i - P_i} & 0 & \frac{l_i}{\beta_i - P_i} \\ 0 & 0 & -\frac{l_i}{\alpha_i} & 0 \\ 0 & \frac{l_i P_i \beta_i}{\beta_i - P_i} + l_i \delta_i & 0 & \frac{l_i \beta_i}{\beta_i - P_i} \\ -l_i \gamma_i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тут $\alpha_i = EI_i$; $\beta_i = \kappa_i G A_i$; $\gamma_i = \rho_i A_i \omega^2$; $\delta_i = \rho_i I_i \omega^2$; $\chi_i = EA_i$, причому,

ω – циклічна частота гармонічних коливань.

Співвідношення (4.3) подамо у вигляді матричної рівності

$$\frac{dF_i(\xi_i)}{d\xi_i} = D_i(\xi_i)F_i(\xi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (4.4)$$

де

$$F_i(\xi_i) = \text{col}(F_{xi}(\xi_i), F_{yi}(\xi_i)), \quad D_i(\xi_i) = \text{diag}(D_{xi}(\xi_i), D_{yi}(\xi_i)).$$

Матричний вираз (4.4) включає дві незалежних системи диференціальних рівнянь (4.3) зі змінними коефіцієнтами. Інтегруючи вказані рівняння одним із числових методів, визначаємо геометричні та силові параметри $U_i, N_{0i}, W_i, \Phi_i, M_{0i}, Q_{0i}$ у довільному перерізі вишки за значеннями цих параметрів на початку відповідної ділянки. Дану процедуру утотожнюємо з виконанням оператора $L_{Fi}(\xi_i)$ над початковими умовами $F_i(0)$. Тоді зв'язок матриць-колонок геометричних та силових параметрів на кінцях ділянки визначатиметься залежністю

$$F_i(1) = L_{Fi}(1) \cdot F_i(0). \quad (4.5)$$

Граничні умови, сформульовані для нижнього кінця споруди, стиків сусідніх ділянок і верхнього її кінця, після виключення функції часу, набувають вигляду

$$F_1(0) = H_{F1} F_0, \quad F_i(0) = H_{Fi} F_{i-1}(1) \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \quad F_n = H_{Fn} F_{n-1}(1), \quad (4.6)$$

де

$$F_0 = \text{col}(U_1(0), 0, W_1(0), \Phi_1(0), 0, 0), \quad F_n = \text{col}(U_{n-1}(1), 0, W_{n-1}(1), \Phi_{n-1}(1), 0, 0),$$

$$H_{F1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{x1} & 0 & c_{xy1} & -\Omega_{\varepsilon1} & 0 & 0 & -P_{0x1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{\varepsilon1} & 0 & c_{y\alpha1} & -\Omega_{\alpha1} & 0 & 0 & -M_{0\alpha1} - \varepsilon_i P_{0xi} \\ c_{xy1} & 0 & \Omega_{y1} & -c_{y\alpha1} & 0 & 0 & -P_{0y1} \end{pmatrix},$$

$$H_{Fi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{xi} & 1 & c_{xyi} & -\Omega_{\varepsilon i} & 0 & 0 & -P_{0xi} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{\varepsilon i} & 0 & c_{y\alpha i} & -\Omega_{\alpha i} & 1 & 0 & -M_{0\alpha i} - \varepsilon_i P_{0xi} \\ c_{xyi} & 0 & \Omega_{yi} & -c_{y\alpha i} & 0 & 1 & -P_{0yi} \end{pmatrix},$$

$$H_{Fn} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_{xn} & 1 & c_{xyn} & -\Omega_{\varepsilon n} & 0 & 0 & -P_{0xn} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{x\alpha n}^* & -\varepsilon_n & c_{y\alpha n}^* & -\Omega_{\alpha n} & 1 & 0 & -M_{0\alpha n} \\ c_{xyn} & 0 & \Omega_{yn} & -c_{y\alpha n} & 0 & 1 & -P_{0yn} \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\Omega_{xi} = c_{xi} - m_i \omega^2, \quad \Omega_{yi} = c_{yi} - m_i \omega^2, \quad \Omega_{\varepsilon i} = c_{x\alpha i} - m_i \varepsilon_i \omega^2,$$

$$\Omega_{\alpha i} = c_{\alpha i} - I_i \omega^2 - m_i \varepsilon_i \omega^2 \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad \Omega_{\alpha n} = c_{\alpha n} - J_n \omega^2 - \varepsilon_n c_{x\alpha n},$$

$$c_{x\alpha n}^* = c_{x\alpha n} - \varepsilon_n c_{xn}, \quad c_{y\alpha n}^* = c_{y\alpha n} - \varepsilon_n c_{yn},$$

P_{0xi} , P_{0yi} , $M_{0\alpha i}$ – амплітуди навантажень. У випадку вільних коливань розширені матриці H_{Fi} ($i = 1, 2, \dots, n$) правих крайніх колонок не мають.

Приймаючи до уваги співвідношення (4.5), (4.6), записуємо рівняння зв'язку параметрів на кінцях споруди

$$F_n = H_{Fn} \left\{ \prod_{j=n-1}^1 [L_{Fj}(1) H_{Fj}] \right\} F_0. \quad (4.7)$$

Визначивши за допомогою співвідношення (4.7) реакції нульових компонент матриці-колонки F_n на одиничні значення відмінних від нуля елементів матриці-колонки F_0 , формуємо неоднорідну або однорідну систему алгебричних рівнянь у залежності від характеру динамічного процесу.

Подальший аналіз вільних та вимушених коливань виконуємо згідно з матричним методом початкових параметрів [13]. Амплітудні функції

переміщень та внутрішніх силових чинників визначаємо, інтегруючи диференціальні рівняння (4.4). Для цього обчислюємо початкові параметри ділянок за допомогою співвідношень

$$F_1(0) = H_{F1} \cdot F_0, \quad F_i(0) = \left\{ \prod_{j=i}^2 [H_{Fj} L_{F,j-1}(1)] \right\} H_{F1} F_0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

що впливають із (4.5), (4.6).

Отже, розглянута математична модель є достатньо загальною і дає можливість аналізувати вільні та вимушені поздовжньо-поперечні коливання висотних споруд зі змінними параметрами, причому, у рівняннях поперечних коливань вишки (4.2) враховано деформації зсуву та інерцію обертального руху поперечних перерізів згідно з теорією балок С. П. Тимошенка.

У зв'язку з необхідністю числового інтегрування диференціальних рівнянь амплітудних функцій (4.4) реалізація методики динамічного розрахунку висотних споруд зі змінними параметрами вимагає дещо більших затрат комп'ютерного часу у порівнянні з методиками, орієнтованими на розрахункові моделі сталого поперечного перерізу. Однак, це не створює суттєвих перешкод для практичного застосування викладеної математичної моделі. Вона дає можливість підвищити точність розрахунку коливальних процесів у баштових бурових вишках та інших висотних спорудах зі змінними параметрами, а також проаналізувати ефективність застосування для цього спрощених методів та алгоритмів.

Розглянемо результати розрахунку власних частот і форм поперечних коливань бурової вишки ВБ 53 × 320 як споруди, згинна жорсткість та осьове навантаження якої змінюються з висотою. Основні параметри вишки, визначені з урахуванням її розбиття на дев'ять ділянок, наведено в табл. 4.1. Сумарна площа поперечного перерізу колон (ніг) вишки є сталою величиною на всій довжині металоконструкції. Усереднену густину матеріалу визначено для кожної ділянки окремо. Коефіцієнт, за допомогою якого враховуються деформації зсуву, прийнято постійним і однаковим для всіх ділянок. Не вказані у табл. 4.1

дискретні пружно-інерційні параметри механічної системи вважали рівними нулю.

Осьовий момент інерції поперечного перерізу споруди на кожній з ділянок визначали за допомогою залежності

$$I_i = I_0 + [a - k(h_{0i} + l_i \xi_i)]^2 A,$$

де I_0 – сума центральних осьових моментів інерції колон; a, b – довжини сторін нижньої і верхньої основ вишки; k – сталий коефіцієнт,

$$k = (a - b) / \left(2 \sum_{j=1}^{n-1} l_j \right);$$

h_{0i} – відстань від нижньої основи споруди до початку i -ї ділянки,

$$h_{01} = 0, \quad h_{0i} = \sum_{j=1}^{i-1} l_j \quad (i = 2, 3, \dots, n-1).$$

Статичну осьову силу в металоконструкції вишки від дії власної ваги обчислювали за формулами

$$P_i = \left[\sum_{j=i+1}^{n-1} A_j l_j \rho_j + \sum_{j=i+1}^n m_j + A_i l_i \rho_i (1 - \xi_i) \right] g \quad (i = 1, 2, \dots, n-2);$$

$$P_{n-1} = [m_n + A_{n-1} l_{n-1} \rho_{n-1} (1 - \xi_{n-1})] g.$$

Таблиця 4.1 – Параметри бурової вишки ВБ 53 × 320, що має дев'ять ділянок змінного поперечного перерізу

Параметр	Одиниця виміру	Числове значення	Параметр	Одиниця виміру	Числове значення
E	МПа	210000	ρ_8	кг/м ³	13207
G	МПа	81000	ρ_9	кг/м ³	14825
l_1	м	5	$\kappa_1 \dots \kappa_9$	—	0,15
$l_2 \dots l_9$	м	6	m_1	кг	55000
a	м	10	m_5	кг	3057
b	м	2	m_7	кг	2203
$A_1 \dots A_9$	м ²	0,03512	m_{10}	кг	9260
I_0	м ⁴	$2,388 \cdot 10^{-4}$	J_1	кг·м ²	220000
ρ_1	кг/м ³	21794	J_5	кг·м ²	32530
ρ_2	кг/м ³	20411	J_7	кг·м ²	12260
ρ_3	кг/м ³	19837	J_{10}	кг·м ²	5926
ρ_4	кг/м ³	17749	c_{y1}	МН/м	1200
ρ_5	кг/м ³	14299	c_{y6}	кН/м	532,6
ρ_6	кг/м ³	14023	c_{y9}	кН/м	432,7
ρ_7	кг/м ³	13330	c_{a1}	МН·м/рад	2600

Значення чотирьох нижчих власних частот вишки визначено для характерних випадків її закріплення і подано у табл. 4.2.

На рис. 4.2 зображено амплітудні функції, що відповідають поперечним коливанням пружно закріпленої в основі вишки. Вважали, що споруда додатково закріплена за допомогою відтяжок, розташованих у два яруси. Позначення кривих на рисунках відповідають порядкових номерам власних частот. Криві характеризують особливості деформованого стану споруди та зміни згинального моменту з висотою.

Таблиця 4.2 – Частоти вільних поперечних коливань бурової вишки ВБ 53×320, визначені з урахуванням залежності згинальної жорсткості від поздовжньої координати

Спосіб закріплення до основи	Число ярусів відтяжок	Значення частоти, Гц			
		1	2	3	4
<i>Пружне закріплення</i>	0	0,8966	5,1715	12,419	19,746
	1	0,9875	5,2216	12,422	19,752
	2	1,1903	5,2222	12,429	19,758
<i>Защемлення</i>	0	1,5946	5,7556	12,615	20,424
	1	1,6293	5,8085	12,617	20,432
	2	1,7630	5,8085	12,624	20,439

Результати розрахунків, наведені у табл. 4.3, свідчать про те, що деформації зсуву мало впливають на першу власну частоту механічної системи. Однак, на частоти з вищими порядковими номерами цей вплив є більш істотним. Так, збільшення коефіцієнта κ_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) від 0,15 до 1 приводить до підвищення п'яти нижчих частот вільних коливань бурової вишки без відтяжок на 11,42%; 19,82%; 42,38%; 15,88% і 46,71%. Для споруди з відтяжками, розміщеними у два яруси, зростання власних частот становить відповідно 2,00%; 19,46%; 42,32%; 15,82% та 46,75%.

Результати, наведені у табл. 4.4, характеризують вплив осьового навантаження P , яке діє на вишку з боку талевого механізму, на частоти вільних поперечних коливань споруди. Розрахунки виконано для значень коефіцієнтів $\kappa_i = 0,15$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Найбільшою мірою осьове навантаження впливає на першу власну частоту. Із зростанням порядкового номера частоти вплив вказаного чинника зменшується. Зростання чи спадання осьового навантаження в межах реальних значень не приводить до істотних змін характеристик частотного спектру. Так, за збільшення сили P від 0 до 4000 кН перша власна частота вишки, не закріпленої відтяжками, зменшується на 6,76%, а споруди з відтяжками – на 3,86%. Спадання другої власної частоти відповідно становить 1,54% і 1,50%.

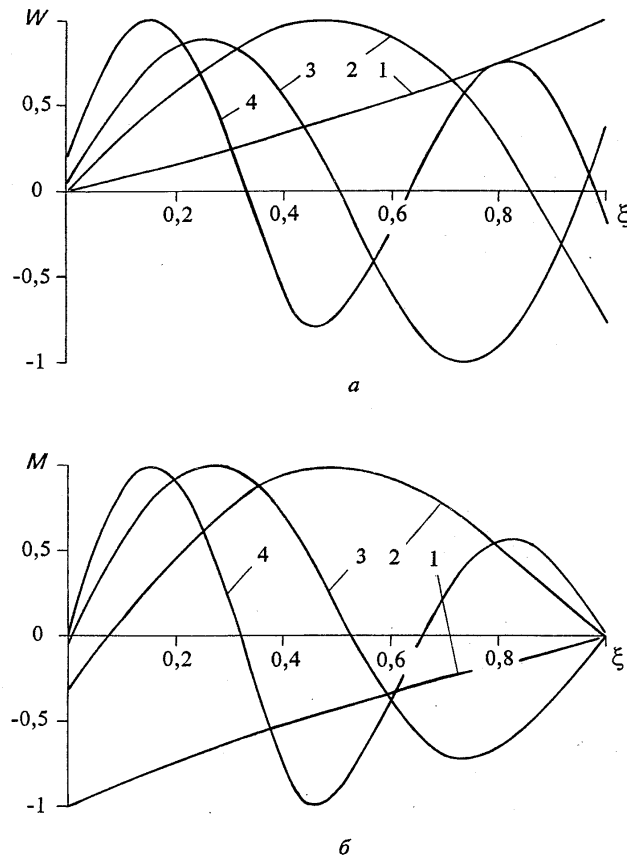


Рисунок 4.2 – Графіки амплітудних функцій прогинів (а) і згинальних моментів (б) пружно закріпленої в основі бурової вишки

До найбільш інтенсивних навантажень, що збуджують поперечні коливання висотної споруди під час поглиблення свердловини, слід віднести сили взаємодії зігнутої колони бурильних труб зі столом ротора. Частота першої гармоніки цих збуджень збігається з частотою обертання колони, частота другої гармоніки – кратна вказаній частоті і числу шарошок долота. Баштовими буровими вишками ВБ 53×320 у багатьох випадках комплектують установки Уралмаш 3Д-76, Уралмаш 4Э-76, а також модернізовані бурові комплекси БУ 4000Д-1, Уралмаш 4000Э-1. Згідно з заводськими даними, частота обертання ротора вказаних установок з дизельним приводом знаходиться в межах $0,33 \dots 3,87 \text{ с}^{-1}$, установок з електроприводом – $0,33 \dots 2,7 \text{ с}^{-1}$. Порівняння цих діапазонів частот з результатами обчислень, поданими у табл. 4.2, показує, що в процесі буріння свердловини можуть виникати резонансні коливання висотних споруд. Цього явища необхідно уникати під час експлуатації бурових установок.

Таблиця 2.7 – Частоти вільних поперечних коливань бурової вишки ВБ 53 × 320, що відповідають різним значенням коефіцієнтів $\kappa_1 \dots \kappa_9$

$\kappa_1 \dots \kappa_9$	Значення частот, Гц				
	1	2	3	4	5
<i>Без відтяжок</i>					
0,15	0,8966	5,1715	12,419	19,746	23,193
0,20	0,9060	5,4223	13,500	21,321	24,196
0,30	0,9158	5,7110	14,902	22,281	26,748
0,40	0,9207	5,8722	15,767	22,536	28,807
0,50	0,9238	5,9751	16,352	22,658	30,316
0,60	0,9258	6,0465	16,770	22,733	31,447
0,70	0,9273	6,0989	17,085	22,786	32,319
0,80	0,9284	6,1390	17,329	22,826	33,008
0,90	0,9292	6,1707	17,523	22,857	33,566
1,00	0,9299	6,1963	17,682	22,882	34,026
<i>З відтяжками</i>					
0,15	1,1903	5,2222	12,429	19,758	23,197
0,20	1,1970	5,4708	13,508	21,329	24,205
0,30	1,2040	5,7571	14,910	22,284	26,762
0,40	1,2075	5,9170	15,775	22,538	28,822
0,50	1,2097	6,0192	16,360	22,659	30,332
0,60	1,2111	6,0900	16,778	22,735	31,463
0,70	1,2122	6,1420	17,092	22,787	32,334
0,80	1,2130	6,1818	17,336	22,827	33,024
0,90	1,2136	6,2132	17,531	22,858	33,581
1,00	1,2141	6,2387	17,689	22,883	34,041

Таблиця 4.4 – Частоти вільних поперечних коливань бурової вишки ВБ 53×320, що відповідають різним осьовим навантаженням

P, кН	Значення частот, Гц				
	1	2	3	4	5
<i>Без відтяжок</i>					
0	0,8966	5,1715	12,419	19,746	23,193
500	0,8893	5,1617	12,407	19,734	23,190
1000	0,8819	5,1518	12,395	19,722	23,186
1500	0,8744	5,1419	12,383	19,710	23,183
2000	0,8669	5,1320	12,371	19,697	23,179
2500	0,8593	5,1221	12,359	19,685	23,176
3000	0,8516	5,1121	12,346	19,673	23,173
3500	0,8439	5,1021	12,334	19,661	23,169
4000	0,8360	5,0921	12,322	19,649	23,166
<i>З відтяжками</i>					
0	1,1903	5,2222	12,429	19,758	23,197
500	1,1847	5,2125	12,416	19,746	23,194
1000	1,1790	5,2027	12,404	19,734	23,191
1500	1,1733	5,1930	12,392	19,722	23,187
2000	1,1676	5,1832	12,380	19,710	23,184
2500	1,1618	5,1734	12,368	19,698	23,180
3000	1,1560	5,1636	12,356	19,685	23,177
3500	1,1502	5,1537	12,343	19,673	23,173
4000	1,1443	5,1438	12,331	19,661	23,170

Варіювання інерційними і жорсткісними характеристиками споруди дає можливість змінювати значення власних частот у широких межах. Це дає можливість здійснювати добір раціональних параметрів вишок, що забезпечує підвищення надійності і довговічності утримувальних конструкцій та інших елементів бурових установок.

4.2. Математична модель поперечних коливань висотної конструкції під дією осьового навантаження

Розглянемо параметричні згинні коливання багатопрогонової висотної конструкції, зображеної на рис. 4.3, у її половинній площині. Прийняті позначення: $l_1, l_2, \dots, l_n$ – довжини прогонів; c_i, v_i ($i=1, 2, \dots, n+1$) – коефіцієнти жорсткості і коефіцієнти в'язкого тертя пружних опор у горизонтальному

напрямі; P – осьове навантаження; x_i ($i=1, 2, \dots, n$) – поздовжні координати перерізів прогонів з початками на нижніх кінцях прогонів; w_i ($i=1, 2, \dots, n$) – прогини відповідних прогонів.

Осьове навантаження конструкції задаємо у вигляді

$$P = P_0 + P_t \cdot T(t), \quad (4.8)$$

де P_0 – статична складова навантаження; P_t – амплітуда динамічної складової навантаження; $T(t)$ – періодична функція часу.

Рівняння параметричних коливань ділянок споруди записуємо у вигляді

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + [P_0 + P_t T(t)] \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} + A_i \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.9)$$

де E і ρ – модуль пружності першого роду і густина матеріалу конструкції; A_i, I_i – площі і осьові моменти інерції поперечних перерізів прогонів.

Розв'язки рівнянь з частинними похідними (4.9) відшукуємо у вигляді

$$w_i(x_i, t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{ij}(x_i) \tau_j(t), \quad (4.10)$$

де $W_{ij}(x_i)$ – власні форми коливань прогонів споруди (j – порядковий номер власної форми), $\tau_j(t)$ – періодична функція часу.

Для визначення власних частот і форм висотної конструкції запишемо рівняння її вільних коливань у вигляді

$$EI_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x_i^4} + A_i \rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.11)$$

Розв'язки рівнянь (4.11) повинні задовольняти крайові умови

$$w_1(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right|_{x_1=0} = 0; \quad (4.12)$$

$$w_{i+1}(0, t) = w_i(l_i, t), \quad \left. \frac{\partial w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}} \right|_{x_{i+1}=0} = \left. \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \right|_{x_i=l_i},$$

$$EI_{i+1} \frac{\partial^2 w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}^2} \Big|_{x_{i+1}=0} = EI_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^2} \Big|_{x_i=l_i} + J_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i \partial t^2} \Big|_{x_i=l_i} + c_{\phi i} \frac{\partial w_i(x_i, t)}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i},$$

$$EI_{i+1} \frac{\partial^3 w_{i+1}(x_{i+1}, t)}{\partial x_{i+1}^3} \Big|_{x_{i+1}=0} = EI_i \frac{\partial^3 w_i(x_i, t)}{\partial x_i^3} \Big|_{x_i=l_i} - m_i \frac{\partial^2 w_i(x_i, t)}{\partial t^2} \Big|_{x_i=l_i} - c_i w_i(l_i, t),$$

$$(i=1, 2, \dots, n-1); \quad (4.13)$$

$$EI_n \frac{\partial^2 w_n(x_n, t)}{\partial x_n^2} + J_n \frac{\partial^3 w_n(x_n, t)}{\partial x_n \partial t^2} \Big|_{x_n=l_n} + c_{\phi n} \frac{\partial w_n(x_n, t)}{\partial x_n} \Big|_{x_n=l_n} = 0,$$

$$EI_n \frac{\partial^3 w_n(x_n, t)}{\partial x_n^3} \Big|_{x_n=l_n} - m_n \frac{\partial^2 w_n(x_n, t)}{\partial t^2} \Big|_{x_n=l_n} - c_n w_n(l_n, t) = 0. \quad (4.14)$$

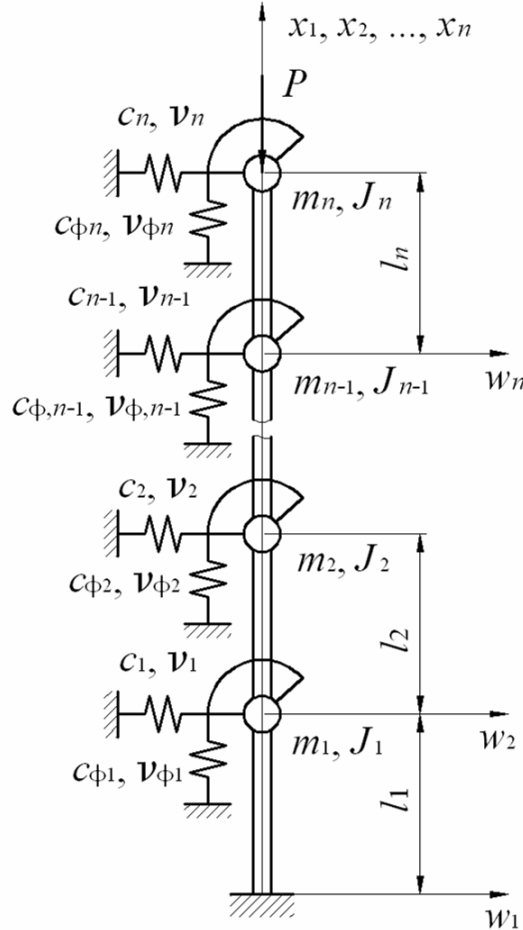


Рисунок 4.3 – Розрахункова схема багатопрогової висотної конструкції

Відшукуємо розв'язки рівнянь (4.11) у вигляді

$$w_i(x_i, t) = W_i(x_i) \cos \omega t \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.15)$$

де ω – власна частота.

Підставляючи вираз (4.15) до рівності (4.11) і розділяючи змінні, одержуємо рівняння амплітудних функцій

$$\frac{d^4 W_i(x_i)}{dx_i^4} - \lambda_i^4 W_i(x_i) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.16)$$

де

$$\lambda_i^4 = \frac{A_i \rho \omega^2}{EI_i}.$$

Відповідно до методу початкових параметрів, розв'язок диференціального рівняння (4.16) подаємо у вигляді

$$Y_i(x_i) = S_i(x_i) Y_i(0), \quad (4.17)$$

де

$$Y_i(x_i) = \text{col}[W_i(x_i), W_i'(x_i), W_i''(x_i), W_i'''(x_i)]; \quad (4.18)$$

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} \psi_{1i}(x_i) & \psi_{2i}(x_i) & \psi_{3i}(x_i) & \psi_{ni}(x_i) \\ \psi'_{1i}(x_i) & \psi'_{2i}(x_i) & \psi'_{3i}(x_i) & \psi'_{ni}(x_i) \\ \psi''_{1i}(x_i) & \psi''_{2i}(x_i) & \psi''_{3i}(x_i) & \psi''_{ni}(x_i) \\ \psi'''_{1i}(x_i) & \psi'''_{2i}(x_i) & \psi'''_{3i}(x_i) & \psi'''_{ni}(x_i) \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Тут $\psi_{1i}, \psi_{2i}, \psi_{3i}, \psi_{ni}$ – фундаментальна система інтегралів рівняння (4.16), що визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \psi_{1i}(x_i) &= \frac{1}{2} (\cos \lambda_i x_i + \text{ch } \lambda_i x_i); & \psi_{2i}(x_i) &= \frac{1}{2\lambda_i} (\sin \lambda_i x_i + \text{sh } \lambda_i x_i); \\ \psi_{3i}(x_i) &= \frac{1}{2\lambda_i^2} (-\cos \lambda_i x_i + \text{ch } \lambda_i x_i); & \psi_{ni}(x_i) &= \frac{1}{2\lambda_i^3} (-\sin \lambda_i x_i + \text{sh } \lambda_i x_i). \end{aligned} \quad (4.20)$$

З урахуванням співвідношень (4.15) крайові умови (4.12)–(4.14) перетворюємо до вигляду

$$W_1(0) = 0, \quad W_1'(0) = 0; \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
W_{i+1}(0) &= W_i(l_i), \quad W'_{i+1}(0) = W'_i(l_i), \\
EI_{i+1} W''_{i+1}(0) &= EI_i W''_i(l_i) - J_i \omega^2 W'_i(l_i) + c_{\phi i} W'_i(l_i), \\
EI_{i+1} W'''_{i+1}(0) &= EI_i W'''_i(l_i) + m_i \omega^2 W_i(l_i) - c_i W_i(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (4.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EI_n W''_n(l_n) - J_n \omega^2 W'_n(l_n) + c_n W'_n(l_n) &= 0, \\
EI_n W'''_n(l_n) + m_n \omega^2 W_n(l_n) - c_n W_n(l_n) &= 0. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

З урахуванням позначення (4.18) подаємо крайові умови (4.21)–(4.23) у матричному вигляді

$$Y_1(0) = \text{col}(0, 0, W''_1(0), W'''_1(0)); \quad (4.24)$$

$$Y_{i+1}(0) = R_i Y_i(l_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (4.25)$$

$$Y_{n+1} = R_n Y_n(l_n), \quad (4.26)$$

де

$$\begin{aligned}
R_i &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(c_{\phi i} - J_i \omega^2)}{EI_{i+1}} & \frac{I_i}{I_{i+1}} & 0 \\ \frac{(m_i \omega^2 - c_i)}{EI_{i+1}} & 0 & 0 & \frac{I_i}{I_{i+1}} \end{pmatrix}; \\
R_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (c_{\phi n} - J_n \omega^2) & EI_n & 0 \\ (m_n \omega^2 - c_n) & 0 & 0 & EI_n \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$Y_{n+1} = \text{col}(W_n(l_n), W'_n(l_n), 0, 0).$$

З урахуванням співвідношень (4.17), (4.24)–(4.26) записуємо матричну рівність

$$Y_{n+1} = \prod_{i=n}^1 R_i S_i(l_i) \cdot Y_1(0). \quad (4.27)$$

Реакції третього і четвертого елементів матриці-колонки Y_{n+1} на одиничні значення матриці-колонки $Y_1(0)$ позначаємо як r_{33} , r_{34} , r_{43} , r_{44} . Оскільки третій і четвертий елементи матриці-колонки Y_{n+1} , згідно з крайовими умовами, повинні дорівнювати нулю, одержуємо однорідну систему рівнянь

$$r_{33}W_1''(0) + r_{34}W_1'''(0) = 0; \quad r_{43}W_1''(0) + r_{44}W_1'''(0) = 0. \quad (4.28)$$

Для знаходження власних частот висотної споруди застосовуємо умову рівності нулю визначника системи рівнянь (4.28):

$$\begin{vmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.29)$$

Після знаходження заданого числа коренів частотного рівняння (4.29) визначаємо з точністю до сталого множника ненульові елементи матриці-колонки $Y_1(0)$. Матриці-колонки початкових параметрів решти ділянок обчислюємо за формулою

$$Y_i(0) = \prod_{j=i}^1 R_j S_j(l_j) Y_1(0), \quad (i = 2, 3, \dots, n). \quad (4.30)$$

що впливають із залежностей (4.17), (4.20).

За відомими початковими параметрами розраховуємо власні форми механічної системи, застосовуючи залежності (4.17) – (4.20).

Диференціальні рівняння для визначення статичної критичної сили P_k висотної конструкції записуємо як

$$\frac{d^4 W_i(x_i)}{dx_i^4} + k_i^2 \frac{d^2 W_i(x_i)}{dx_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \text{де} \quad k_i^2 = \frac{P_k}{EI_i} \quad (4.31)$$

Розв'язок диференціального рівняння (4.31), згідно з методом початкових параметрів, можна подати у формі (4.17), однак, квадратна матриця $S_i(x_i)$ у цьому випадку набуває вигляду

$$S_i(x_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & \frac{1}{k_i^2}(1 - \cos k_i x_i) & \frac{1}{k_i^3}(k_i x_i - \sin k_i x_i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{k_i} \sin k_i x_i & \frac{1}{k_i^2}(1 - \cos k_i x_i) \\ 0 & 0 & \cos k_i x_i & \frac{1}{k_i} \sin k_i x_i \\ 0 & 0 & -k_i \sin k_i x_i & \cos k_i x_i \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Розв'язки рівнянь (4.31) повинні задовольняти крайові умови, які можна одержати з рівностей (4.21)–(4.23) виключенням членів, що містять квадрат циклічної частоти. Тоді алгоритм обчислення значень критичної сили на основі застосування залежностей (4.24)–(4.26), (4.32) практично збігається з алгоритмом розрахунку власних частот.

Оскільки амплітудні функції, що описують форми вільних і параметричних коливань, а також форми прогинів конструкції в процесі втрати статичної стійкості є близькими між собою, їх ототожнюють [33]. Це дає можливість виразити другу і четверту похідні прогину конструкції через саму функцію прогину з диференціальних залежностей (4.16) і (4.33):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_i(x_i)}{dx_i^2} &= -\frac{A_i \rho \omega^2}{P_k} W_i(x_i) \\ \frac{d^4 W_i(x_i)}{dx_i^4} &= \frac{A_i \rho \omega^2}{EI_i} W_i(x_i) \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для окремо взятої форми параметричних коливань конструкції рівняння (4.9) з урахуванням залежності (4.10) зводимо до вигляду

$$EI_i \frac{d^4 W_i(x_i)}{dx_i^4} \tau + [P_0 + P_t T(t)] \frac{d^2 W_i(x_i)}{dx_i^2} \tau + A_i \rho W_i(x_i) \ddot{\tau} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.34)$$

Підставляючи у рівняння (4.34) вирази другої і четвертої похідних амплітудних функцій, одержуємо

$$\ddot{\tau} + \omega^2 \left[1 - \frac{P_0 + P_t T(t)}{P_k} \right] \tau = 0. \quad (4.35)$$

Для стержня з довільним закріпленням кінців, стиснутого осьовою силою P_0 , можна записати диференціальне рівняння (4.35) у вигляді

$$\ddot{\tau} + \lambda^2 \left[1 - \frac{P_t}{P_k - P_0} T(t) \right] \tau = 0, \quad (4.36)$$

де

$$\lambda = \omega \sqrt{1 - \frac{P_0}{P_k}}$$

Перетворимо рівняння (4.36), до вигляду

$$\ddot{\tau} + \lambda^2 [1 - 2\mu T(t)] \tau = 0, \quad (4.37)$$

де

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{P_t}{P_k - P_0}$$

Диференціальне рівняння (4.37) є рівнянням Хілла, яке у випадку гармонічного збудження коливань

$$T(t) = \cos \omega t$$

перетворюється у рівняння Мат'є

$$\ddot{\tau} + \lambda^2 (1 - 2\mu \cos \omega t) \tau = 0. \quad (4.38)$$

Істотною особливістю цього рівняння є те, що за певних співвідношень між його коефіцієнтами розв'язок рівняння зростає до безмежності. Такі розв'язки утворюють певні області на площині коефіцієнтів, які відповідають динамічній нестійкості.

4.3. Висновки

На основі ототожнення амплітудних функцій, що описують вільні і параметричні коливань, а також форми втрати статичної стійкості багатопрогонової висотної конструкції опрацьовано методику розрахунку на динамічну

стійкість згаданих механічних систем під дією періодичних осьових навантажень. Побудовано континуально-дискретну розрахункову модель для визначення форм деформування споруди та зведення задачі про динамічну стійкість конструкції до аналізу розв'язків диференціального рівняння Мат'є.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ВИСНОВКИ

Як показує аналіз особливостей функціонування довгомірних несних конструкцій машин і споруд, а також огляд численних джерел інформації з динаміки та стійкості пружних систем, обґрунтування геометричних і жорсткісних параметрів таких конструкцій та їхніх елементів становить не лише актуальну, а й достатньо складну наукову задачу. У дисертації проведено комплекс теоретичних і експериментальних досліджень, спрямованих на вдосконалення методів розрахунку багатопрогнових довгомірних конструкцій та на забезпечення їх працездатності.

1. У дисертаційній роботі розроблено математичну модель напружено-деформованого стану і алгоритм розрахунку на стійкість багатопрогової висотної конструкції з урахуванням східчастої зміни згинної жорсткості і осевого навантаження по висоті, а також податливості опор. Показано, що раціональне застосування додаткових зв'язків з основою є ефективним способом збільшення критичного навантаження та підвищення ефективності експлуатації щогли підйимального пристрою. За рахунок застосування додаткових опор можна досягти збільшення критичного навантаження щоголової конструкції більше, ніж на порядок. Податливість з'єднань секцій споруди може знижувати значення критичної сили на 12–15%.

2. Побудовано математичну модель напружено-деформованого стану багатопрогової висотної конструкції на стійкість з урахуванням неперервної зміни згинної жорсткості і поздовжньої сили по висоті, а також податливості опор і з'єднувальних вузлів та опрацьовано узагальнений алгоритм розрахунку споруди на стійкість і колювання шляхом чисельного розв'язання рівнянь напружено-деформованого стану і систематизації обчислювального процесу за допомогою методу початкових параметрів. З'ясовано, що за рахунок урахування неперервної зміни параметрів висотної споруди можна досягти підвищення точності визначення критичної сили на 17–22%.

3. Розроблено математичну модель напружено-деформованого стану для аналізу статичної стійкості і вільних коливань складеної багатопрогової

висотної конструкції пілонного типу, та досліджено особливості втрати стійкості А-подібної бурової вежі. Підтверджена необхідність детального врахування структури і жорсткісних параметрів пілонної конструкції під час визначення критичних навантажень і проведення модального аналізу.

4. Побудовано математичну модель напружено-деформованого стану трипрогонової конструкції магістрального трубопроводу, що включає надземну і прилеглі до неї підземні ділянки і перебуває під дією температурних навантажень, та визначено поздовжні зусилля, переміщення і деформації труби на надземній та на підземних ділянках. Показано, що із збільшенням довжини і перепаду температури надземної ділянки абсолютна величина зусилля її стиску, а також довжина зони проковзування труби відносно ґрунту, значно зростають. З огляду на можливу втрату стійкості, найнебезпечнішим випадком навантаження надземної ділянки трубопроводу слід вважати стискання незаповненої газом труби за максимального температурного перепаду.

5. Проведений аналіз особливостей локального ослаблення магістрального трубопроводу у зв'язку з макророзшаруванням матеріалу труби показав, що сорокарічна експлуатація системи магістральних газопроводів призвела до інтенсивної деградації металу труб, в першу чергу, за його пластичністю. За зниження пластичності до критичного рівня під час тривалої сумісної дії робочих навантажень та абсорбованого металом водню з боку внутрішньої поверхні труби створюються умови для розвитку розшарування великої площі. Виявлені локалізація розшарування по товщині стінки ближче до зовнішньої поверхні труби, а також вихід розшарування на зовнішню поверхню, що свідчить про можливість значного місцевого ослаблення трубопроводу.

6. Побудовано математичну модель і алгоритм розрахунку на стійкість багатопрогонової ділянки магістрального трубопроводу з урахуванням дії температурних навантажень і взаємодії труби з пружною основою. Як засвідчили результати розрахунків, температурні перепади, які реально виникають під час експлуатації трубопроводів, можуть призводити до втрати

стійкості труби. З'ясовано, що локальні ослаблення трубопроводів можуть знижувати критичні навантаження на 15-25%. Одержані результати можуть бути використані під час проектування та реконструкції магістральних трубопроводів з метою обґрунтування раціонального числа температурних компенсаторів та проміжних опор надземних ділянок.

7. На основі ототожнення амплітудних функцій, що описують вільні і параметричні коливань, а також форми втрати статичної стійкості багатопрогонової висотної конструкції опрацьовано методику розрахунку на динамічну стійкість згаданих механічних систем під дією періодичних осьових навантажень. Побудовано континуально-дискретну розрахункову модель для визначення форм деформування споруди та зведення задачі про динамічну стійкість конструкції до аналізу розв'язків диференціального рівняння Мат'є.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Айнбиндер А. Прочностные критерии в американских нормах проектирования нефтегазопроводов в их сопоставление с критериями российских норм СНиП 2.06.06–85 / А. Айнбиндер, Б. Такса, П. Дальтон, В. Грин // Газовая промышленность. – 1994. – № 2. – С. 31–34.
2. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промышленных трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие / А. Б. Айнбиндер. – М: Недра, 1991. – 287 с.
3. Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие / А. Б. Айнбиндер, А. Г. Камерштейн. – М: Недра, 1982. – 341 с.
4. Андрейків О. Є. Механіка руйнування та довговічність металевих матеріалів у водневмісних середовищах / О. Є. Андрейків, О. В. Гембара. – К.: Наукова думка, 2008. – 345 с.
5. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
6. Баженов В. А. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології: Підручник / В. А. Баженов, А. В. Перельмутер, О. В. Шишов / За заг. ред. д. т. н., проф. В. А. Баженова. – К.: Каравела, 2009. – 696 с.
7. Баженов В. А. Строительная механика. Специальный курс: Применение метода граничных элементов / В. А. Баженов, А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей. – Одесса: Астропринт, 2001. – 286 с.
8. Баженов В. А. Численные методы в механике / В. А. Баженов, А. Ф. Дашенко, Л. В. Коломиец, В. Ф. Оробей. – Одесса: СТАНДАРТЬ, 2005. – 563 с.
9. Бенерджи П. К. Методы граничных элементов в прикладных науках / Под. ред. Р. В. Гольдштейна. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
10. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. – М.: Высшая шк., 1980. – 408 с.

11. Билобран Б. С. Продольно-поперечный изгиб полубезконечного подземного трубопровода // Б. С. Билобран, Л. Й. Пискозуб / Вестн. Львов. политехн. ин-та. Теплоэнергетические системы и устройства. – 1986. – № 208. – С.3–6.
12. Бородавкин П. П. Подземные магистральные трубопроводы (проектирование и строительство) / П. П. Бородавкин. – М.: Недра, 1982. – 384 с.
13. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы. – 1956. – 600 с.
14. Василенко М. В. Теорія коливань і стійкість руху: Підручник / М. В. Василенко, О. М. Алексейчук. – Київ: Вища школа, 2004. – 525 с.
15. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти т. Т 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
16. Виноградов С. В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки / С. В. Виноградов. – М.: Стройиздат, 1980. – 135 с.
17. Віслобіцький П. А. Розрахунки граничних станів колон труб та трубопроводів. – Київ: Логос, 1997. – 364 с.
18. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 984 с.
19. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
20. Григолюк Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
21. Гуляев В. И. Устойчивость бурильных колонн в наклонно-направленных скважинах / В. И. Гуляев, И. В. Горбунович // Проблемы прочности. – 2008. – №6. – С. 71 – 81
22. Гуляев В. И. Упругое деформирование, устойчивость и уолебание гибких криволинейных стрижней / В. И. Гуляев, В. В. Гайдайчук, В. Л. Кошкин. – Киев: Наук. Думка, 1992. – 344 с.

23. Гуляєв В. І. Комп'ютерне моделювання стійкості коливань кружляння колон глибокого буріння / В. І. Гуляєв, В. В. Гайдайчук, Л. В. Шевчук // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2015. - Вип. 94. - С. 139-154.

24. Гуляєв В. І. Зародження режимів кружляння бурового долота на шорсткуватому дні глибокої свердловини / В.І. Гуляєв, О. В. Ващіліна, С. М. Глазунов // Вісник НТУ «ХП». Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХП», 2016. – № 46 (1218). – С. 81–84. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2078-9130.

25. Динник А. Н. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. избранные труды / А. Н. Динник – К.: АН УССР, 1955. – Том 2. – 220 с.

26. Калинин С. Г. Динамика несущих конструкций буровых установок / С. Г. Калинин, Е. В. Харченко. – Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1988. – 144 с.

27. Калинин С. Г. Динамика подъемной системы буровых установок / С. Г. Калинин. – Львов: Вища школа. Издательство при Львовском университете, 1975. – 160 с.

28. Ключиков С. Ф. Учет перемещений сдвига при расчете балок переменного сечения / С. Ф. Ключиков, В. И. Ширяев. – Известие вузов. Машиностроение, 1978. – №1. – С. 5–9.

29. Красовський А. Я. Оценка прочности трубопроводов АЭС с учетом их фактического состояния с помощью программного комплекса «3D PipeMaster» / А. Я. Красовський, И. В. Ориняк, С. А. Радченко, А. С. Батура // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – 2006. – С. 171–176.

30. Крижанівський Є. І. Вплив наводнювання та попереднього пластичного деформування сталі на її тріщиностійкість / Є. І. Крижанівський, О. Т. Цирульник, Д. Ю. Петрина // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – № 5. – С. 67–70.

31. Крыжанивский Е. Коррозионно-водородная деградация газотранспортных систем и способы ее предупреждения / Е. Крыжанивский, Г. Никифорчин, М. Полутренко // Сб. докл. Межд. научно-техн. конф.

“Надёжность и эффективность газотранспортных систем”. – Яремче, 2013. – С. 117–128.

32. Крижанівський Є. І. Корозійно-воднева деградація нафтових і газових трубопроводів та її запобігання: Науково-технічний посібник у 3-х томах / Є. І. Крижанівський, Г. М. Никифорчин; за ред. В. В. Панасюка. – Т. 3: Деградація газопроводів та її запобігання. – Івано-Франківськ: ІФНТУНГ. – 2012. – 433 с.

33. Магістральні трубопроводи. Настанова. Визначення залишкової міцності магістральних трубопроводів з дефектами. ДСТУ-Н Б В.2.3-21:2008. – Київ: Мінрегіонбуд України, 2008. – 61с.

34. Морозов Н. Ф. Статика и динамика стержня при продольном нагружении / Н. Ф. Морозов, П. Е. Товстик, Т. П. Товстик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Том 7. – № 1. – С. 76–89.

35. Никифорчин Г. М. Феномен прояву високотемпературної деградації зварного шва ошаднолегованої сталі / Г. М. Никифорчин, О. З. Студент, А. Д. Марков // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 1. – С. 73–79.

36. Никифорчин Г. М. Деградація властивостей сталей магістральних газопроводів упродовж їх сорокарічної експлуатації / Г. М. Никифорчин, О. Т. Цирульник, Д. Ю. Петрина, М. І. Греділь // Проблемы прочности. – 2009. – №5 (401). – С. 66–72.

37. Ориняк И. В. Напряженное состояние в криволинейных подземных трубах / И. В. Ориняк, С. А. Радченко // Пробл. прочности. – 2003. – № 4. – С. 93–104.

38. Ориняк И. В. Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщ. 1. Разработка численной процедуры / И. В. Ориняк, А. В. Богдан // Пробл. прочности. – 2007. – № 3. – С. 28–33.

39. Ориняк И. В. Прочность трубопроводов с дефектами / И. В. Ориняк. – К.: Наукова думка, 2012. – 447 с.

40. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем. / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 420 с.

41. Писаренко Г. С. Общий случай поперечных колебаний стержня переменного сечения с учетом рассеяния энергии в материале / Г. С. Писаренко, В. В. Панчин // Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем. Материалы совещ. – К.: Наукова думка, 1966. – С. 19–31.

42. Пономарев К. К. Расчет элементов конструкций с применением электронных цифровых вычислительных машин / К. К. Пономарев. – М.: Машиностроение, 1972. – 424 с.

43. Ржаницын А. Р. Строительная механика / А. Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.

44. Сеницкий Ю. Э. К определению частот свободных изгибных колебаний буровых вышек / Ю. Э. Сеницкий, М. Д. Моисеев, Д. Н. Полячек. – Машины и нефтяное оборудование, 1968. – №1. – С. 26–31.

45. Сеницкий Ю. Э. О решении динамической задачи для балки Тимошенко методом конечных интегральных преобразований / Ю. Э. Сеницкий // Расчет пространственных строительных конструкций. Межвуз. темат. сб. / Куйбышев гос. ун-т. – Куйбышев, 1977. – Вып. 7. – С. 5–22.

46. Сеницкий Ю. Э. Свободные изгибные колебания составных стержней и ферм переменной жесткости, нагруженных продольными силами / Ю. Э. Сеницкий // Исследования по теории сооружений. М., 1964. – Вып. XIII. – С. 135–144.

47. Сехниашвили Э. А. Определение частот свободных изгибных колебаний призматических стержней с учетом деформации сдвига и упругости опорных закреплений относительно угловых деформаций / Э. А. Сехниашвили // Исследования по теории сооружений. М.: Госстроиздат, 1962. – Вып. XI. – С. 105–114.

48. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
49. Строительные нормы и правила: Магистральные трубопроводы. СНиП 2.05.06-85. – М.: Госстрой СССР, 1985. – 66 с.
50. Студент О. З. Анізотропія механічних властивостей деградованої сталі 15Х1М1Ф після її експлуатації на парогонах ТЕС / О. З. Студент, Г. В. Гречковська // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2011. – 47 № 5. – С. 19–26.
51. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / С. П. Тимошенко, Д. Х. Янг, У. Уивер. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
52. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней и оболочек. / С. П. Тимошенко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1971. – 808 с.
53. Филин А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела: Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики / А. П. Филин – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 480 с.
54. Филлипов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филлипов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
55. Харченко Е. В. Динамические процессы буровых установок / Е. В. Харченко. – Львов: Світ, 1991. – 176 с.
56. Харченко Є. В. Математична модель кінематично зв'язаних поздовжньо-поперечних коливань бурової щогли з пакетом свічок бурильних труб / Є. В. Харченко, В. М. Левринець // Вісник Національного університету “Львівська політехніка”. Серія: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів: збірник наукових праць – 2001. – № 434. – С. 110–117.
57. Харченко Л. Є. Діагностика водневого макророзшарування в стінці згину труби системи магістральних газопроводів / Л. Є. Харченко, О. Є. Кунта,

О. І. Звірко [та ін.]. // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2015. – 51, №4. – С. 84–90.

Kharchenko L. Ye. Diagnostics of Hydrogen Macrodelamination in the Wall of a Bent Pipe in the System of Gas Mains / L. Ye. Kharchenko, O. Ye. Kunta, O. I. Zvirko, R. S. Savula, Z. A. Duryahina // Materials Science. – January 2016. – Vol. 51, Issue 4. – P. 530–537.

58. Хренов Н. Н. Газопроводи севера Западной Сибири: всплытие или выпучивание // Газовая промышленность. – 2001, № 8. – С35–36.

59. Цирульник О. Т. Воднева деградація тривало експлуатованих сталей магістральних газопроводів / О. Т. Цирульник, Г. М. Никифорчин, Д. Ю. Петрина, М. І. Греділь, І. М. Дзьоба // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2007. – 43, №5. – С. 97–104.

60. Цирульник О. Т. Вплив експлуатації сталі Х52 на корозійні процеси у модельному розчині газового конденсату / О. Т. Цирульник, З. В. Слободян, О. І. Звірко, М. І. Греділь, Г. М. Никифорчин, Д. Габетта // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2008. – 44, №5 – С. 29–37.

61. Цирульник О. Т. Експлуатаційне окрихчення сталі магістрального нафтопроводу / О. Т. Цирульник, Г. М. Никифорчин, О. І. Звірко, Д. Ю. Петрина // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 2. – С. 125–126.

62. Шевченко Ф. Л. Задачи по механике упругих деформируемых систем, часть 1. Соппротивление материалов / Ф. Л. Шевченко. – Киев: ИСИО, 1996. – 230 с.

63. Шевченко Ф. Л. К вопросу об устойчивости буровой колонны буровых установок роторного типа / Шевченко Ф. Л., Улитин Г. М // Захист металургійних машин від поломок: міжвузівський тематичний збірник наукових праць / Маріуполь: Державний вищий навчальний заклад «Прикарпатський державний технічний університет». – 2002. – Вип. 6. – С. 217–222.

64. Шевченко Ф. Л. Механика упругих деформационных систем, часть 1. Напряженно-деформированное состояние стержней / Ф. Л. Шевченко. – Киев: ИСИО, 1993. – 279 с.

65. Юртаев В. Г. Динамика буровых установок / В. Г. Юртаев. – М.: Недра, 1987. – 155 с.
66. ABS Guide for building and classing. Subsea pipeline systems and risers. – 2001.
67. Anifantis N. Stability of columns with a single crack subjected to follower force and vertical loads / N. Anifantis, A. Dimarogonas // International Journal of Solids and Structures. – 1983. – Vol. 19. – P. 281–291.
68. Arboleda–Monsavle Luis G. Stability and natural frequencies of a weakend Timoshenko beam–column with generalized and conditions under constant axial load / Luis G. Arboleda–Monsavle, David G. Zapato–Medina, J. Dario Aristizabal–Ochota // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – № 307. – P. 89–112.
69. Aristizabal-Ochoa J. D. Column stability and minimum lateral bracing: effects of shear deformations / J. D. Aristizabal-Ochoa // Journal of Engineering Mechanics. – 2004. – Vol. 130, Issue 10, P. 1223–1232.
70. Aristizabal-Ochoa J. D. Timoshenko beam-column with generalized end conditions and nonclassical modes of vibration of shear beams / J. D. Aristizabal-Ochoa // Journal of Engineering Mechanics. – 2004. – Vol. 130, Issue 10. – P. 1152–1159.
71. Aristizabal-Ochoa J. Dario. Dynamic modal analysis and stability of cantilever shea buildings: importance of moment equilibrium / J. Dario Aristizabal-Ochoa // Journal of Engineering Mechanics. – 2007. – Vol. 133, Issue 7. – P. 735–747.
72. Aristizabal-Ochoa J. Dario. Slope-deflection equations for stability and second-order analysis of Timoshenko beam-column structures with semi-rigid connections / J. Dario Aristizabal-Ochoa // Engineering Structures. – 2008. – Vol. 30, Issue 9. – P. 2517–2527.
73. Aristizabal-Ochoa J. Dario. Static and dynamic stability of uniform shear beam-columns under generalized boundary conditions / J. Dario Aristizabal-Ochoa // Journal of Sound and Vibration. – 2007. – № 307. – P. 69–88.

74. Aristizabal-Ochoa J. Dario. Tension and compression stability and second-order analyses of three-dimensional multi column systems: effects of shear deformations / J. Dario Aristizabal-Ochoa // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2007. – Vol. 133, Issue 1. – P. 106–116.

75. Banerjee J. R. Explicit modal analysis of an axially loaded Timoshenko beam with bending torsion coupling / J. R. Banerjee // *Journal of Applied Mechanics*. – 2000. – Vol. 67, Issue 2. – P. 307–313.

76. Baris Binici. Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force / Binici Baris // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – № 287. – P. 277–295.

77. Barsoum R. S. Finite element method applied to the problem of stability of a non-conservative system / R. S. Barsoum // *International Journal of Numerical Methods in Engineering*. – 1971. – № 3. – P. 63–87.

78. Bazoune A. Functions of Three-Dimensional Timoshenko Beam Element / A. Bazoune, Y. A. Khulief, N. G. Stephen // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 259, Num. 2. – P. 473–480.

79. Binici B. Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force / B. Binici // *Journal of Sound and Vibration*. – 2005. – Vol. 287. – P. 277–295.

80. Brandon J. B. An experimental investigation into the topological stability of a cracked cantilever beam / J. B. Brandon, C. Sudraud // *Journal of Sound and Vibration*. – 1998. – Vol. 211 Num. 4. – P. 555–569.

81. Chandra Kishen J. M. Finite element analysis for fracture behavior of cracked beam-columns / J. M. Chandra Kishen, A. Kumar // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2004. – Vol. 40. P. 1773–1789.

82. Chen D. Elastic buckling and static bending of shear deformable functionally graded porous beam / D. Chen, J. Yang, S. Kitipornchai // *Composite Structures*. – 2015. – Vol. 133. – P. 54–61.

83. Cheng F. Y. Dynamic Timoshenko beam-columns on elastic media / F. Y. Cheng, C. P. Pantelides // *Journal of Structural Engineering*. – 1988. – Vol. 114, Issue 7. – P. 1524–1550.

84. Chondros T. G. A continuous cracked beam vibration theory / T. G. Chondros, D. Dimarogonas, J. Yao // *Journal of Sound and Vibration*. – 1998. – Vol. 215, Issue 1. – P. 17–34.

85. Chondros T.G. The continuous crack flexibility model for crack identification / T.G. Chondros // *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. – 2001. – Vol. 24. – P. 643–650.

86. Cicirello Alice. Static analysis of Euler-Bernoulli Beams with multiple unilateral cracks under combined axial and transverse loads / Alice Cicirello, Alessandro Palme // *International Journal of Solids and Structures*. – 2014. – Vol. 51, Issue 5. – P. 1020–1029.

87. Croll J. G. A. A Simplified Model of Upheaval Thermal Buckling of Subsea Pipeline / J. G. A. Croll // *Thin-Walled Struct.* – 1997. – 29 (1–4). – P. 59–78.

88. Claeysen J. R. A Dynamical Basis for Computing the Modes of Euler–Bernoulli and Timoshenko Beams / J. R. Claeysen, R. A. Soder // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 259, Num. 4. – P. 986–990.

89. Clough R.W. Dynamics of Structures. 2nd edition / R.W. Clough, J. Penzien. – New York: McGraw–Hill Book Co. – 1993. – P. 628.

90. Dado M. H. F. Coupled transverse and axial vibratory behaviour of cracked beam with end mass and rotary inertia / M. H. F. Dado, O. Abuzeid // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 261. – P. 675–696.

91. Domizzi G. Influence of sulphur content and inclusion distribution on the hydrogen induced blister cracking in pressure vessel and pipeline steels / G. Domizzi, G. Anteri, J. Ovejero-García // *Corr. Sci.* – 2001. – Vol. 43, Num. 2. – P. 325–339.

92. Drgania i stateczność układów smukłych / Praca zbiorowa pod kierunkiem naukowym i redakcją Lecha Tomskiego. – Warszawa: WNT, 2007. – 344 s.

93. Einsfeld R. A. Buckling analysis of high-temperature pressurized pipelines with soil-structure interaction // R. A. Einsfeld, D. W. Murray, N. Yoosef-Ghodsi / *J. Braz. Soc. Mech. Sci. and Eng.* – Rio de Janeiro, 2003. – 72. – P. 829–840.

94. Engesser F. Buckling resistance of straight bars, *Zentralblatt des Bauverwaltungs* / F. Engesser. – 1889. – Issue 11. – 483.

95. Fan S. C. Stability of a cracked Timoshenko beam column by modified Fourier series / S. C. Fan, D. Y. Zheng // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 264. – P. 475–485.
96. Farchaly S. H. Exact frequency and mode shape formulae for studying vibration and stability of Timoshenko beam system / S. H. Farchaly, M. G. Shebl // *Journal of Sound and Vibration*. – 1995. – Vol. 180, Issue 2. – P. 205–227.
97. Glabisz W. Stability of discrete systems under nonconservative loading with dynamic follower parameter / W. Glabisz // *Computers & Structures*. – 1996. – Vol. 60, No. 4. – P. 653–663.
98. Gulyayev V. I. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes / V. I. Gulyayev, O. V. Vashchilina, S. M. Glazunov // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 81–84.
99. Gulyayev V. I. Incipient regimes of drill bit whirlings on uneven bottoms of deep bore-holes / V. I. Gulyayev, O. V. Vashchilina, S. M. Glazunov // *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Динаміка і міцність машин. – Х.: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46 (1218). – С. 81–84.
100. Gulyayev V. I., Andrusenko E. N., Shlyun N. V. Theoretical modeling of post-buckling contact interaction of a drill string with inclined bore-hole surface // *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 49, No. 4 (2014) 427-448.
101. Gulyayev V. I., Gaidaichuk V. V., Andrusenko E. N., Shlyun N. V. Critical buckling of drill strings in curvilinear channels of directed bore-holes // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2015. – Vol. 129, No 1 – P. 168–177. (USA).
102. Hajianmaleki Mehdi. Static and Vibration analyses of thick, generally laminated deep curved beam with different boundary conditions / Mehdi Hajianmaleki, Mohamed S. Qutu // *Composites Part B: Engineering*. – 2012. – Vol. 43, Issue 4. – P. 1767–1775.
103. Hobbs R. E. In-service buckling of heated pipelines / R. E. Hobbs // *ASCE J. Transportation Engineering*. – 1984. –110. – P. 175–189.

104. Hobbs R. E. Thermal buckling of pipeline close to restraints / R. E. Hobbs, F. Liang // Proc. OMAE, The Hague, Paper OMAE-89-812.– 1989.
105. Hunt G. W. Homoclinic and heteroclinic solutions of upheaval buckling / G. W. Hunt, A. Blackmore // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 355. – 1997. – P. 2185–2195.
106. Joo M. S. Mechanical Anisotropy in Steels for Pipelines / M. S. Joo, D.-W. Suh, H. K. D. H. Bhadeshia // ISIJ International. – 2013. – Vol. 53. – P. 1305–1314.
107. Jun Li. Coupled bending and torsional vibration of axially loaded Bernoulli–Euler beams including warping effects / Li Jun, Shen Rongying Jin Xianding // Applied Acoustics. – 2004. – Vol. 65. – P. 153–170.
108. Kausel E. Nonclassical modes of unrestrained shear beams / E. Kausel // ASCE Journal of Engineering Mechanics. – 2002. – Vol. 128. – P. 663–667.
109. Kelly J.M. Tension buckling in multilayer elastomeric bearings / J.M. Kelly // Journal of Engineering Mechanics. – 2003. – Vol. 129, Issue 12. – P. 1363–1368.
110. Kerr A. D. Lateral buckling of railroad tracks due to constrained thermal expansion / A. D. Kerr // Railroad Track Mech. and Technol. – Oxford: Pergamon Press, 1978.
111. Kharchenko Y. Zastosowanie analizy modalnej w diagnostyce stanu technicznego konstrukcji masztowych dźwigów budowlanych / Y. Kharchenko, S. Sobkowski // Diagnostyka. – 2002. – Nr. 27. – P. 75–81.
112. Kharchenko Y. Zastosowanie metody przemieszczeń uogólnionych do analizy drgań poprzecznych konstrukcji masztowych / Y. Kharchenko, V. Levrynec, S. Sobkowski // Diagnostyka. – 2007. – Nr 3(43). – P. 35–40.
113. Kim K. H. Effect of a crack on the dynamic stability of a free-free beam subjected to a follower force / K. H. Kim, J.-H. Kim // Journal of Sound and Vibration. – 2000. – Vol. 233, Num. 1. – P. 119–135.

114. Kounadis A. N. On the derivation of equations of motion for a vibrating Timoshenko column / A.N. Kounadis // Journal of Sound and Vibration. – 1980. – Vol. 73. – P. 177–184.

115. Kounadis A. N. Stability of elastically restrained Timoshenko cantilevers with attached masses subjected to a follower force / A.N. Kounadis // Series E-Journal of Applied Mechanics. – 1977. – P. 731–736.

116. Lee Y. Y. Vibration of Timoshenko beams with internal hinge / Y. Y. Lee, C. M. Wang, S. Kitipornchai // Journal of Engineering Mechanics. – 2003. – Vol. 129, Issue 3. – P. 293–301.

117. Li Q. S. Buckling of multi-step cracked columns with shear deformation / Q. S. Li // Engineering Structures. – 2001. – P. 356–364.

118. Li Q. S. Classes of exact solutions for buckling of multi-step non-uniform columns with an arbitrary number of cracks subjected to concentrated and distributed axial loads / Q.S. Li // International Journal of Engineering Science. – 2003. – Vol. 41. – P. 569–586.

119. Li Q. S. Vibratory characteristics of Timoshenko beams with arbitrary number of crack / Q. S. Li // Journal of Engineering Mechanics. – 2003. – Vol. 11. – P. 1355–1359.

120. Lino M. Hydrogen-induced blister cracking of linepipe steel / M. Lino, R. A. Oriani, J. P. Hirth, M. Smialowski // Hydrogen degradation of ferrous alloys. – Park Ridge, NJ: Noyes Publications, 1985. – P. 737–762.

121. Mishael S. J. Practical applications of hydrogen permeation monitoring / S. J. Mishael, F. W. H. Dean, C. Fowler // CORROSION 2004. – NACE International, 2004. – Paper № 4476. – P. 12.

122. Mladenov K. A. Stability of a jointed free-free beam under end rocket thrust / K. A. Mladenov, Y. Sugiyama // Journal of Sound and Vibration. – 1997. – Vol. 199, Num. 1. – P. 1–15.

123. Monsalve-Cano J. F. Stability and free vibration analyses of an orthotropic singly symmetric Timoshenko beam-column with generalized end

conditions / J. F. Monsalve-Cano, J. Dario Aristizabal-Ochoa // *Journal of Sound and Vibration*. – 2009. – 328. – P. 467–487.

124. Mostert R. and Sharp W. Low Temperature Hydrogen Damage Assessment in the Gas and Refining Industries // *Proc. of the Middle East Nondestruct. Test. Conf. & Exhib.*, Bahrain, Manama, 27–30 November 2005.

125. Nguyen Trung-Kien. Static and free vibration of axially loaded functionally graded beam based on the first-order shear deformation theory / Thung-Kien Nguyen, P. Vo Thuc, Thai Huu-Tai // *Composites Part B: Engineering*. – 2013. – Vol. – P. 147–157.

126. Nykyforchyn H. M. Hydrogen degradation of steels under long-term in-service conditions / H. M. Nykyforchyn, K.-J. Kurzydowski, E. Lunarska // *Environment-Induced Cracking of Materials*. Ed. by S. A. Shipilov, R. H. Jones, J.-M. Olive, R. B. Rebak. Prediction, Industrial Developments and Evaluations. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – Vol. 2. – P. 349–361.

127. Osinski Z. Teoria drgan / Z. Osiski // Warszawa: Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1978. – 330 s.

128. Panteliou S. D. Damping factor as an indicator of crack severity / S. D. Panteliou, T. G. Chondros, V. C. Argyrakis, A. D. Dimarogonas // *Journal of Sound and Vibration*. – 2001. – Vol. 241, Issue 2. – P. 235–245.

129. Park Y. Dynamic stability of a free Timoshenko beam under controlled follower force / Y. Park // *Proceedings of the JSME Vibration Conference*. – 1985. – P. 45–53.

130. Park Y. The maximum controlled follower force on a free-free beam carrying a concentrated mass / Y. Park // *Journal of Sound and Vibration*. – 1985. – Vol. 98. – P. 247–256.

131. Paz M. *Structural Dynamics: Theory and Computation*. 3rd edition / M. Paz. – New York : Van Nostrand Reinhold Co. – 1991. – P. 201–296.

132. Piovan M. T. Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beam with graded material properties / M. T. Piovan, S. P. Machado // *Thin-Walled Structures*. – 2011. – Vol. 49, Issue 3. – P. 437–447.

133. Piszcek K. Drgania w budowie maszyn / K. Piszcek, J. Walczak // Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1982. – 342 s.
134. Polyakov V. N. Catastrophes of large diameter pipelines: the role of hydrogen fields / V. N. Polyakov // Hydrogen Effects in Materials. Moran, WY. – 1996. – P. 991–1000.
135. Rafezy B. Exact dynamic stiffness matrix of a three-dimensional shear beam with doubly asymmetric cross-section / B. Rafezy, W. P. Howson // Journal of Sound and Vibration. – 2006. – Vol. 289. – P. 938–951.
136. Ribeiro P. Hierarchical Finite Element Analysis of Geometrically Non-Linear Vibration of Beams and Plane Frames / P. Ribeiro // Journal of Sound and Vibration. – 2001. – Vol. 246, Num. 2. – P. 225–244.
137. Roberts T.M. Influence of shear deformation on buckling of pultruded fiber reinforced plastic profiles / T.M. Roberts // Journal of Composites for Construction. – 2002. – Vol. 11. – P. 241–248.
138. Sato K. On the governing equations for vibration and stability of a Timoshenko beam: Hamilton's principle / K. Sato // Journal of Sound and Vibration. – 1991. – Vol. 145. – P. 338–340.
139. Sezawa K. On the decay of waves in visco-elastic solid bodies / K. Sezawa // Tokyo Imperial University Scientific Reports. – 1927. – № 3. – P. 43–53.
140. Shifrin E.I. Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks / E. I. Shifrin, R. Ruotolo // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – Vol. 222, Issue 3. – P. 409–423.
141. Simsek M. Static bending of a functionally graded microscale Timoshenko beam based on the modified couple stress theory / M. Simsek, T. Kocaturk, S. D. Akbas // Composite Structures. – 2013. – Vol. 95. – P. 740–747.
142. Sochacki Wojciech. Free and parametric vibration of the system: telescopic boom-hydraulic cylinder (changing the crane radius) / Wojciech Sochacki, Lech Tomski // The archive of Mechanical Engineering. – 1999. – Vol. 16. – P. 257–271.

143. Sochacki Wojciech. The dynamic stability of a simply supported beam with additional discrete elements / Wojciech Sochacki // *Journal of Sound and Vibration*. – 2008. – Vol. 314. – P. 180–193.

144. Sugiyama Y. Effect of internal damping on the stability of free-free beams under an end thrust (in Japanese) / Y. Sugiyama, T. Katayama, H. Fukuda, C. Kar // *Transactions of the JSME*. – 1989. – № 55. – P. 243–247.

145. Taylor N. Experimental and Theoretical Studies in Subsea Pipeline Buckling / N. Taylor, V. Tran // *Marine Struct.* – 1996. – 9. – P. 211–257.

146. Takahashi I. Vibration and stability of non-uniform cracked Timoshenko beam subjected to follower force / I. Takahashi // *Computers and Structures*. – 1999. – Vol. 71. – P. 585–591.

147. Thuc P. Vo. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories / P. Vo. Thuc, Thai Hui-Tai // *Composite Structures*. – 2012. – Vol. 94, Issue 8. – P. 2513–2522.

148. Tomskiego L. Drgania swobodne i stateczność obiektów smukłych jabo układów liniowych lyb nieliniowych / L. Tomskiego. – Warszawa: WNT, 2007. – 321 s.

149. Tomskiego L. Drgania i stateczność układów smukłych / / Praca zbiorowa pod kierunkiem naukowym i redakcja Lech Tomskiego. – Warszawa: WNT, 2007. – 321 s.

150. Turnbull A. Modeling of environment assisted cracking / A. Turnbull // *Corrosion Science*. – 1993. – Vol. 34, No 6. – P. 921–960.

151. Tvergaard V. On localized thermal track buckling / V. Tvergaard // *Int. J. Mech. Sci.* – 1981. – 23. – P. 577–587.

152. Viola E. Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using dynamic stiffness method / E.Viola, P.Ricci, M.H.Aliabadi // *Journal of Sound and Vibration*. – 2007. – Vol. 304. – P. 124–153.

153. Wang C. M. Stability criteria for Timoshenko columns with intermediate and end concentrated axial loads / C. M. Wang, K. H. Ng, S. Kitipornchai // *Journal of Constructional Steel Research*. – 2002. – Vol. 58, Issue 9. – P. 1177–1193.

154. Wang C. Y. Buckling of a weakened column / C. Y. Wang, C. M. Wang, T. M. Aung // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2004. – Vol. 11. – P. 1373–1376.
155. Wang Y.-M. The Dynamic Analysis of a Beam-Mass System Due To The Occurrence of Two-Component Parametric Resonance / Y.-M. Wang // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 258, Num. 5. – P. 951–967.
156. Williams Martin S. A Parametric Study of the Non-Linear Dynamic Behaviour of an Offshore Jack-Up Unit / Martin S. Williams, Richard S. G. Thompson, Houlsby Guy T. // *Engineering Structures*. – 1999. – Vol. 21. – P. 383–394.
157. Wu J. J. Missile stability using finite elements an unconstrained variational approach / J. J. Wu // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14. – P. 313–319.
158. Wu J. J. On missile stability / J. J. Wu // *Journal of Sound and Vibration*. – 1976. – Vol. 49. – P. 141–147.
159. Wu J. J. On the stability of a free-free beam under axial thrust subjected to directional control / J. J. Wu // *Journal of Sound and Vibration*. – 1975. – Vol. 42. – P. 45–52.
160. Yan H. Dynamics and stability of an extending beam attached to an axially moving base immersed in dense fluid / H. Yan, Q. Ni, H. L. Wang, M. Li, Y. Wang, Y. Luo // *Journal of Sound and Vibration*. – 2016. – Vol. 383. – P. 364–383.
161. Zheng D. Y. Vibration and stability of cracked hollow-sectional beams / D. Y. Zheng, S. C. Fan // *Journal of Sound and Vibration*. – 2003. – Vol. 267. – P. 933–954.
162. Zheng D. Y. Natural Frequency Changes of a Cracked Timoshenko Beam by Modified Fourier Series / D. Y. Zheng, S. C. Fan // *Journal of Sound and Vibration*. – 2001. – Vol. 246, Num. 2. – P. 297–317.

Д о д а т о к А

**Акти впровадження і промислових випробувань
результатів дисертаційної роботи**

«З А Т В Е Р Д Ж У Ю»

Проректор з науково-педагогічної
роботи Національного університету
«Львівська політехніка»

_____ О. Р. Давидчак

« ____ » _____ 2016 р.

А К Т

впровадження у навчальний процес результатів дисертаційної роботи
Кунтої Ольги Євгенівни «Забезпечення стійкості багатопрогонових довгомірних
конструкцій з урахуванням дії статичних і динамічних навантажень» на здобуття
наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертаційна робота аспірантки Кунтої Ольги Євгенівни «Забезпечення стійкості багатопрогонових довгомірних конструкцій з урахуванням дії статичних і динамічних навантажень» виконана на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.02.09 – «Динаміка та міцність машин» під керівництвом д.т.н., професора І. В. Кузьо. Вона спрямована на розв'язання актуальної науково-технічної проблеми забезпечення стійкості довгомірних несівних конструкцій машин та інженерних споруд за рахунок обґрунтування їхніх геометричних параметрів і коефіцієнтів жорсткості з'єднувальних вузлів на основі удосконалення методів аналізу напружено-деформованого стану.

Запропоновані у дисертації методологічні підходи до проведення розрахунків багатопрогонових довгомірних конструкцій на стійкість з урахуванням несталості згинної жорсткості і поздовжньої сили по довжині, дії статичних і динамічних навантажень, температурних впливів, а також місцевих ослаблень, становлять перспективний напрям підвищення ефективності теоретичних досліджень особливостей роботи та надійності як новостворюваних технічних об'єктів, так і об'єктів тривалої експлуатації (мости, несівні конструкції екскаваторів, відвалоутворювачів, транспортувальних машин, бурових установок, об'єктів трубопровідного транспорту тощо).

Розроблене математичне і програмне забезпечення для проведення аналізу стійкості багатопрогонових довгомірних конструкцій, що перебувають під дією статичних і динамічних навантажень використовуються в процесі викладання дисципліни «Математичні основи механіки підйомно-транспортних систем» при підготовці бакалаврів, а також дисципліни «Гнучкі автоматизовані системи дискретних виробництв» при підготовці магістрів за спеціальністю 131 «Прикладна механіка» у Національному університеті «Львівська політехніка».

Акт затверджено на засіданні кафедри механіки та автоматизації машинобудування 25.05.2014 р., протокол № 11.

Директор Інституту інженерної
механіки та транспорту
д.т.н., доцент

Ланець О. С.

Зав. кафедри механіки та автоматизації
машинобудування д.т.н., професор

Кузьо І. В.

“З А Т В Е Р Д Ж У Ю”

Перший Віце-Президент

ПАТ «УКРТРАНСГАЗ»

_____ М. П. Химко

“ _____ ” _____ 2014 р.

А К Т

промислових випробувань результатів дисертаційної роботи Кунтої О. Є. «Забезпечення стійкості багатопрогенових довгомірних конструкцій з урахуванням дії статичних і динамічних навантажень»

Дисертаційна робота аспірантки Кунтої О. Є., виконана у Національному університеті «Львівська політехніка» під керівництвом д. т. н., проф. Кузьо І. В., присвячена підвищенню ефективності автоматизованого проектування і експлуатації стрілових конструкцій, висотних споруд, надземних дільниць магістральних трубопроводів тощо за рахунок удосконалення математичного і програмного забезпечення розрахунків на стійкість і коливання.

Побудовано математичну модель осевого деформування трипрогенової конструкції магістрального трубопроводу та визначено поздовжні зусилля, переміщення і деформації труби на надземній та на підземних дільницях з урахуванням можливого проковзування труби відносно ґрунту. З’ясовано, що з огляду на можливу втрату стійкості, найнебезпечнішим випадком навантаження надземної дільниці трубопроводу є стискання незаповненої газом труби за максимального температурного перепаду. Проведено аналіз причин локального ослаблення магістрального газопроводу у зв’язку з макророзшаруванням металу в процесі тривалої експлуатації. Побудовано математичні моделі і алгоритми розрахунку на стійкість прямолінійних надземних ділянок магістральних трубопроводів з прилеглими до них частинами підземних ділянок із застосуванням технічної теорії згину і неklasичної теорії балок С. Тимошенка. Досліджено вплив довжини і характеристик поперечного перерізу надземної дільниці трубопроводу, а також податливості ґрунту і перепаду температури на критичні навантаження та власні частоти і форми коливань механічної системи.

Проведено дослідження статичної стійкості трипрогенової конструкції магістрального трубопроводу, яка включає надземну і зв’язані з нею підземні дільниці і перебуває під дією температурних навантажень. Одержані результати дають можливість здійснювати раціональний добір числа температурних компенсаторів та проміжних опор надземних дільниць під час проектування.

Методика розрахунку прямолінійних надземних ділянок трубопроводів на стійкість, запропонована у дисертації, застосована для оцінки працездатності надземного переходу МГ «Острогозськ – Шебелинка II км165 Круп’янського ЛВУ МГ УМГ «Харківтрансгаз». Довжина зазначеного переходу становить 47 м, зовнішній діаметр труби – 1200 мм, товщина стінки – 12 мм. Проведені розрахунки показали, що незначні локальні ослаблення трубопроводу, які можуть виникнути у зв’язку появою дефектів матеріалу труби, не призведуть до втрати стійкості надземної дільниці газопроводу за температурного перепаду 60°C. Визначено критичні значення коефіцієнтів жорсткості локально ослаблених зон в залежності від числа локальних ослаблень.

Керівник департаменту
транспортного газу

Максимчук Б. М.

Д о д а т о к Б

**Програма для розрахунку на стійкість
багатопрогонових висотних споруд**

```

ORIGIN := 1          TOL := 0.0000000000000000001
E := 0.211012      G := 0.810001011      ρ := 1.2500104      κ := 0.5      k := 0.00000108
l1 := 12      l2 := 3      A0 := 3.3410-3      I := 3.2610-4
m1 := 0.      m2 := 10.      m3 := 35.
μ := 41.68      g := 9.81
cy1 := 0      cy2 := 3.50× 106      cy3 := 0.
cα1 := 0      cα2 := 1.00× 107      cα3 := 1011      cy2 := 0.
cα11 := 0      cα12 := 1.250× 103      cα13 := 0.      cα12 := 0.
cα21 := 0      cα22 := 1.250× 103      cα23 := 0.      cα22 := 0.
l := l1 + l2      l = 15.00000
ΔP1 := 0.      ΔP2 := 0.      ΔPmax := 0.
ΔPmax := [μ·(l1 + l2) + (m2 + m3)]·g
ΔP1 := [μ·(0.5·l1 + l2) + (m2 + m3)]·g
ΔP2 := (μ·0.5·l2 + m3)·g

q1 :=  $\begin{pmatrix} m1 \\ 0. \\ 0. \\ cy1 \\ c\alpha1 \\ c\alpha11 \\ c\alpha21 \end{pmatrix}$       q2 :=  $\begin{pmatrix} m2 \\ 0. \\ 0. \\ cy2 \\ c\alpha2 \\ c\alpha12 \\ c\alpha22 \end{pmatrix}$       q3 :=  $\begin{pmatrix} m3 \\ 0. \\ 0. \\ cy3 \\ c\alpha3 \\ c\alpha13 \\ c\alpha23 \end{pmatrix}$       p1 :=  $\begin{pmatrix} E \\ G \\ \rho \\ l1 \\ A0 \\ I \\ \kappa \\ k \\ \Delta P1 \end{pmatrix}$       p2 :=  $\begin{pmatrix} E \\ G \\ \rho \\ l2 \\ A0 \\ I \\ \kappa \\ k \\ \Delta P2 \end{pmatrix}$ 

ei(p) := p1·p6      b(p,P) :=  $\frac{P}{ei(p)}$ 
a1(p,P) :=  $\sqrt{b(p,P)}$ 
s1(p,P,x) := sin(a1(p,P)·x)
c1(p,P,x) := cos(a1(p,P)·x)
s11(p,P,x) := 1.      s12(p,P,x) := x

```

$$s13(p, P, x) := \frac{(1. - c1(p, P, x))}{(a1(p, P))^2} \quad s14(p, P, x) := \frac{(a1(p, P) \cdot x - s1(p, P, x))}{(a1(p, P))^3}$$

$$s21(p, P, x) := 0. \quad s22(p, P, x) := 1.$$

$$s23(p, P, x) := \frac{s1(p, P, x)}{a1(p, P)} \quad s24(p, P, x) := s13(p, P, x)$$

$$s31(p, P, x) := 0. \quad s32(p, P, x) := 0.$$

$$s33(p, P, x) := c1(p, P, x) \quad s34(p, P, x) := s23(p, P, x)$$

$$s41(p, P, x) := 0 \quad s42(p, P, x) := 0$$

$$s43(p, P, x) := -a1(p, P) \cdot s1(p, P, x) \quad s44(p, P, x) := s33(p, P, x)$$

$$S(p, P, x) := \begin{pmatrix} s11(p, P, x) & s12(p, P, x) & s13(p, P, x) & s14(p, P, x) \\ s21(p, P, x) & s22(p, P, x) & s23(p, P, x) & s24(p, P, x) \\ s31(p, P, x) & s32(p, P, x) & s33(p, P, x) & s34(p, P, x) \\ s41(p, P, x) & s42(p, P, x) & s43(p, P, x) & s44(p, P, x) \end{pmatrix}$$

$$A(p, P) := \begin{pmatrix} 1. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ei(p) & 0 \\ 0 & -P & 0 & -ei(p) \end{pmatrix} \quad B(p, P) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1.}{ei(p)} & 0 \\ 0 & \frac{-P}{ei(p)} & 0 & \frac{-1.}{ei(p)} \end{pmatrix}$$

$$H(q) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{q_6}{q_5} & \frac{-1}{q_5} & 0 \\ 0 & -q_6 - q_7 - \frac{q_6 \cdot q_7}{q_5} & 1 + \frac{q_7}{q_5} & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F1M := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \\ 0 \end{pmatrix} \quad F1Q := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix}$$

$$F2(F1, P) := H(q2) \cdot [A(p1, P + p1_9) \cdot [S(p1, P + p1_9, p1_4) \cdot (B(p1, P + p1_9) \cdot F1)]]$$

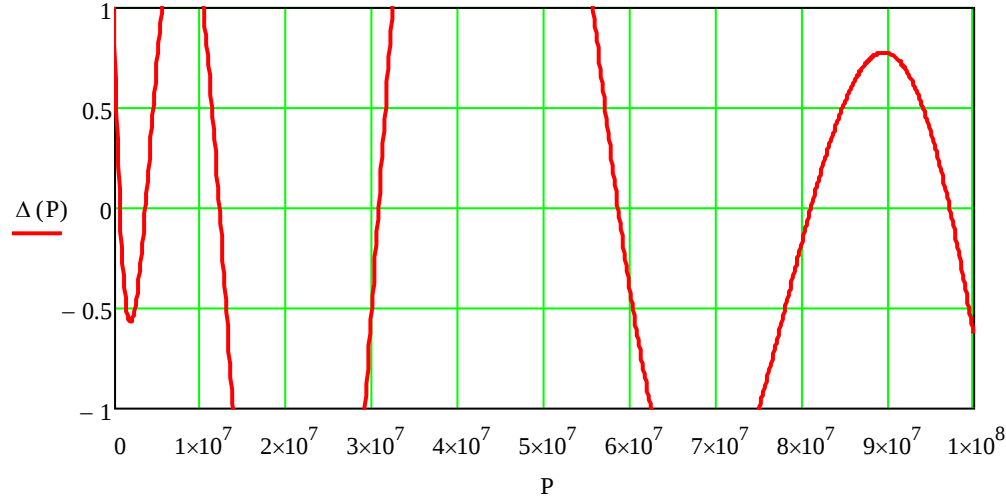
$$F3(F1, P) := H(q3) \cdot [A(p2, P + p2_9) \cdot [S(p2, P + p2_9, p2_4) \cdot (B(p2, P + p2_9) \cdot F2(F1, P))]]$$

$$F3M(P) := \text{submatrix}(F3(F1M, P), 3, 4, 1, 1)$$

$$F3Q(P) := \text{submatrix}(F3(F1Q, P), 3, 4, 1, 1)$$

$$\underline{\underline{F}}(P) := \text{augment}(F3M(P), F3Q(P))$$

$$\Delta(P) := |\underline{\underline{F}}(P)|$$



$$P := 1.010^4 \quad Pe_1 := \text{root}(\Delta(P), P) \quad Pe_1 = 6.79922 \times 10^5$$

$$\underline{\underline{P}} := 0.410^7 \quad Pe_2 := \text{root}(\Delta(P), P) \quad Pe_2 = 3.66210 \times 10^6$$

$$\underline{\underline{P}} := 1.210^7 \quad Pe_3 := \text{root}(\Delta(P), P) \quad Pe_3 = 1.22699 \times 10^7$$

$$\underline{\underline{P}} := 3.010^7 \quad Pe_4 := \text{root}(\Delta(P), P) \quad Pe_4 = 3.07961 \times 10^7$$

$$\sigma k := \frac{Pe_1 + \Delta P_1}{A0} \quad \sigma k = 2.04803 \times 10^8 \quad \lambda := \pi \sqrt{\frac{E \cdot A0}{Pe_1}} \quad \lambda = 100.90279$$

$$\underline{\underline{\mu}} := \frac{\lambda}{1} \cdot \sqrt{\frac{I}{A0}} \quad \mu = 2.10159$$

$$\underline{\underline{N}} := 3.210^4 + \Delta P_{\max} \quad \sigma := \frac{N}{A0} \quad N = 3.85747 \times 10^4 \quad \sigma = 1.15493 \times 10^7$$

$$iP := 4 \quad jx := 300 \quad \Delta x := \frac{p1_4 + p2_4}{jx} \quad \Delta x = 0.05000$$

$$\text{PARAM}(F1, P, x) := \begin{cases} A(p1, P + p1_9) \cdot [S(p1, P + p1_9, x) \cdot (B(p1, P + p1_9) \cdot F1)] & \text{if } 0 \leq x < p1_4 \\ A(p2, P + p2_9) \cdot [S(p2, P + p2_9, x - p1_4) \cdot (B(p2, P + p2_9) \cdot F2(F1, P))] & \text{if } p1_4 \leq x \leq p1_4 + p2_4 \end{cases}$$

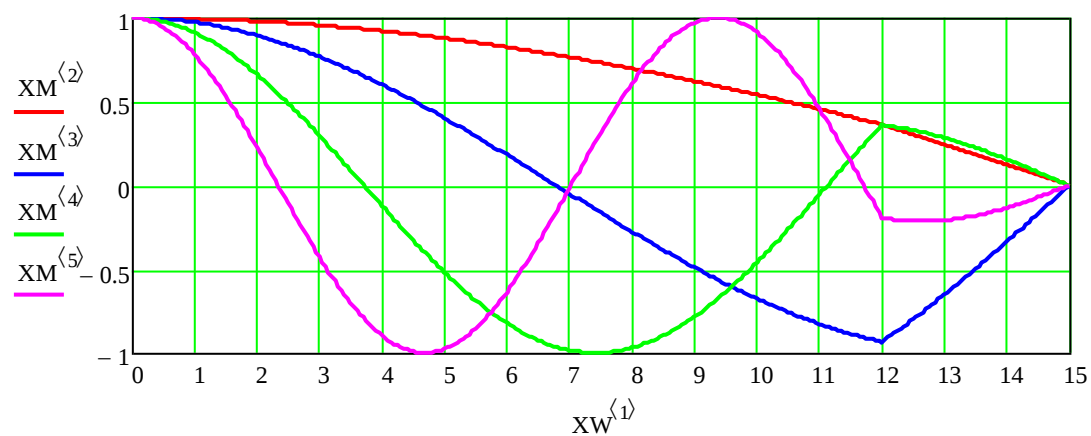
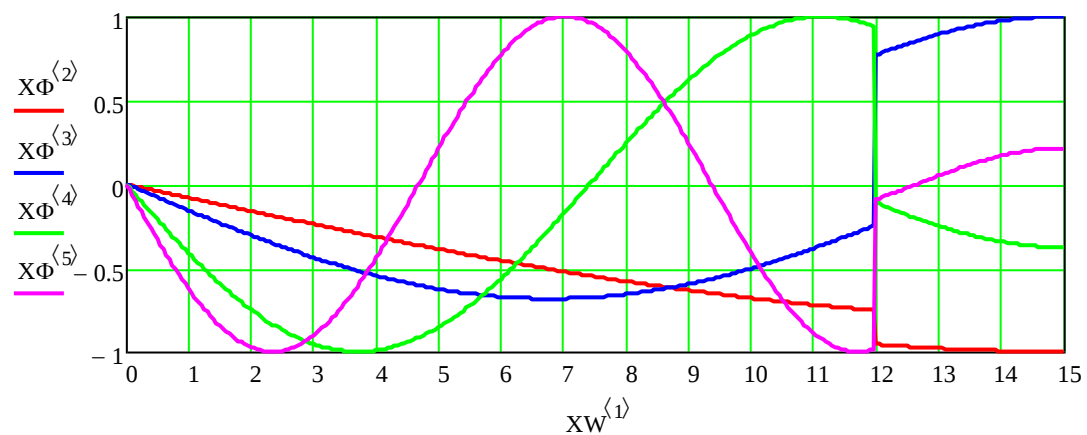
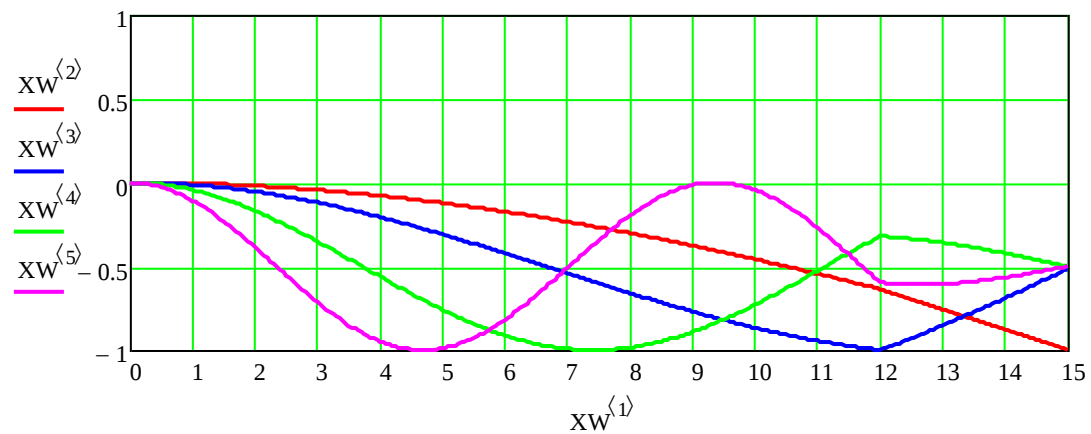
$W\Phi MQ :=$ $\text{for } i \in 1..iP$ $FP \leftarrow F(Pe_i)$ $qkoef \leftarrow \frac{-FP_{1,1}}{FP_{1,2}}$ $F0_1 \leftarrow 0.$ $F0_2 \leftarrow 0.$ $F0_3 \leftarrow 1.$ $F0_4 \leftarrow qkoef$ $\text{for } j \in 1..jx + 1$ $x \leftarrow \Delta x \cdot (j - 1)$ $Y \leftarrow \text{PARAM}(F0, Pe_i, x)$ $W_{j,i} \leftarrow Y_1$ $\Phi_{j,i} \leftarrow Y_2$ $M_{j,i} \leftarrow Y_3$ $Q_{j,i} \leftarrow Y_4$ $Wm \leftarrow W_{1,i}$ $\Phi m \leftarrow \Phi_{1,i}$ $Mm \leftarrow M_{1,i}$ $Qm \leftarrow Q_{1,i}$ $\text{for } j \in 1..jx + 1$ $Wm \leftarrow W_{j,i} \text{ if } W_{j,i} > Wm$ $\Phi m \leftarrow \Phi_{j,i} \text{ if } \Phi_{j,i} > \Phi m$ $Mm \leftarrow M_{j,i} \text{ if } M_{j,i} > Mm$ $Qm \leftarrow Q_{j,i} \text{ if } Q_{j,i} > Qm$ $\text{for } j \in 1..jx + 1$ $W_{j,i} \leftarrow \frac{W_{j,i}}{Wm}$ $\Phi_{j,i} \leftarrow \frac{\Phi_{j,i}}{\Phi m}$ $M_{j,i} \leftarrow \frac{M_{j,i}}{Mm}$ $Q_{j,i} \leftarrow \frac{Q_{j,i}}{Qm}$	$\text{for } j \in 1..jx + 1$ $X_j \leftarrow \Delta x \cdot (j - 1)$ $XW \leftarrow \text{augment}(X, W)$ $X\Phi \leftarrow \text{augment}(X, \Phi)$ $XM \leftarrow \text{augment}(X, M)$ $XQ \leftarrow \text{augment}(X, Q)$ $XW\Phi \leftarrow \text{stack}(XW, X\Phi)$ $XMQ \leftarrow \text{stack}(XM, XQ)$ $W\Phi MQ \leftarrow \text{stack}(XW\Phi, XMQ)$ $W\Phi MQ$
---	---

$XW := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 1, jx + 1, 1, iP + 1)$

$X\Phi := \text{submatrix}(W\Phi MQ, jx + 2, 2jx + 2, 1, iP + 1)$

$XM := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 2 \cdot jx + 3, 3jx + 3, 1, iP + 1)$

$XQ := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 3 \cdot jx + 4, 4jx + 4, 1, iP + 1)$



Д о д а т о к В

**Програма для розрахунку на стійкість багатопроговиних
конструкцій магістральних трубопроводів**

```

ORIGIN := 1      TOL := 0.00000000000000000001
D := 0.529      δ := 0.01      E := 0.211012      G := 0.810001011      ρ := 0.78700104      κ := 0.5

l1 := 20      l2 := 50      l3 := 20      l := l1 + l2 + l3

A0 :=  $\frac{\pi \cdot [D^2 - (D - 2 \cdot \delta)^2]}{4}$       I :=  $\frac{\pi \cdot [D^4 - (D - 2 \cdot \delta)^4]}{64}$       k := 0.25000108

A0 = 0.016304866      I = 0.000549191      Δt := 50      α := 12510-7

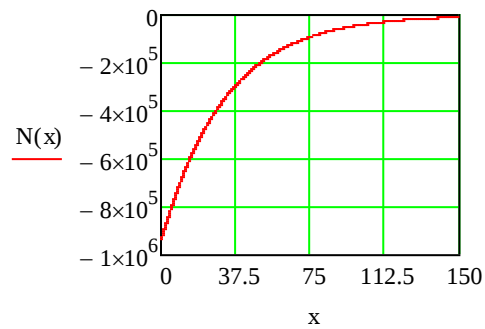
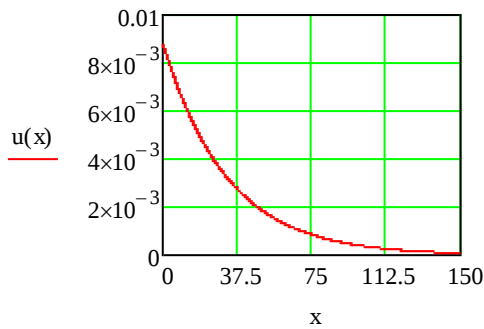
κτ := 2.0106      q0 := κτ · π · D      q0 = 3.32381× 106      r :=  $\sqrt{\frac{q0}{E \cdot A0}}$       r = 0.03116

N0 := α · Δt · l2 ·  $\left( \frac{l2}{E \cdot A0} + \frac{2.}{\sqrt{E \cdot A0 \cdot q0}} \right)^{-1}$       N0 = 9.37025× 105

u(x) :=  $\frac{N0}{E \cdot A0 \cdot r} \cdot e^{-r \cdot x}$       τ(x) := κτ · u(x)      N(x) := -N0 · e-r · x

u(0) = 0.00878      τ(0) = 17566.89744      N(0) = -9.37025× 105

```



$$p1 := \begin{pmatrix} E \\ G \\ \rho \\ l1 \\ A0 \\ I \\ \kappa \\ 0.0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$p2 := \begin{pmatrix} E \\ G \\ \rho \\ l2 \\ A0 \\ I \\ \kappa \\ 0. \\ 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$p3 := \begin{pmatrix} E \\ G \\ \rho \\ l3 \\ A0 \\ I \\ \kappa \\ 0.0 \\ k \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{llll}
cy1 := 0 & cy2 := 3.50 \times 10^6 & cy3 := 0. & cy4 := 0. \\
c\alpha1 := 0 & c\alpha2 := \frac{E \cdot I}{1} \cdot 0.5 & c\alpha3 := \frac{E \cdot I}{1} \cdot 0.5 & c\alpha4 := 10^{18} \\
c\alpha11 := 0 & c\alpha12 := 0.0 & c\alpha13 := 0. & c\alpha14 := 0. \\
c\alpha21 := 0 & c\alpha22 := 0.0 & c\alpha23 := 0. & c\alpha24 := 0.
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
q1 := \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ cy1 \\ c\alpha1 \\ c\alpha11 \\ c\alpha21 \end{pmatrix} & q2 := \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ cy2 \\ c\alpha2 \\ c\alpha12 \\ c\alpha22 \end{pmatrix} & q3 := \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ cy3 \\ c\alpha3 \\ c\alpha13 \\ c\alpha23 \end{pmatrix} & q4 := \begin{pmatrix} 0. \\ 0. \\ 0. \\ cy4 \\ c\alpha4 \\ c\alpha14 \\ c\alpha24 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$ag(p) := p_7 \cdot p_2 \quad aga(p) := p_7 \cdot p_2 \cdot p_5 \quad ei(p) := p_1 \cdot p_6 \quad gap(p, P) := aga(p) + P$$

$$b(p, P) := \frac{p}{ei(p)} - \frac{p_9}{aga(p)} \quad \zeta(p, P) := \frac{-p_9}{ei(p)} \quad sq(p, P) := \sqrt{\frac{b(p, P)^2}{4} + c(p, P)}$$

$$a1(p, P) := \sqrt{\frac{b(p, P)}{2} + sq(p, P)} \quad a2(p, P) := \sqrt{\frac{-b(p, P)}{2} + sq(p, P)}$$

$$al(p, P) := \frac{1.}{a1(p, P)^2 + a2(p, P)^2} \quad a1\chi(p, P) := (a1(p, P) \cdot a2(p, P))^2$$

$$c1(p, x, P) := \cos(a1(p, P) \cdot x) \quad s1(p, x, P) := \sin(a1(p, P) \cdot x) \quad e2(p, x, P) := \exp(a2(p, P) \cdot x)$$

$$ch2(p, x, P) := 0.5 \cdot \left(e2(p, x, P) + \frac{1.}{e2(p, x, P)} \right) \quad sh2(p, x, P) := 0.5 \cdot \left(e2(p, x, P) - \frac{1}{e2(p, x, P)} \right)$$

$$s11(p, x, P) := al(p, P) \cdot \left(a2(p, P)^2 \cdot c1(p, x, P) + a1(p, P)^2 \cdot ch2(p, x, P) \right)$$

$$s12(p, x, P) := al(p, P) \cdot \left(a2(p, P)^2 \cdot \frac{s1(p, x, P)}{a1(p, P)} + a1(p, P)^2 \cdot \frac{sh2(p, x, P)}{a2(p, P)} \right)$$

$$s13(p, x, P) := al(p, P) \cdot (-c1(p, x, P) + ch2(p, x, P))$$

$$s14(p, x, P) := al(p, P) \cdot \left(\frac{-s1(p, x, P)}{a1(p, P)} + \frac{sh2(p, x, P)}{a2(p, P)} \right)$$

$$s21(p, x, P) := a12(p, P) \cdot s14(p, x, P)$$

$$s22(p, x, P) := s11(p, x, P)$$

$$s23(p, x, P) := al(p, P) \cdot (a1(p, P) \cdot s1(p, x, P) + a2(p, P) \cdot sh2(p, x, P))$$

$$s24(p, x, P) := s13(p, x, P)$$

$$s31(p, x, P) := a12(p, P) \cdot s13(p, x, P)$$

$$s32(p, x, P) := s21(p, x, P)$$

$$s33(p, x, P) := a1(p, P) \cdot (a1(p, P)^2 \cdot c1(p, x, P) + a2(p, P)^2 \cdot ch2(p, x, P))$$

$$s34(p, x, P) := s23(p, x, P)$$

$$s41(p, x, P) := a12(p, P) \cdot s23(p, x, P)$$

$$s42(p, x, P) := s31(p, x, P)$$

$$s43(p, x, P) := a1(p, P) \cdot (-a1(p, P)^3 \cdot s1(p, x, P) + a2(p, P)^3 \cdot sh2(p, x, P))$$

$$s44(p, x, P) := s33(p, x, P)$$

$$\underline{\underline{S}}(p, x, P) := \begin{pmatrix} s11(p, x, P) & s12(p, x, P) & s13(p, x, P) & s14(p, x, P) \\ s21(p, x, P) & s22(p, x, P) & s23(p, x, P) & s24(p, x, P) \\ s31(p, x, P) & s32(p, x, P) & s33(p, x, P) & s34(p, x, P) \\ s41(p, x, P) & s42(p, x, P) & s43(p, x, P) & s44(p, x, P) \end{pmatrix}$$

$$A22(p, P) := 1 - \frac{ei(p) \cdot p_9}{aga(p)^2} + \frac{p}{aga(p)} \quad A24(p, P) := \frac{ei(p)}{aga(p)} \quad A31(p, P) := \frac{ei(p) \cdot p_9}{aga(p)}$$

$$A33(p, P) := -ei(p) \quad A42(p, P) := \frac{ei(p) \cdot p_9}{aga(p)} - P \quad A44(p, P) := -ei(p)$$

$$\underline{\underline{A}}(p, P) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A22(p, P) & 0 & A24(p, P) \\ A31(p, P) & 0 & A33(p, P) & 0 \\ 0 & A42(p, P) & 0 & A44(p, P) \end{pmatrix}$$

$$B24(p, P) := \frac{1}{aga(p)} \quad B31(p, P) := -\frac{p_9}{aga(p)} \quad B33(p, P) := -\frac{1}{ei(p)}$$

$$B42(p, P) := \frac{p_9}{aga(p)} - \frac{p}{ei(p)} \quad B44(p, P) := \frac{p_9}{aga(p)^2} - \frac{1}{ei(p)} - \frac{p}{ei(p) \cdot aga(p)}$$

$$B(p, P) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & B24(p, P) \\ B31(p, P) & 0 & B33(p, P) & 0 \\ 0 & B42(p, P) & 0 & B44(p, P) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{H}}(q) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{q_6}{q_5} & \frac{-1}{q_5} & 0 \\ 0 & -q_6 - q_7 - \frac{q_6 \cdot q_7}{q_5} & 1 + \frac{q_7}{q_5} & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F1M := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F1Q := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix}$$

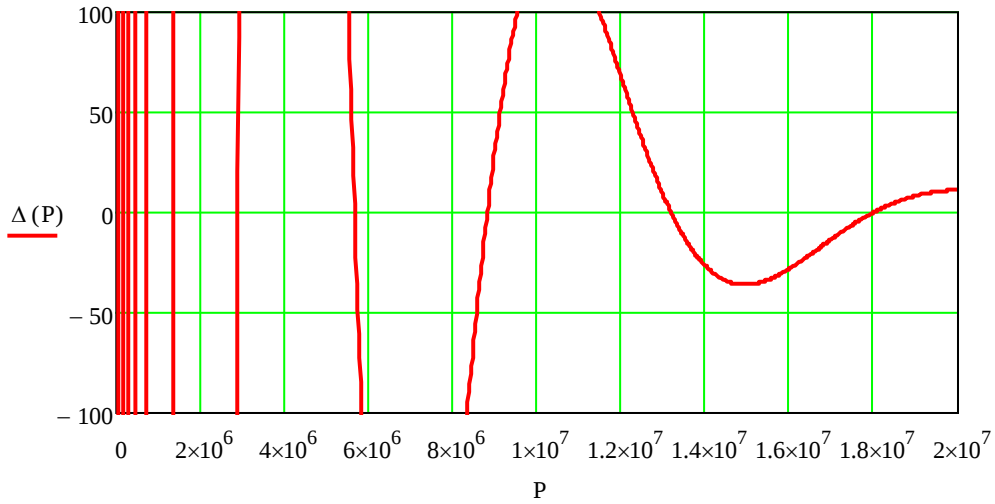
$$F2(F1, P) := H(q2) \cdot [A(p1, P) \cdot [S(p1, p1_4, P) \cdot (B(p1, P) \cdot F1)]]$$

$$F3(F1, P) := H(q3) \cdot [A(p2, P) \cdot [S(p2, p2_4, P) \cdot (B(p2, P) \cdot F2(F1, P))]]$$

$$F4(F1, P) := H(q4) \cdot [A(p3, P) \cdot [S(p3, p3_4, P) \cdot (B(p3, P) \cdot F3(F1, P))]]$$

$$F4M(P) := \text{submatrix}(F4(F1M, P), 1, 2, 1, 1) \quad F4Q(P) := \text{submatrix}(F4(F1Q, P), 1, 2, 1, 1)$$

$$F(P) := \text{augment}(F4M(P), F4Q(P)) \quad \Delta(P) := |F(P)|$$



$$P := 1.510^6$$

$$Pe_1 := \text{root}(\Delta(P), P)$$

$$Pe_1 = 1.38022 \times 10^6$$

$$P := 2.810^6$$

$$Pe_2 := \text{root}(\Delta(P), P)$$

$$Pe_2 = 2.91409 \times 10^6$$

$$P := 5 \cdot 10^6$$

$$Pe_3 := \text{root}(\Delta(P), P)$$

$$Pe_3 = 5.68588 \times 10^6$$

$$P := 8.210^6$$

$$Pe_4 := \text{root}(\Delta(P), P)$$

$$Pe_4 = 8.84145 \times 10^6$$

$$\sigma_k := \frac{Pe_1}{A0}$$

$$\sigma_k = 8.46507 \times 10^7$$

$$\lambda := \pi \sqrt{\frac{E \cdot A0}{Pe_1}}$$

$$\lambda = 156.47477$$

$$\mu_0 := \frac{\lambda}{1} \cdot \sqrt{\frac{I}{A0}}$$

$$\mu_0 = 0.31908$$

$$-N(0) = 9.37025 \times 10^5$$

$$\sigma_0 := \frac{-N(0)}{A0}$$

$$\sigma_0 = 5.74690 \times 10^7$$

$$iP := 4$$

$$jx := 2000$$

$$\Delta x := \frac{p1_4 + p2_4 + p3_4}{jx}$$

$$\Delta x = 0.04500$$

$$\text{PARAM}(F1, P, x) := \begin{cases} A(p1, P) \cdot [S(p1, x, P) \cdot (B(p1, P) \cdot F1)] & \text{if } 0 \leq x < p1_4 \\ A(p2, P) \cdot [S(p2, (x - p1_4), P) \cdot (B(p2, P) \cdot F2(F1, P))] & \text{if } p1_4 \leq x < p1_4 + p2_4 \\ A(p3, P) \cdot [S(p3, (x - p1_4 - p2_4), P) \cdot (B(p3, P) \cdot F3(F1, P))] & \text{if } p1_4 + p2_4 \leq x \leq p1_4 + p2_4 + p3_4 \end{cases}$$

$$XW := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 1, jx + 1, 1, iP + 1)$$

$$XW := \text{Re}(XW)$$

$$X\Phi := \text{submatrix}(W\Phi MQ, jx + 2, 2jx + 2, 1, iP + 1)$$

$$X\Phi := \text{Re}(X\Phi)$$

$$XQ := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 3 \cdot jx + 4, 4jx + 4, 1, iP + 1)$$

$$XQ := \text{Re}(XQ)$$

$$XM := \text{submatrix}(W\Phi MQ, 2 \cdot jx + 3, 3jx + 3, 1, iP + 1)$$

$$XM := \text{Re}(XM)$$
